

# Chapter VII. 理想玻色系统

Intro: Chapter VI 中较普遍地研究了理想气体, 在本章中讨论其研究一类

分子间相互作用可忽略不计(理想) 但由粒子不可分辨性带来的量子效应在可忽略(意味着  $n\lambda^3 \ll 1$  判断) 的理想量子气体中的理想 Bose Gas.

由此  $n\lambda^3$  为  $n\lambda^3$  的一个量, 在  $\lambda \rightarrow 0$  时, 物理性质  $\rightarrow$  经典, 因此在  $\lambda$  很大时,  $n\lambda^3$  的恒定为  $n\lambda^3$  的半从被由  $n\lambda^3$  构成和在低温后更反下更才能表现出这些量子特性, 且粒子  $m$  越小, 量子特性越强.

## §1. 理想玻色气体的热力学性质.

α.  $P(z, V, T)$  与  $N(z, V, T)$ ; 临界温度与临界性质

在推导理想气体的巨配分函数时曾得到 对 Bosons,  $\Omega(z, V, T) = \prod_{\epsilon} \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}$ , ( $ze^{-\beta\epsilon} < 1$ )

并由此得到  $g(z, V, T) = \frac{PV}{kT} = \ln \Omega = - \sum_{\epsilon} \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon})$

以及  $N(z, V, T)$ , 对  $N(z, V, T) = \sum_{\epsilon} - \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \epsilon} \right)_{z, T, \text{All other } \epsilon} = \sum_{\epsilon} \frac{1}{ze^{-\beta\epsilon} - 1}$

在  $V$  较大的时候,  $\epsilon$  可近似连续, 可将求和转为积分

在非相对论情形下 ( $\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ )  $\sum_{\epsilon} \rightarrow \int_0^{\infty} g(\epsilon) d\epsilon$ ,  $g(\epsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon$

然而, 求和向积分的转变实际上只在较大的  $\epsilon$  下才成立, 而这里从  $\epsilon$  从  $0 \sim +\infty$  积分, 实际上是基于

$\epsilon \sim 0$  附近的一个积分去不去对整体造成大影响考虑而来. 但实际上, 在  $\mu \rightarrow 0$  时, 这部分不会变得尤为重要

$g(\epsilon)|_{\epsilon=0} = 0$ , 这相当于给  $\epsilon=0$  的巨配分权重 0.

★ (见 Cohen Complement Bxv 的 IV)

合适的做法是, 在求和单独出  $\epsilon=0$  的一项, 剩下仍按积分来.

此时有  $\frac{P}{kT} = - \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \sqrt{\epsilon} \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon - \frac{1}{V} \ln(1 - z)$

$\frac{N}{V} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon}}{ze^{-\beta\epsilon} - 1} d\epsilon + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z}$

实际上, 可估计最后一项的贡献. 在  $\mu \ll V$  的任意点累以  $\rightarrow 0$  的时候,  $P/kT$  表达式中

最后一项随  $V \rightarrow \infty$  (热力学极限)  $\rightarrow 0$ , 因此确可忽略, 然而在  $\frac{N}{V}$  中, 若  $\mu$  以  $[V^{-\lambda}]$  ( $\lambda \geq 1$ ) 趋于  $\infty$

那么对  $N = \frac{N}{V}$  可具有有限 ( $\lambda=1$ ) 及在热力学极限下  $\rightarrow +\infty$  ( $\lambda>1$ ) 的修正.

当最后一项在  $N$  中占主要时, 就导致了 Bose-Einstein Condensation.

Tip: 第二项及其之后的影响: 实际上可甚小到在零上附近,  $\epsilon = \frac{\hbar^2 x^2 (\frac{2\pi}{L})^2}{2m}$ , 则  $\epsilon = \frac{1}{V} \frac{z}{e^{-\beta\epsilon} - 1}$

此时即使有  $\lambda > 1$ , 仍由中占支配的项为  $V^{-2/3}$ , 第二项带来最后  $V^{-1/3}$  的修正, 随  $V \rightarrow \infty$  趋于 0, 可略.

这一过程反映了  $\lambda$  取 1 项的合理性

由于  $z \sim 0$ , 不必理会收敛性问题

与 Cohen Complement Bxv 中一致, 以  $x = \beta\epsilon$  替换后 引 Bose-Einstein Function  $g_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1} dx}{z^{-1}e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\nu}}$

得到  $\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$ ,  $\frac{N - N_0}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$ ,  $N_0 = \frac{z}{1 - z}$

以上二式是基本结果, 二式消去  $z$  后得到  $P, V, N, T$  的状态方程.

系统的内能由公式,  $U = -(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z)_{z, V} = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\beta PV]_{z, V} = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z)]_{z, V}$ , 据  $\lambda^3 \propto \beta^{-3/2}$

得到  $U = \frac{3}{2} kT \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$ , 且有  $P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$  (这个公式属于朴素力学公式, 与统计无关)

接下来考虑几个极限情况.

①. 正离子 (即  $T \rightarrow \infty$  时). 此时在  $V$  较大的热力学极限下,  $N_0$  与  $N$  相比可以忽略, 因此

$$n\lambda^3 = g_{3/2}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^{3/2}}, \text{ 你会发现此时 } n\lambda^3 \text{ 也很小, 因此可以利用级数展开的方法}$$

将  $z$  用  $n\lambda^3$  的幂次表示 (或记为  $\frac{\lambda^3}{v}$ ,  $v = \frac{1}{n}$  为每个粒子的体积)

(具体令  $z = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \times (n\lambda^3)^s$  并有方程组  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\frac{3}{2}k)!}{(\frac{3}{2}k)!} \pi \frac{b_k}{k!} \right] = \delta_{0,k}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ), 其中  $\{b_k\}$  为满足  $\sum_{i=1}^{\infty} i b_i = 1$  的所有非负解)

将  $z$  代入  $\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^{5/2}} \Rightarrow \frac{PV}{NkT} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (n\lambda^3)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{i-1}$ , 其中  $a_i$  满足方程组

对满足  $\sum_{i=1}^{\infty} i x_i = 1$  的所有非负  $\{x_i\}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(\frac{3}{2}k)!}{(\frac{3}{2}k)!} \pi \frac{b_k}{k!} \right] = a_i$ ,  $a_i$  称为该系统的位力系数, 展开为位力展开

例如  $b_1=1, b_2=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, a_1=1, a_2=-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ . 并以此类推. (Tip: 你枚举  $\sum_{i=1}^{\infty} i x_i = 1$  的所有解来验证本解)

由此也可以得到比热,  $\frac{C_V}{kN} = \frac{1}{kN} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N, V}$ , 再根据  $U = \frac{3}{2} PV$  有

$$\frac{C_V}{kN} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{PV}{kN} \right) \right]_{N, V}, \text{ 根据 } \lambda \propto T^{-1/2} \text{ 有 } \frac{C_V}{kN} = \frac{3}{2} \times \sum_{i=1}^{\infty} a_i \times \frac{5-3i}{2} \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{i-1}$$

在  $i=1$  时,  $a_1 \times \frac{5-3}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{0} = \frac{3}{2}$ . 符合在  $\frac{\lambda^3}{v} \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ) 时的经典极限, 状态方程.

Tip: 计算得到除  $a_1$  外所有  $a_i < 0$ , 在  $i \geq 2$  时,  $\frac{5-3i}{2} < 0$  因此在  $T$  很大的,  $C_V$  是从  $\frac{3}{2} kN$  上方趋于  $\frac{3}{2} kN$ , 而  $T \rightarrow 0$   $C_V \rightarrow 0$

所以研究发现  $(C_V, T)$  曲线在特征值  $T_c$  附近有极大值且为一个导数不连续的点

②  $z \ll 1$  (即  $T$  降低,  $\lambda$  变大,  $n\lambda^3$  变大时)

以上两个展开逐渐不再适用. 因此用更精确的公式代替.

