

· 一维伊辛模型 ·

周期性边界:

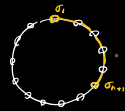
$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_i e^{K\sigma_i\sigma_{i+1}} \\ &= \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_i \cosh K (1 + \sigma_i\sigma_{i+1} \tanh K) \\ &= (\cosh K)^N \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_i (1 + \sigma_i\sigma_{i+1} \tanh K) \quad \text{仍然只有 "loop" 可以存活} - (\tanh K)^N. \\ &= 2^N (\cosh K)^N [1 + (\tanh K)^N] \quad \text{(链-整圆)} \\ &\simeq (2 \cosh K)^N, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

开放边界:

$$Z = (\cosh K)^{N-1} \cdot 2^N [2], \text{ 结果一样. (没有一圈圈了)}$$

关联函数

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \sigma_{i+n} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_i \sigma_{i+n} e^{K \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}} \\ &= \frac{(\tanh K)^n + (\tanh K)^{N-n}}{1 + (\tanh K)^N} \end{aligned}$$



取 $1 \ll n \ll N$, 有

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \sigma_{i+n} \rangle &\simeq (\tanh K)^n \\ &= \exp\left(-\frac{n}{\xi}\right), \quad \text{随 } n \text{ 指数衰减} \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{1}{\ln(\tanh K)}, \quad \text{关联长度.} \rightarrow \text{没有长程有序相, 因为 "关联" 随 } n \text{ 指数衰减!}$$

低温, $K \rightarrow \infty$, $\xi \sim 2e^{\frac{2J}{k_B T}}$. 因此只有 $T \rightarrow 0$ 时会达到无限大 (长程关联).

(只是在一个点处发生, 叫相变 — 参看 $S=2$, $d=2$ BEC. $T=0$ 时会凝聚, 但只有 -1 点, X)

如果存在相变, 在相变点处, 关联长度会发散:

$$\xi \sim t^{-\nu}, \quad \nu: \text{临界指数}$$

在相变点处, $t=0$, 关联函数随距离 r 发散:

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad \eta: \text{临界指数}$$

$r \rightarrow \infty$, 指数子项 — 标度不变性.

临界指数

热容量 $C \sim |t|^{-\alpha}$

磁化强度 $m \sim (-t)^\beta$

磁化率 $\chi \sim |t|^{-\gamma}$

磁化强度 $m \sim h^{1/\delta}$

关联长度 $\xi \sim t^{-\nu}$

关联函数 $G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$

	α	β	γ	δ	ν	η
2D Ising	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{4}$	15	1	$\frac{1}{4}$
3D Ising	0.11	0.32	1.24	4.8	0.63	0.04
MFT	0	$\frac{1}{2}$	1	3	$\frac{1}{2}$	0

普适类:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

$$\delta - 1 = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta)$$

$$\alpha = 2 - d \cdot \nu$$

在类只有2个独立参数 — 磁序变量与高2个 (t, h)

初用重整化群的方法可以发现它们之间的联系.

Ginzburg-Landau 理论: 序参量 $m(x)$, 与位置相关.



$U_i \rightarrow U(x)$, 位势场 (局部平均), 复配: $m(x)$.

$$F[m(x)] = \int d^d x \left[\frac{v}{2} m(x)^2 + u m(x)^4 + v m(x)^6 + \dots + \frac{K}{2} (\nabla m)^2 + \frac{L}{2} (\nabla m)^4 + \dots \right]$$

$$Z = \int \mathcal{D}m(x) \exp \left[- \int_a d^d x \left[\dots m^{2k} \dots (\nabla m)^{2l} \dots \right] \right]$$

\xrightarrow{a} 晶格

平均场理论的有效性

$d \geq 4$: MFT OK.

$d=2$: $H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$. Goldstone mode