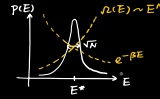


• 子能级之间的等价性

根据中心极限定理, (?) [相似之处: 能量的 \$N\$ 个中心 \$\langle E \rangle \propto N\$, 这导致在 \$N \rightarrow \infty\$ 时, \$\frac{\sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}}{\langle E \rangle}\$ 这一项减小到零 (\$\sim \frac{1}{\sqrt{N}}\$), 因此留下了这个]

对于能量的概率分布:

$$p(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta F(E)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k_B T^2 C_V}} \cdot e^{-\frac{(E-E^*)^2}{2k_B T^2 C_V}}, \quad \text{质量 } \sigma = \sqrt{k_B T^2 C_V} \sim \sqrt{N}.$$



这个“ $E^* \pm \Delta E$ ”的设定, 与微正则子能级的设定是一致的! 无法分辨!

(ΔE 都是以 $\text{poly}(N)$ 的方式增长)

$\Rightarrow N \rightarrow \infty$ 时, 正则子能与微正则子能等价! 保证 $E_{CE}^* = E_{ME}$ 即可.

• 另一种理解:

$$e^{-\beta F(E)} \xrightarrow{\text{正}(T)} e^{-\beta F(E^*)} \cdot e^{-\frac{(E-E^*)^2}{2k_B T^2 C_V}} \quad (\text{独立展开}) \rightarrow \text{复数操作:}$$

$$Z = \int dE e^{-\beta F(E)}$$

$$= e^{-\beta F^*} \cdot \sqrt{2\pi k_B T^2 C_V}$$

$$\ln Z = -\beta F^* + \frac{1}{2} \ln(2\pi k_B T^2 C_V).$$

$$\Rightarrow \underline{F} = F^* - \frac{1}{2\beta} \ln(2\pi k_B T^2 C_V) \quad \xrightarrow{\text{推广的微正则 (E=E^*) 中引入的}} \quad O(\ln N)$$

两种方式定义的熵用能差别很小. \Rightarrow 体现了子能等价性.

$$F(E) \approx F(E^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial E^2} \right)_{E^*} (E-E^*)^2$$

$$F = E - TS, \quad \frac{\partial F}{\partial E} = 1 - T \frac{\partial S}{\partial E}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{E^*} = \frac{1}{T} \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial E} \right)_{E^*} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial E^2} = -T \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = -T \left(\frac{\partial T}{\partial E} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial E^2} \right)_{E^*} = C_V \Rightarrow F(E) \approx F(E^*) - \frac{1}{2} \frac{1}{C_V T} (E-E^*)^2.$$

熵的差距?

$$\begin{cases} S_{ME} = k_B \ln \Omega(E^*) & (\text{正则子能对应的微正则子能}) \\ S_{CE} = -k_B \sum_{\ln} p(E_n) \ln p(E_n) \end{cases}$$

$$F = E - TS \Rightarrow S_{CE} = \frac{\langle E \rangle - F}{T} = \frac{E^* - F^* + \frac{1}{2\beta} \ln(2\pi k_B T^2 C_V)}{T} \\ = S_{ME}(E^*) + \frac{1}{2} k_B \ln(2\pi k_B T^2 C_V) \quad \xrightarrow{O(\ln N)}.$$

二者之差趋向于 0 \Rightarrow 体现了子能的等价性.

$$\text{证: } S = -k_B \sum_{\ln} p(E_n) \ln p(E_n)$$

$$\neq -k_B \int dE p(E) \ln p(E).$$

$$\text{通过级数为 } \int \frac{dE p(E)}{p(E)} [\beta E + \ln Z], \quad \text{原点的 } \ln p(E_n), (\text{相对等于 } p(E)) \quad p(E) = \frac{\Omega(E)}{Z} e^{-\beta E}, \text{ 多了 } \Omega(E).$$

$$\text{理由: } \langle \rangle = \sum_n p(E_n) \cdot \ln p(E_n) \quad \downarrow \text{分布函数} \quad \downarrow \text{级数和的导数}$$

变量由 $E_n \rightarrow E$ 时, $p(E)$ 的形式会变化: $p(E_n) \neq p(E)$.

故要还原 $\ln p(E_n)$ 代表的“级数和的导数”的原始形式, (与成 E_n 的函数)