$z$  的方程由  $N_e = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$  方程求得 ( $N_e = N - N_0$  为激发态粒子数)

根据  $g_{\nu}(z)$  表达式, 在  $0 \leq z < 1$  范围内, 在  $\nu > 1$  时,  $g_{\nu}(z)$  单调递增且上限为  $g_{\nu}(1)$  or  $\zeta(\nu)$  (Riemann Zeta Function)

由此,  $N_e$  在给定的  $(V, T)$  下的最大值为  $(N_e)_{\max} = \frac{V}{\lambda^3} \zeta(3/2)$   
由于  $\lambda \propto T^{-1/2}$ , 因此  $(N_e)_{\max}$  为粒子间距  $\propto \lambda$ .

故令之凝聚判据即为  $N - \frac{V}{\lambda^3} \zeta(3/2) \approx 2.612 \times \frac{V}{\lambda^3} \gg 1$ . (在 Cohen-Compton-Bau 中已证)

在  $N > (N_e)_{\max}$  时, 则有  $N_0 = N - (N_e)_{\max}$ ,  $z = \frac{N_0}{N_0+1} \approx 1 - \frac{1}{N_0}$  ( $N_0 \gg 2$  时) 则  $z$  很接近 1 了

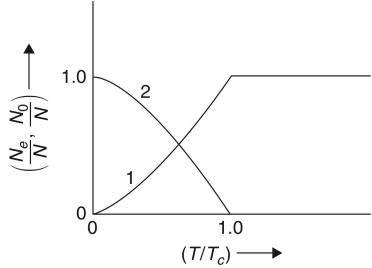
当然若保持  $(N, V)$  不变, 那么根据  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$  有判据  $T < T_c = \frac{h^2}{2\pi m} \left[ \frac{N}{V \zeta(3/2)} \right]^{2/3}$

在  $T < T_c$  情形下, 系统可以看成两“相”混合物.

(i) 正常相: 由分布在激发态上的  $N_e = N \times \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$  个粒子组成

(ii) 凝聚相: 由积累在基态的 ( $\epsilon=0$ ) 的  $N_0 = N - N_e$  个粒子组成

并且在  $T \rightarrow (T_c)_-$  时,  $N_0/N = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} + o\left[\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]$  由于在  $T > T_c$  时  $N_0 \sim 0$ , 因此你看到  $T_c$  处  $N_0/N$  导数不连续



左图画出了  $\frac{N_0}{N}$  与  $\frac{N_c}{N}$  随  $(T/T_c)$  的变化曲线图。可以看出在  $T=T_c$  处二者均有奇异性。

### β. 一些热力学量随 T 的变化

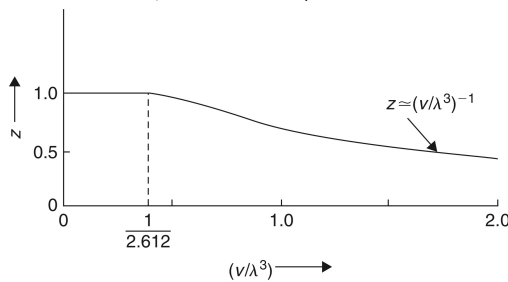
同时,  $\mu$  随 T 或  $z$  随 T 的变化也很重要。但事实上,  $-f(\mu, V, T)$  中至少还应有一项足以来确定  $\mu$ 。

在这里选取  $N$ , 即方程  $\frac{N-N_0}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$  来反解  $z$ 。因此  $z$  可用作  $\frac{1}{n\lambda^3}$  的函数来表征  $z$ 。

① 在发生凝聚时,  $z \equiv 1 - N_0/N = 1$ 。此时有  $n\lambda^3 > g_{3/2}(1)$  即  $0 < \frac{1}{n\lambda^3} < [g_{3/2}(1)]^{-1}$

② 在未发生凝聚时, 在  $\frac{1}{n\lambda^3} > [g_{3/2}(1)]^{-1}$  时,  $N_0 \equiv 0$  则方程近似为  $n\lambda^3 = g_{3/2}(z)$ , 从而确定  $z[n\lambda^3] = z$ 。

在  $z \ll 1$  时,  $z$  可进一步的将方程简化为  $n\lambda^3 = z$  的渐近行为为  $z = (\frac{1}{n\lambda^3})^{-1}$ 。



左图即为  $z$  关于  $\frac{v}{\lambda^3} = \frac{1}{n\lambda^3}$  的函数。

接下来考虑  $P$  关于  $T$  的变化。根据  $P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$  来得到。(但注意, 这里给定的量是  $v$  不是  $z$ )

① 在  $T < T_c$  (or  $\frac{v}{\lambda^3} < \frac{1}{g_{3/2}(1)}$  时) 有  $z \equiv 1$ , 则此时  $P = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \propto T^{5/2}$  且与  $v$  (or  $z$ ) 无任何关系,  $v$  仅确定凝聚态

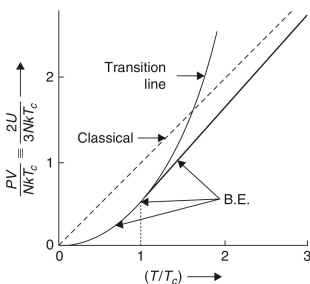
相占总压的压强为  $P(T_c) = (\frac{2\pi m}{h^2})^{3/2} (kT_c)^{5/2} g_{5/2}(1)$  利用  $n(T_c) = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(1) \Rightarrow P(T_c) = \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \times [n(T_c) kT_c] \approx 0.5134 (n kT_c)$

实际上, 对所有  $T < T_c$  有  $P(T) = \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \frac{N_c(T)}{V} kT \approx 0.5134 \frac{N_c kT}{V}$ 。

由于处于凝聚态的粒子对压强无贡献, 因此有结论: 理想 Bose 气体压强在凝聚时是同温度下 Boltzmann 气体的一半左右

② 在  $T > T_c$  时,  $P(T) = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \frac{N}{V} kT$  (此时  $n \sim N_c$ ), 其中  $z(T)$  由  $g_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v}$  确定

在  $T \gg T_c$  时,  $z$  可用位力展开来求  $P(T)$ 。在  $T \rightarrow \infty$  时  $\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \rightarrow 1$ 。这成为位力物方程



如左图, 实线即为  $P(T)$  演化为相变线 (即在  $T < T_c$  与前者相同的  $P(T)$ )

在  $T > T_c$  时, 回归正常态, 并在  $T \rightarrow \infty$  时趋近于经典的  $P(T)$

Tip: 实际上由于  $P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$ , 因此也可求出  $U(T)$  (在  $v$  固定时)

可以看出, 当  $T \rightarrow \infty$  时  $C_v \rightarrow 0$  到  $T_c$  处达到极大再逐渐减小至  $\frac{15}{4} N$

接下来考虑  $C_v$  在  $v$  不变的情况下随  $T$  的变化 ( $v$  取代了  $\mu$  足以完全表征为独立变量)

$C_v = (\frac{\partial U}{\partial T})_{N,v} = \frac{3}{2} [\frac{\partial}{\partial T} (PV)]_{N,v}$  并有  $P(T)$  已由以上在  $v$  不变  $T(N, v)$  求得 (即  $P(T)$  是  $T$  的函数)。

① 在  $T < T_c$  时,  $P(T) = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(1)$ ,  $(\frac{\partial P}{\partial T})_{N,v} = \frac{\partial P(T)}{\partial T} = \frac{5}{2} \frac{k}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \Rightarrow C_v = \frac{15}{4} \frac{kV}{\lambda^3} g_{5/2}(1) \Rightarrow \frac{C_v}{kN} = \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1)$

再根据  $\frac{N_c}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(1) \Rightarrow C_v = \frac{15}{4} k N_c \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$ 。并且在  $T=T_c$  时,  $N_c \sim N$  有  $\frac{C_v}{kN} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \approx 1.925 > 1.5$

② 在  $T > T_c$  时,  $C_v = \frac{3}{2} kN \frac{\partial}{\partial T} [T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}]_v$ , 其中  $z$  由  $g_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v}$  确定

