

IV 量子理想气体

N 粒子体系: $\Psi(x_1, \dots, x_N)$.

全同性对波函数给出了限制.

例 2 个粒子

$$|\Psi(x_1, x_2)|^2 = |\Psi(x_2, x_1)|^2.$$

定义 \hat{P}_{12} : 交换 1 和 2.

$$\hat{P}_{12}^2 = \mathbb{I} \Rightarrow \text{本征值 } P_{12} = \pm 1 \begin{cases} +1: \text{玻色子,} \\ -1: \text{费米子,} \end{cases}$$

在 (3+2) 维空间独立, 低维 \times .

对于 N 个粒子: S_N 为置换群, 设 $\hat{P} \in S_N$.

$$\text{玻色子: } \hat{P}\Psi_b = \Psi_b, \quad \text{费米子: } \hat{P}\Psi_f = (-1)^P \Psi_f, \quad \begin{matrix} \text{P 的奇偶} \end{matrix}$$

· 无相互作用粒子

此时多体波函数可用单体波函数构造.

例 2 个粒子

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \quad (+ \hat{H}_{12} \text{ 忽略})$$

$$\hat{H}_{1,2} \text{ 本征态: } \phi_{k_1}(x_1), \phi_{k_2}(x_2), \quad \varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}.$$

$$\Psi(x_1, x_2) = \phi_{k_1}(x_1) \cdot \phi_{k_2}(x_2).$$

$$\hat{H}\Psi(x_1, x_2) = (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}) \Psi(x_1, x_2).$$

问题: $\hat{P}_{12}\Psi(x_1, x_2) = \phi_{k_2}(x_2) \cdot \phi_{k_1}(x_1)$, 未必满足交换对称性!

\Rightarrow 对称化 / 反对称化.

$$\text{玻色子: } \Psi_b(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} (\phi_{k_1}(x_1) \phi_{k_2}(x_2) + \phi_{k_2}(x_1) \phi_{k_1}(x_2)).$$

$$\text{费米子: } \Psi_f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} (\phi_{k_1}(x_1) \phi_{k_2}(x_2) - \phi_{k_2}(x_1) \phi_{k_1}(x_2)).$$

$$\text{注意: } \Psi_f(x_1, x_2) = 0, \quad \text{if } k_1 = k_2.$$

\Rightarrow 费米子无法同时处于同一态! (泡利不相容原理)

对于 N -粒子:

$$\text{玻色子: } \Psi_b(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{p \in S(N)} \phi_{k_1}(x_{p_1}) \phi_{k_2}(x_{p_2}) \dots \phi_{k_N}(x_{p_N})$$

$$\text{费米子: } \Psi_f(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{p \in S(N)} (-1)^P \phi_{k_1}(x_{p_1}) \phi_{k_2}(x_{p_2}) \dots \phi_{k_N}(x_{p_N}), \quad k_1 \dots k_N \text{ 互不同!}$$

从一开始做对称, 就是冗杂的操作!

占据数信息: n_1, n_2, \dots, n_N 了, 这些态.

+ 描述单粒子能级上的占据数.

\Rightarrow Fock 态: $|n_{k_1} n_{k_2} \dots n_{k_N}\rangle$, 二项量子化.

$$\begin{cases} \text{玻色子: } n_{k_i} = 0, 1, 2, \dots \\ \text{费米子: } n_{k_i} = 0, 1. \end{cases}$$