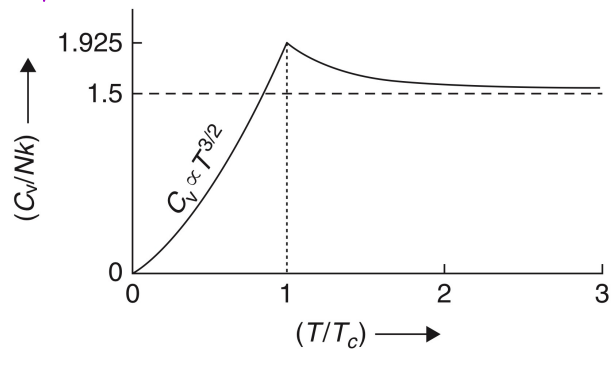
(i) 计算  $(\frac{\partial z}{\partial T})_v$  利用  $\frac{\partial}{\partial T} [g_{3/2}(z)] = \frac{dg_{3/2}(z)}{dz} (\frac{\partial z}{\partial T})_v = -\frac{3}{2T} g_{3/2}(z)$ ,  $\frac{dg_{3/2}(z)}{dz} = \frac{1}{2} g_{1/2}(z)$

$$\Rightarrow (\frac{\partial z}{\partial T})_v = -\frac{3z}{2T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

(ii) 计算  $C_v$   $C_v = \frac{3}{2} kN [\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} + T \frac{d}{dz} [\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}] \times (\frac{\partial z}{\partial T})_v] \Rightarrow C_v = \frac{3}{4} kN [5 \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - 3 \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}]$

在  $T = T_c$  时,  $C_v = \frac{3}{4} kN [5 \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} - 3 \frac{g_{3/2}(1)}{g_{1/2}(1)}] = \frac{15}{4} kN \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}$  ( $g_{3/2}(1) \rightarrow \infty$ )

Tip.  $[\frac{\partial C_v}{\partial T}]_{T_c} = \frac{27kN}{16\pi T_c} g_{5/2}(\frac{3}{2}) \approx 3.665 \frac{kN}{T_c}$ , 因而微分不连续, 如下图



在  $T < T_c$  时,  $C_v / kN = \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$

在  $T > T_c$  时,  $C_v / kN = \frac{3}{4} [5 \frac{g_{5/2}}{g_{3/2}} - 3 \frac{g_{3/2}}{g_{1/2}}] (z)$  其中  $g_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v}$

## 8. 其他过程

(i) 等温过程, ( $T$  不变的过程)

例如考虑  $T$  不变时  $P$  随  $v$  变化, 从上面已得  $P(v, T)$ , 因此因  $T$  不变

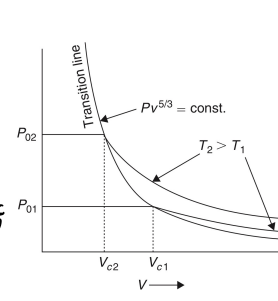
考虑到对某个  $v$  在  $T < T_c$  时,  $P$  与  $v$  无关 这从上面根据  $P(v, T) = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z(v, T))$

而  $z(v, T)$  在  $\frac{v}{\lambda^3} < \frac{1}{g_{3/2}(1)}$  时近似为 1, 因此有对给定的  $T$  存在 **临界体积**  $v_c = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1)}$

在临界体积以下,  $P$  不再随  $v$  变化, 并且根据  $z(v, T)$  与  $g_{5/2}(z)$  图际可知  $P(v, T)$  连续

在  $v_c$  处取临界值  $P_0 = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(1)$ 。在临界处 又发生了相反, 对不同  $T$  下的相交点  $(v_c, P_0)$  从上面有

$P_0 v_c^{5/3} = \text{const}$ , 这串线上的每一个点代表一个  $T$  下的相交点, 如右图



(ii) 绝热过程 ( $N$  与  $S$  不变的过程)

根据  $G = \mu N = U - TS + PV$ , 并利用  $P(T, v)$ ,  $U(T, N, v)$  得到  $S(N, v, T)$

$$S = (\frac{5}{2} PV - \mu N) \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{S}{kN}(T, v) = \begin{cases} \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z & (\text{其中 } z \text{ 由 } g_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{v} \text{ 确定 } z(v, T)) \quad (T > T_c) \\ \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(\frac{3}{2}) & (z \approx 1) \quad (T \leq T_c) \end{cases}$$

此时再由绝热过程, 在  $T > T_c$  时 ( $N, S$ ) 不变意味着  $z = \text{const}$  or  $\frac{\lambda^3}{v} = \text{const}$  or  $v T^{3/2} = \text{const}$

在  $T < T_c$  时, 显然也有  $\frac{v}{\lambda^3}$  or  $v T^{3/2} = \text{const}$ .

但不像我们, 绝热过程中有  $v T^{3/2} = \text{const}$ , 且从上面  $z = \text{const} \Rightarrow P \propto T^{5/2}$  因此也有  $P v^{5/3} = \text{const}$

这从上面与经典理想气体一致, 但经典对经典或量子气体,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$

但对 Bose Gas,  $\frac{C_p}{C_v} \neq \frac{5}{3}$ ,  $\frac{C_p}{C_v} = \frac{(\partial S / \partial T)_{P, N}}{(\partial U / \partial T)_{v, N}} = \frac{(\partial z / \partial T)_P}{(\partial z / \partial T)_v} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2} g_{1/2}}{(g_{3/2})^2}$  并给出在  $T \rightarrow T_c$  时,  $\gamma$  发散至无穷. 按  $(T - T_c)^{-1}$



Tip: 在  $T < T_c$  区域内,  $S = \frac{5}{2} k V \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) = \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} k N_e \ll N_e$ , 与以上求出的  $N_0$  无关. 可称为宏观部分

Extra:  $C_p$  的估计.  $C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p, N}$ . 根据  $S = \frac{1}{T} (E - \mu N)$   $P(\nu, T) = \begin{cases} P(T) = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(z) & (T < T_c) \\ P(\nu, T) = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \frac{kT}{\lambda^3} & (T > T_c) \end{cases}$ ,  $z(\nu, T)$  由  $g_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{N} g_{3/2}(z)$  ( $T > T_c$ )

可知  $C_p$  仅在  $T > T_c$  时才有意义, 因为再之后  $\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_T$ .

在  $T > T_c$  时, 可改写为  $\nu(p, T) = \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \frac{kT}{\lambda^3}$ ,  $z(p, T)$  由  $g_{5/2}(z) = \frac{\lambda^3}{kT} P$  决定

按类似步骤,  $\left[ \frac{\partial g_{5/2}(z)}{\partial T} \right]_p = -\frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{T} = \frac{dg_{5/2}(z)}{dz} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p \Rightarrow \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p = -\frac{5}{2} \frac{z}{T} \times \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$

再按  $\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p, N} = \frac{3}{2} P N \left( \frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_p = \frac{3}{2} k N \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \right) \right]_p$ . 而  $C_v = \frac{3}{2} k N \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \right) \right]_N$ .  $\left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_N = -\frac{5}{2} \frac{z}{T} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$

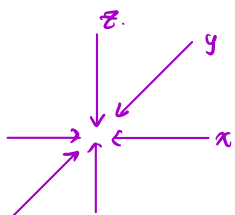
代入的  $C_p = k N T \left[ \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \right)_p - \frac{\partial}{\partial T} (\ln z)_p \right] = k N T \times \frac{1}{2} \left[ \frac{3g_{5/2}^2 - 5g_{5/2}g_{3/2}}{2g_{3/2}^2} \right] \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p$

对比  $C_v$  的  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}g_{3/2}}{g_{3/2}^2} = \frac{(\partial z / \partial T)_p}{(\partial z / \partial T)_N}$

## §2. 超冷原子气体中的玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC)

α. 冷却的实验方法.

(i) 采用三组相向激光. 沿直角坐标轴, 并使其频率调节略低于原子共振频率.



静止原子不受共振, 若原子初速度有一分量的速度. 由于多普勒效应

会与正对速度的光束共振, 吸收光子, 进而平衡随机方向散射光子

最终效果为动量反冲.

Tip: 束缚原子存在反冲极限.  $(p)_{\min} = (p)_{\text{photon}}$  得到极限速度  $T_0 = \frac{h^2 \omega^2}{2m k c^2} \sim 1 \mu K$ .

(ii). 在获得超冷原子后, 关闭激光, 并利用随空间量化的势阱在晶格中的势阱

形成各自独立的吸引谐振子势  $V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$ .  $\omega_\alpha$  由  $B$  控制.

同时可利用共振激光来减少杂质原子, 若所有原子都足够冷, 那它们将降低温度

此时在谐振子势阱中, 各原子能量为  $E_{i,1,1,1} = \hbar(\frac{1}{2}\omega_x + \frac{1}{2}\omega_y + \frac{1}{2}\omega_z) + \frac{1}{2}\hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$

可得用, 在  $E$  较大时, 分布度  $a(E) = \frac{E^2}{2\hbar^2 \omega_x \omega_y \omega_z} = \frac{E^2}{2(\hbar \omega)^3}$  (利用手风琴面近似)

根据热力学势  $\Phi(\mu, V, T) = -kT \ln Q(z, V, T) = -kT \ln \left[ \sum_N \sum_E e^{-\beta(E - \mu N)} \times g(E) \right]$

$\sum_N \sum_E e^{-\beta(E - \mu N)} \times g(E) = \sum_N \sum_{\{n_i\}}' e^{-\beta(E_{\{n_i\}} - \mu N)}$   $g(\{n_i\}) = \sum_{\{n_i\}}' e^{-\beta(E_{\{n_i\}} - \mu N)} = \prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_i}}$

$\Phi(\mu, V, T) = +kT \left( \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta \epsilon_i}) \right)$  在  $V$  足够大时, 且不计入以能量  $\epsilon_i$  在  $E$  下

$\Phi(\mu, V, T) = kT \int_0^\infty a(\epsilon) \ln(1 - ze^{-\beta \epsilon}) d\epsilon = \frac{(kT)^4}{2(\hbar \omega)^3} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x} z) dx = -\frac{(kT)^4}{(\hbar \omega)^3} g_4(z)$ , 可知  $\Phi \propto V \epsilon^{-3}$

(iii) 在给定  $N$  下降温 ( $N$  越大越好)

根据  $\Phi = U - TS - \mu N_e$  的极值求的  $N_e = -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_T = \left( \frac{kT}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(z)$ .

可知, 类似在无外场的情况下,  $N_e$  在  $T < T_c$ ,  $z \gg 1$  时总和为  $(N_e)_{\max} = \left( \frac{kT}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(1)$

因此也可得到对固定  $N$ , 临界温度为  $\frac{kT_c}{\hbar \omega} = \left[ \frac{N}{g_3(1)} \right]^{1/3}$ . 从以上看出  $N$  越大, 则  $T_c$  越高, 故  $T_c$  与  $N$  成正比

Tip: 例如对典型晶格原子  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $N = 2 \times 10^9$  时.  $\frac{kT_c}{\hbar \omega} \sim 25.5$ , 估计的  $T_c \sim 12 \mu K$  而实验测得为  $170 \text{ nK}$ .

若因  $N$ , 那么在 T 下降至  $T_c$  下后,  $N_0 = \left(\frac{RT}{h^2 a_0^2}\right)^3 \zeta(3) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 N$

则有  $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$ . 为凝聚到基态的原子数. 在  $N \rightarrow \infty$  的巨力子极限下, 有  $N_0 \propto N^{3/4}$ , 而  $T/T_c \rightarrow 0$ .

$\beta$ . BEC 的探测. (利用飞行时间实验).

(i) 撤去磁阱让气体自由膨胀 - 散开

(ii) 用激光脉冲照射原子, 其位置在成像 CCD 中留下一个阴影, 这直接反映了  $t=0$  时的动量分布

可以通过均匀与否判断是否凝聚.

实验的关键在于原子在动量空间分布的均匀与否.

凝聚在基态的原子由于  $\omega_x$  的各向异性, 则有使凝聚的动量空间分布各向同性

但非凝聚的原子可用半经典理论处理, 那么它们在动量空间分布均匀.

★若让其自由飞行一段时, 动量的不均匀性  $\times$  时间会盖住原有的展宽上仍空间不均匀

(基态展宽为  $a_x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_x}}$ ; 非凝聚的玻色子展宽为  $a_T = \sqrt{\frac{\hbar T}{m\omega_x^2}}$ ) 实验条件  $T$  约为  $1\mu m$  至  $5\mu m$ .

$V$ -阱 (s) 为  $mm/s$ , 飞行  $ms$  后 原子云至  $10^3 \mu m \gg 1\mu m$ . 因此

最终在飞行后, 非凝聚原子空间分布近似均匀, 而基态凝聚原子空间分布仍不均匀.

具体分析. 对于 CCD 上的图案, 与原子数  $n$  有关.

根据基态波函数及自由 S-E. 可得  $\psi_0(\vec{r}, t)$ . 因此有

$$n_0 = N_0 |\psi_0(\vec{r}, t)|^2 = \frac{N_0}{\pi^{3/2}} \prod_{\alpha=1}^3 \frac{1}{a_\alpha \sqrt{1 + \omega_\alpha^2 t^2}} e^{-\vec{r}^2 / [a_\alpha^2 (1 + \omega_\alpha^2 t^2)]}$$

对于未凝聚的原子, 可用半经典理论处理. 即令  $f(\vec{r}, \vec{p}, 0) = \left[ e^{\beta \vec{p}^2 / 2m + \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)} - \beta \mu - 1 \right]^{-1}$

上式本应是薛定谔方程的解, 但在半经典下近似处理为这样.

根据无相互作用下自由演化,  $f(\vec{r}, \vec{p}, t) = f(\vec{r} + \frac{\vec{p}}{m}t, \vec{p}, 0)$ .  $n_0(\vec{r}, t) = \frac{1}{h^3 \times 1!} \int d\vec{p} f(\vec{r} + \frac{\vec{p}}{m}t, \vec{p}, 0)$

由此得到  $n_0(\vec{r}, t) = \frac{1}{\pi^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j\beta\mu}}{j^{3/2}} \left\{ \prod_{\alpha=1}^3 \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_\alpha^2 t^2}} e^{-\beta j m \omega_\alpha^2 r_\alpha^2 / 2(1 + \omega_\alpha^2 t^2)} \right] \right\}$

1°  $\omega_\alpha t \ll 1$ , 即刚开始飞行时. 可得  $n_0(\vec{r}, 0)$  与  $n_0(\vec{r}, t)$  均非各向同性. 因为  $r_\alpha$  有  $\omega_\alpha$ .

2°  $\omega_\alpha t \gg 1$ , 即飞行结束时. 可得  $n_0(\vec{r}, t)$  的  $r_\alpha^2$  仍有  $\omega_\alpha$ , 仍非各向同性, 而

在  $n_0(\vec{r}, t)$  上,  $r_\alpha^2$  的  $\omega_\alpha^2$  完全消失, 变成各向同性

Tip: 基态各向异性与有凝聚原子间排斥的统计力发生作用

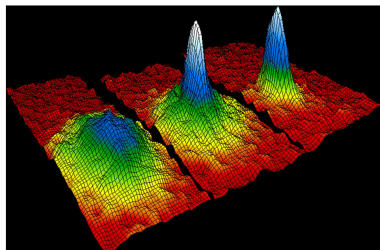


FIGURE 7.9 Time-of-flight images from the first observation of Bose-Einstein condensation in a dilute vapor of  $^{87}Rb$  by Anderson et al. (1995) at temperatures just above and below the phase transition temperature. The anisotropic pattern of the Bose-condensed fraction is evident; compare to Figure 7.8. Courtesy of NIST/JILA/University of Colorado.

如左右二图所示, 出现了空间不均匀性.

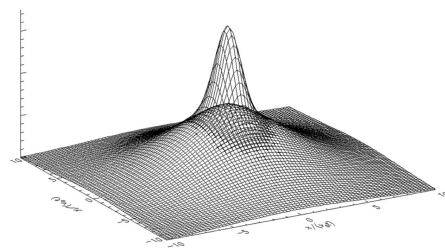


FIGURE 7.8 The two-dimensional time-of-flight number density equations (11) and (15) at late times ( $\omega_\alpha t \gg 1$ ) for  $T/T_c = 0.98$  using the experimental parameters in Anderson et al. (1995):  $N = 2 \times 10^4$  atoms in the trap and  $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_x}$ . The plot shows the full density and, underneath, the broader isotropic density just due to the excited states. The z-dimension has been integrated out. The Bose-condensed peak is anisotropic: the y-direction spread is  $0.1^3 = 1.68$  times larger than in the x-direction while the broad peak caused by the excited states is isotropic. The distance scale  $\lambda_{dB} = \sqrt{\hbar^2/mk_B T}$  determines the width of the distribution that results from the Bose-condensed peak in the x-direction at late times; compare to Figure 7.9.

## 7. BEC 的热力学性质

$$U(\mu, T) = \sum_{\epsilon} \langle n_{\epsilon} \rangle \epsilon = \int_0^{\infty} \epsilon \langle n_{\epsilon} \rangle g(\epsilon) d\epsilon = 3 \frac{(kT)^4}{(\hbar\omega_0)^3} g_4(z) \Rightarrow \frac{U}{kNT_c}(\mu, T) = 3 \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \frac{g_4(z)}{g_4(1)} \quad \text{或在 } N, T, \mu \text{ 由 } g_3(z) = g_4\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \text{ 求 } (T < T_c)$$

由于由于价振子势下, 能量与  $V$  无关, 因此仅有  $N$  与  $T, \mu$  有关。例如若欲求  $C_N$ 。

$$\text{首先 } N(\mu, T) = \begin{cases} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^3 g_3(z) & (T > T_c) \\ N_0 + \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^3 g_3(1) & (T < T_c) \end{cases} \quad \text{由此可求得 } \mu(N, T). \quad \text{因此在 } N \text{ 固定相形下, } z = z(T) \quad (\text{加上 } T < T_c \text{ 时 } \mu = 0)$$

$$C_N = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_N = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\mu} + \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_N = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\mu} - \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial N / \partial T\right)_{\mu}$$

$$\text{由此有 } \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\mu} = 12k \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^3 g_4(z), \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_T \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)_T = 3 \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^3 g_3(z)$$

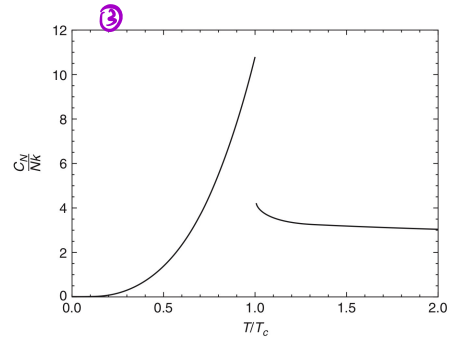
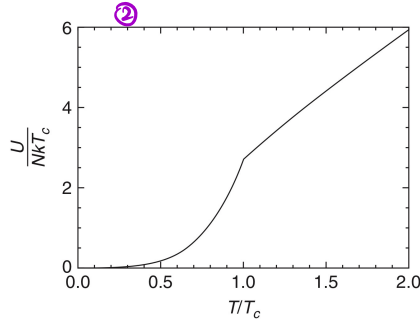
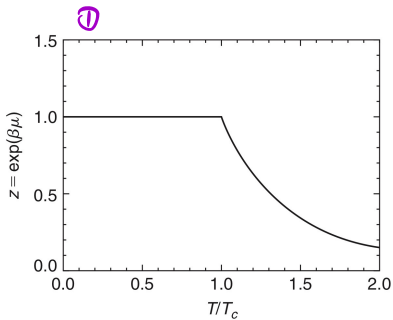
$$\text{并令 } T > T_c \text{ 与 } T < T_c \text{ 分开计算 } \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{\mu} \text{ 与 } \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_T.$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_T = \begin{cases} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^3 g_3(z) & (T > T_c) \\ \infty & (T < T_c) \end{cases} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{\mu} = 3k \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^2 g_3(z).$$

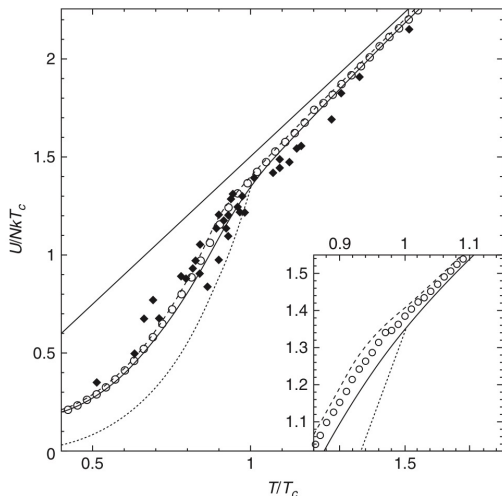
$$\Rightarrow \text{同样在固定 } N \text{ 下的 } C_N(\mu, T) = C_N(T), \quad \mu(N, T) \text{ 由 } \begin{cases} g_3(z) = g_3(1) \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 & (T > T_c) \\ 0 & (T < T_c) \end{cases} \text{ 来确定 (连续)}$$

$$\frac{C_N(T)}{kN} = \begin{cases} \frac{12 g_4(z)}{g_3(z)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 & (T < T_c) \\ \frac{4}{g_3(1)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \left[ 4g_4(z) - 3 \frac{g_3^2(z)}{g_2(z)} \right] & (T > T_c) \end{cases}$$

以下给出 ① ② ③ 三幅图



与金中 Bose 气体不同之处在于凝聚体比例在  $T_c$  处不再连续。  $\frac{C_N}{kN} \rightarrow \begin{cases} 12 g_4(1)/g_3(1) \approx 10.805 & (T \rightarrow T_c^-) \\ 12 g_4(1)/g_3(1) - 9 g_3(1)/g_2(1) \approx 4.228 & (T \rightarrow T_c^+) \end{cases}$



左图给出了  $^{87}\text{Rb}$  的 BEC 内能数据图。

其中分别以虚线为菱形, 无相互作用解(②)为点线(最下方)

计入相互作用中 1/2 解为实线, 1/2 级数解为虚线, 数据点为圆圈

点线为 Maxwell-Boltzmann 结果。右下角为斜率交叉处的放大结果。

斜率交叉点为热力学极限下的结果, 而此交叉点  $N$  有限。因此

不会有任意的非解析性, 因而尖角变得光滑,  $\Delta C_N \rightarrow 0$ 。

## §3. 黑体辐射热力学

历史上, 由两个实际相同但观点不同的观点考虑黑体辐射热力学。

(i) 看成具有能量  $(\frac{1}{2} + n_s) \hbar \omega_s$  的谐振子集合.

(ii) 看成全同的不可分辨的光子构成的气体. 光子能量为  $\hbar \omega_s$

(i) Plank 观点.

若假设能量是 (对比例子无影响) 每一个谐振子的平均能量为 (正则系综下)

$$\langle E_s \rangle = \frac{\hbar \omega_s}{\exp(\hbar \omega_s / kT) - 1} \quad (\text{若考虑零点能再加 } \frac{1}{2} \hbar \omega_s, \text{ 但这对后面的热力学无影响?})$$

对于空腔内的电磁波, 由于有垂直于传播方向的 (x, y) 两个方向, 它们可以

化成许多驻波形式, 驻波为  $\omega_{lm} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$   $\omega_x = \frac{k_x \pi x c}{L_1}$ ,  $\omega_y = \frac{l_y \pi y c}{L_2}$ ,  $\omega_z = \frac{m_z \pi z c}{L_3}$

因此一个驻波对应  $\frac{\pi^2 c^3}{V}$  的体积, 对于一个给定的  $\omega$ , 由于  $k, l, m$  均取正.

因此有  $\frac{1}{8} \times 4\pi \omega^2 d\omega$  的体积, 中有  $2 d\omega \frac{4\pi \omega^2}{8} / \frac{\pi^2 c^3}{V} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V d\omega$  个模式. 记为  $V g(\omega) d\omega$

由在  $(\omega, \omega+d\omega)$  上的能量为  $u(\omega) d\omega = g(\omega) d\omega \times \langle E(\omega) \rangle = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}$  (Planck 公式)

Tip: 若保留零点能, 那么会得到发散的求和?

(ii) Bose and Einstein.

不看成许多谐振子, 而是把不同的  $\omega$  看成不同能级, 并非大同一  $\omega_s$  不同  $n_s$  代表不同能级.

那么, 在某一个能级上的平均占据数由  $\langle n_s \rangle = \frac{\sum_{n_s=0}^{\infty} n_s e^{-\beta n_s \hbar \omega_s}}{\sum_{n_s=0}^{\infty} e^{-\beta n_s \hbar \omega_s}} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_s} - 1}$  (化简为等比数列)

(又因为上述所有能级中只有  $n_s$  有值的有限个, 取极限)

那么也有  $\langle E_s \rangle = \hbar \omega_s \langle n_s \rangle$ .

这时,  $\omega - \omega + d\omega$  内的态数要从自由粒子的动量分布出发.

若满足 BVE, 那么  $|\Delta \vec{p}| = \frac{(2\pi)^3}{V}$ . 由在  $4\pi k^2 dk$  内, 有  $[4\pi k^2 dk / \frac{(2\pi)^3}{V}] \times \frac{1}{2}$  个态 (且有  $\hbar \omega = \hbar k c$ )

表示为  $g(\omega) \times V d\omega \Rightarrow g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$ , 与之前完全一致. 那么可以得出同样分布.

(iii) 光子气体.

由于在  $V$  内, 光子数是不变的, 那么因此  $NSE$  是不存在. Lagrange 子中无  $\mu$ , 故有  $\mu=0$ .

$\langle n_e \rangle = \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$ . (也可以从  $(\frac{\partial A}{\partial N}) = 0$  得到, 由于系统自由能  $A$  中不含  $N$ , 因此  $\mu=0$ )

例如可以计算巨配分函数  $\Omega(V, T)$ ,  $\ln \Omega(V, T) = PV = - \sum_{\epsilon} \ln(1 - e^{-\epsilon/kT})$

利用投影到正则系综下,  $V \times a(\epsilon) d\epsilon = 2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \times V$ ,  $\epsilon = \hbar k c \Rightarrow a(\epsilon) = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \epsilon^2 d\epsilon$

$\Rightarrow \ln \Omega = -V \int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-\epsilon/kT}) \frac{8\pi}{h^3 c^3} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{8\pi V}{3h^3 c^3} \times \frac{1}{kT} \int_0^{\infty} \epsilon^3 \times \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1} d\epsilon$

(i)  $\ln \Omega(V, T) = PV = \frac{8\pi^5 V}{45 h^3 c^3} (kT)^4 = \frac{1}{3} U$ ,  $U \propto VT^4$ , 若考虑光子, 单位面积辐射为  $\frac{1}{4} u c = \frac{\pi^2 k^4}{60 h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4$ . (斯-玻定律)

再根据  $u(\omega)$  求平均  $U$  (ii)  $U = V \times \int_0^{\infty} u(\omega) d\omega = \frac{hV}{2\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = 3PV$

再由  $A = U - TS = G - PV = \mu N - PV$ , 由  $\mu=0 \Rightarrow A = -PV = -\frac{1}{3} U$ .  $S = \frac{U - A}{T} = \frac{4U}{3T}$

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = 3S \quad (5 \propto T^3 V)$$

用此绝热方程 ( $\Delta S=0$ ) 为  $VT^3 = \text{const}$ , 再由  $P \propto T^4 \Rightarrow PV^{4/3} = \text{const}$  (Tip:  $C_p/C_V \neq 4/3$ , 别太贪)

$$\text{最后求 } \bar{N} = \frac{1}{\pi^2} \langle n \rangle = V \frac{8\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/kT} - 1} d\epsilon \Rightarrow \bar{N} = \frac{2.5(3)}{\pi^2 h^3 c^3} V (kT)^3 \propto VT^3$$

Tip:  $\sigma_V$  由  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^{-1}$  决定, 而上述,  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^{-1} = \text{const}$ .

## §4. 声场

与黑体辐射相同, 声场看作谐振子集合或声子气.

原因在于, 固体中原子在格点附近的微振动, 声场由一系列的正交模式.

(振动的频率  $\omega$ ,  $\omega = \omega(k)$ , 模式  $N$  个,  $3N$  个,  $3N$  个,  $3N$  个)

模式数与声子个数 (声子数  $N$ ) 相同, 一共是  $3N$  个. (3 个自由度, 两两一纵, 均为声子)

因此有一个差别, 电磁场的模式数无限大, 而晶体振动的模式数由格点数决定 (一般为有限数)

但在低温下, 声场近似以 1 级近似, 因此低温行为差异很大.

$$\text{声子内能为 } U(T) = \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \hbar \omega_i + \frac{\hbar \omega_i}{e^{\hbar \omega_i / kT} - 1} \right\} + \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{e^{\hbar \omega_i / kT} - 1} \quad \text{前半为零点能}$$

$$\text{由此可得 } C_V(T) = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \sum_i \frac{k(\hbar \omega_i / kT)^2 e^{\hbar \omega_i / kT}}{e^{\hbar \omega_i / kT} - 1} \quad \text{实际上已经是在求, 声子为 } \omega(\vec{k}) \text{ 的色散关系}$$

(i) Einstein 假设  $\omega_i = \omega_E$   $C_V(T) = 3N k E(x)$ , 其中  $x = \frac{\hbar \omega_E}{kT} = \frac{\omega_E}{T}$ ,  $E(x) = \frac{\pi^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$  为 Einstein 函数

(ii) Debye 假设,  $\omega \propto k$ . 且模式 = 全部,  $\omega = C_T k$ , 纵模  $\omega = C_L k$ , 并假设 = 若截止  $\omega_D$  - 改为  $\omega_D = \frac{\hbar \omega_D}{kT} = \frac{\omega_D}{T}$

$$\text{由此可得 } V g(\omega) d\omega = \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3 N} \times 2 d\omega \quad (纵模) \Rightarrow g_T(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 C_T^3}, \text{ 同理 } g_L(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 C_L^3}$$

$$\text{根据总模式数为 } 3N \Rightarrow \int_0^{\omega_D} g_T(\omega) + g_L(\omega) d\omega = 3N \Rightarrow \omega_D^3 = 18\pi^2 N \left( \frac{1}{C_T^3} + \frac{1}{C_L^3} \right)^{-1}, \quad g(\omega) = g_L(\omega) + g_T(\omega) = \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^2 \theta(\omega_D - \omega) \quad (\omega \gg \omega_D)$$

Tip: 任意函数 - 物理意义结果, 例如纵模截止频率不是一样 (纵模截止频率?)

$$\text{在 Debye 近似下, } C_V(T) = 3kN D(x_0), \quad x_0 = \frac{\omega_D}{T} = \frac{\hbar \omega_D}{kT}, \quad D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{x'^2 e^{x'}}{(e^{x'} - 1)^2} dx', \text{ 称为 Debye 函数}$$

$$\text{在 } T \gg \omega_D \text{ 时, } D(x_0) = 1 - \frac{x_0^2}{2} + \dots, \quad C_V(T) \rightarrow 3kN$$

$$\text{在 } T \ll \omega_D \text{ 时, } x_0 \gg 1, \quad D(x_0) \approx \frac{1}{x_0^3} \int_0^\infty \frac{x'^2 dx'}{e^{x'}} + O(e^{-x_0}) \Rightarrow C_V = kN \frac{12\pi^4}{15} \left( \frac{T}{\omega_D} \right)^3$$

Tip: 声子气, 声子气模型, 声子用于解释  $\omega_D$ ; 同时由  $n, C_L, C_T$  来计算, 声子气模型与实验相符

一般来讲, 考  $C_V$  服从  $T^3$  律, 所以只有声子气模型成立原因.

在液体中变化, 但由于无切应力, 因此无横振动, 仅有纵模振动.

② 声子并非全自旋, 声子有自旋, 所以, 声子与其他模式

对唯一在低温 (低  $T$ ) 下是成立的, 声子与热支配  $^4\text{He}$  ( $^3\text{He}$  中为  $T$  律) 中

$$\text{由 } \omega_D = (6\pi^2 n)^{1/3} c, \quad c \text{ 代入声速计算 } C_V = \frac{2\pi^2 k^4}{15 p h^3 c^3} T^3, \quad \text{与实验相符}$$

声子约与声子非常符合的规律

## §5. 声场的惯性密度

## α. 临界速度

对于非 S-R 情形, 计算出声子气体速度  $\vec{v}$  与漂移速度  $\vec{v}$  即得动量反量。

由此得一个约束,  $\vec{p} = \vec{p}$ 。对于个粒子数守恒的约束, 由此有

$$\langle n(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{\exp(\beta \epsilon(\vec{p}) + \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

由此计算出漂移速度, 将  $\vec{v}$  与  $\vec{v}$  取合起来。

以  $\vec{v}$  方向为 z 方向, 则  $v = \langle u \cos \theta \rangle$ ,  $u$  为单个声子的速度。

其次, 根据声子的对称性,  $\vec{r} \parallel \vec{v}$ , 因此  $\vec{r} \cdot \vec{p} = r p_z = r p \cos \theta$  ( $r$  与  $\vec{v}$  同向或反向取 + 或 -)

对于无相互作用声子,  $\vec{p}$  方向不同,  $\frac{d\epsilon}{dp} = c = u$ 。

这时需要选一个小块, 而非球壳,  $\sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle \times c \cos \theta / \sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle = v$

$$\Rightarrow v = \frac{\frac{V}{\hbar^3 (2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dp \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{p^2 \sin \theta}{e^{\beta p c + \vec{\gamma} p \cos \theta} - 1} \frac{c \cos \theta}{e^{\beta p c + \vec{\gamma} p \cos \theta} - 1}}{\frac{V}{\hbar^3 (2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dp \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{p^2 \sin \theta}{e^{\beta p c + \vec{\gamma} p \cos \theta} - 1}} = \frac{c \int_0^{+\infty} dp \int_0^\pi d\theta \frac{p^2 \sin \theta \cos \theta}{e^{\beta p c + \vec{\gamma} p \cos \theta} - 1}}{\int_0^{+\infty} dp \int_0^\pi d\theta \frac{p^2 \sin \theta}{e^{\beta p c + \vec{\gamma} p \cos \theta} - 1}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

$$\text{由此得到 } \vec{\gamma} = -\beta \vec{v}, \quad \langle n(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon(\vec{p}) - \vec{v} \cdot \vec{p})] - 1}$$

将上式与气体统计力学中的  $\vec{v}$  对, 相当于进行了伽利略变换, 依次可写为

$$\langle n(\vec{p}) \rangle = \frac{1}{\exp[\beta \epsilon(\vec{p})] - 1} = \frac{1}{\exp(\beta p c) - 1} = \frac{1}{\exp[\beta p c (1 - v \cos \theta / c)] - 1}$$

因此, 为了不出现指数  $< 0$ , 对  $v$  有限制即  $v < c$ , 即声子气体的临界速度  $(v_c)_{\text{phonon}} = c$

## β. 声子的能量, 动量。

由  $\vec{P} = \sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle \vec{p}$  来计算出动量, 实际计算时, 由于  $\vec{p}$  关于  $\theta$  对称, 因此  $P_x = P_y = 0$ 。

$$P = P_z = \frac{1}{\hbar^3 (2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dp \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{p^2 \sin \theta p \cos \theta}{e^{\beta p c (1 - v \cos \theta / c)} - 1} \Rightarrow P = \frac{16\pi^5}{45 \hbar^3 c^3} \frac{v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3} (kT)^4 V$$

$$\vec{E} = \sum_{\vec{p}} \langle n(\vec{p}) \rangle p c, \quad E = \frac{V}{\hbar^3 \times (2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dp \int_0^\pi d\theta \frac{2\pi p^2 \sin \theta p c}{e^{\beta p c (1 - v \cos \theta / c)} - 1} \Rightarrow E = \frac{4\pi^5}{15 \hbar^3 c^3} \frac{1 + \frac{1}{2}(v/c)^2}{(1 - v^2/c^2)^3} (kT)^4 V$$

$$\text{惯性反量系数 } \rho = \frac{P}{vV} = \frac{16\pi^5}{45 \hbar^3 c^3} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3} (kT)^4, \quad \text{在 } v/c \ll 1 \text{ 时, } (\rho_0)_{\text{phonon}} = \frac{16\pi^5 R^4}{45 \hbar^3 c^3} T^4 = \frac{4}{3c^2} E/V$$

在超流氦超流温度以下, 很靠近  $T=0$  时, 声子只占总能量的一小部分, 也占位的一小部分

因此靠近超流正常液体与超流氦, 声子的比例在  $T \rightarrow 0$  时,  $\frac{(\rho_0)_p}{\rho_{He}}$  ( $\rho_{He}$  为总密度) 确有  $T^4$  律。

$T \rightarrow 0$  时,  $\frac{(\rho_0)_{\text{phonon}}}{\rho_{He}} \approx 1.22 \times 10^{-4} T^4$ 。因此很直接地得出, 但要用另一途径反问来估计

(i) 第二声的速度 (ii) He II 超流的性质进行了估计。如右图

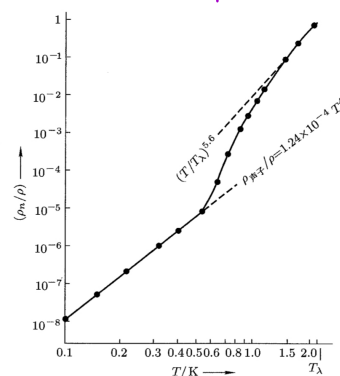


图 7.17 “正常”液体密度与液体总密度之比  $(\rho_n/\rho)$ , 由下列实验数据求得: (i) 第二声速; (ii) 液态 He II 的熵。[引自德克勒克, 赫德森和佩拉姆 (de Klerk, Hudson and Pellam, 1953) 的数据]



## §6. 液氦 II 中的元激发

Landau 提出了一个用于解释科下不太接近  $\lambda$  点时 He II 性质的理论

其中 He II 作为一种弱激发的量子系统, 对基态 ( $T=0K$ ) 的偏离, 用系统相对于

静背景的“元激发气体”来描述, 这种气体对应于正常流体, 静背景为超流体.

$\rho_{\text{super-fluid}}(T) = \rho_{\text{He}}(T) - \rho_n(T)$  ( $T=0$  时,  $\rho_n(T)=0$ , 全超流;  $T>T_\lambda$  时, 由 He II  $\rightarrow$  He I,  $\rho_s(T)=0$ , 全正常)

还有一点是元激发的能量关系 (用于讨论)

例如声子是线性的 (与声速有关), 因此在  $p$  较小时关系线性,

而在  $p$  较大时, 假设元激发看成 Bosons, 在  $T < T_\lambda$  附近无相互作用, 用统计力学方法得出,

$\alpha$ . 实验研究.

与声子谱的测定一致, 普通的元激发谱也利用冷中子散射来研究 (单过程占主导)

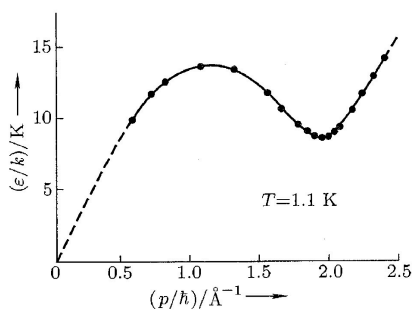


图 7.18 当温度为 1.1 K 时, 在液 He II 中的元激发能谱 (Yarnell et al., 1959)

从原点发出的虚线具有斜率  $(239 \pm 5) \text{ m/s}$ , 对应于该液体中的声速.

该图与 Landau 提出元激发能谱极相似

(i) 若用线性去拟合  $T \rightarrow 0$  时的  $E-p$  谱, 约得

$c = (239 \pm 5) \text{ m/s}$ , 与实验  $c = 238 \text{ m/s}$  很符合

(ii) 在  $p/h = (1.1 \pm 0.02) \text{ \AA}^{-1}$  处有极大值  $E/k = (13.92 \pm 0.10) \text{ K}$

(iii) 在  $p/h = (1.92 \pm 0.01) \text{ \AA}^{-1}$  处有极小值, 用 Landau 旋子谱 (roton)

$E(p) = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2\mu}$ ,  $\Delta/k = (8.65 \pm 0.04) \text{ K}$ ,  $\mu = (0.16 \pm 0.01) m_{\text{He}}$

(iv) 在超过  $p/h \approx 2.18 \text{ \AA}^{-1}$  后, 能谱再次以  $k$  成正比线性上升,

$\frac{2 \times 0.16 \times m \times kT}{(1.92 \times 10^0 h)^2}$

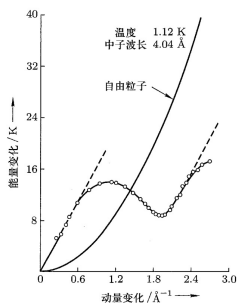


图 7.19 液 He II 在 1.12 K 时的元激发能谱 (Henshaw and Woods, 1961) 虚线有一个共同的斜率, 相应于液体中的声速, 即  $237 \text{ m/s}$ ; 从原点出发上升的抛物线表示自由氦原子的能谱,  $\epsilon(p) = p^2/2m$ .

更宽的  $p$  变化范围进一步验证了

$p \rightarrow 0$  时不线性;  $p/h$  在  $2.4 \text{ \AA}^{-1}$  处二阶导数为 0, 并最终以  $k$  达到

第二极大值 (与 Peavesski 拟合一致, 临界处为  $E_c = 2\Delta$ ,  $\frac{\partial E}{\partial p} = 0$ ).

## $\beta$ . He II 的热力学特性. (声子与旋子液体的热力学特性)

### ① 旋子气体热力学

在  $T \rightarrow 0$  时仅有低能激发, 即声子, He II 特性由 §4.5 中声子气的特性决定.

在  $T > 0.5 \text{ K}$  时, 旋子也会出现, 在  $0.5 \text{ K} < T < 1 \text{ K}$  时, 由声子旋子共同决定, 在  $T > 1 \text{ K}$  时主要由旋子决定

以下研究旋子对热力学性质贡献, 由于无简并度, 期望其也服从 BE 统计; 且由于  $N$  不大,  $\mu = 0$ .

roton 的能量为  $E(p) = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2\mu}$ , 占据数为  $\langle n(p) \rangle = \frac{1}{\exp[\beta E(p)] - 1} \approx e^{-\beta E(p)}$

在所有感兴趣的区域 ( $T \leq 2 \text{ K}$ , 即  $T_\lambda$ ) 下,  $\beta E > \frac{\Delta}{kT} \gg 1$  (至少 4 倍?)

$$\text{由 } Q(V, T) = \frac{PV}{kT} = -\sum_{\vec{p}} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon(\vec{p})}) \approx \sum_{\vec{p}} e^{-\beta \epsilon(\vec{p})} = N.$$

$$\text{由积分代替求和得到 } \frac{PV}{kT} = N = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{+\infty} p^2 e^{-\beta [\Delta + \frac{p^2}{2m}]} dp.$$

$$\text{做代换 } p = p_0 + \sqrt{2m kT} x, \text{ 并有 } \frac{2m kT}{p_0^2} \ll 1 \text{ (在 } 10^{-3} \text{)}, \text{ 并且 } \frac{\sqrt{2m kT}}{p_0} = \delta$$

$$\Rightarrow \frac{PV}{kT} = N = \frac{4\pi V p_0^2}{h^3} \sqrt{2m kT} e^{-\Delta/kT} \int_{-1/\delta}^{+\infty} (1 + \delta x)^2 e^{-x^2} dx$$

由于  $\delta$  很小, 积分限可取为  $-\infty$ , 积分中  $-1/\delta$  项可略为  $\infty$ , 因此近似有

$$\text{因此最终在 } k \text{ 上近似下有 } \frac{PV}{kT} = N = \frac{4\pi p_0^2}{h^3} \sqrt{2m\pi} (\sqrt{kT} e^{-\Delta/kT}) V, \quad p \propto T^{3/2} e^{-\Delta/kT}$$

$$A = U - TS = \mu N - PV = -PV = -N kT \propto V T^{3/2} e^{-\Delta/kT}$$

$$S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V = -A \left[ \frac{3}{2T} + \frac{\Delta}{kT^2} \right] = kN \left[ \frac{3}{2} + \frac{\Delta}{kT} \right], \quad U = A + TS = N \left[ \frac{1}{2} kT + \Delta \right]$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = kN \times \left[ \frac{3}{2} + \frac{\Delta}{kT} + \left(\frac{\Delta}{kT}\right)^2 \right]$$

②  $(\rho_0)_{\text{rot}(T)}$   
 按下求 粒子的惯性张量  $(\rho_0)_{\text{rot}(T)} = \frac{P}{vV} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \int n(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p}) \vec{p} \frac{d\vec{p}}{h^3}$  (矢向上有  $\vec{p}$  与  $\vec{v}$  同向).

这里  $v \rightarrow 0$  是为了使条件  $\epsilon(\vec{p}) - \vec{v} \cdot \vec{p} > 0$  恒成立. 在  $v$  较小时, 可对  $n(\epsilon - \vec{v} \cdot \vec{p})$  进行 Taylor Expansion. 由于所有  $\vec{v}$ , 故可

其中第一项  $n(\epsilon)$  给出在粒子静止  $\delta T \ll T_0$ , 恒为  $\infty$  (由于  $\int \vec{p} d\vec{p} = 0$ )

$$\text{第二项给出 } (\rho_0)_{\text{rot}(T)} = -\frac{1}{h^3} \int d\varphi d\theta dp \quad p^4 \sin\theta \frac{\partial n(\epsilon)}{\partial \epsilon} = -\frac{4\pi}{3h^3} \int_0^{+\infty} \frac{\partial n(\epsilon)}{\partial \epsilon} p^4 dp$$

Tip: 该结果对  $\vec{v} \cdot \vec{p} \ll \epsilon$  的任何能级与任何统计均成立.

$$\text{例如对 } \vec{p} \text{ 子, } \epsilon = pc. \quad (\rho_0)_{\text{photon}}(T) = -\frac{4\pi}{3h^3 c} \int_0^{+\infty} \frac{dn}{dp} p^4 dp = \frac{4}{3c^2} \int_0^{+\infty} pc n(p) \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{4E_0/V}{3c^2} \propto T^4 - \text{玻.}$$

$$\text{对玻子, 有 } n(\epsilon) = e^{-\beta \epsilon}, \quad \frac{\partial n}{\partial \epsilon} = -\beta n(\epsilon), \quad (\rho_0)_{\text{rot}(T)} = +\frac{4\pi \beta}{3h^3} \int_0^{+\infty} n(\epsilon) p^4 dp = \frac{\beta}{3} \frac{N}{V} \langle p^2 \rangle$$

$$\text{而 对于 } n(\epsilon(p)) \text{ 这种分布 } \langle p^2 \rangle \text{ 很好地接近于 } p_0^2 \text{ 即有 } (\rho_0)_{\text{rot}(T)} \approx \frac{\beta}{3} \frac{N}{V} p_0^2 = \frac{4\pi p_0^4}{3h^3} \sqrt{\frac{2\pi m}{k}} T^{-1/2} e^{-\Delta/kT}$$

因此在  $T < 0.3K$  时,  $\vec{p}$  子对  $\rho_n$  贡献大, 在  $T \approx 0.6K$  时, 二者差不多, 在  $T > 1K$  时, 玻子贡献大.

Tip: 可利用  $(\rho_0)_{\text{rot}(T)} = \rho_{\text{He}}(T)$  来近似确定临界温度, 得  $T_c \approx 2.5K$ , 实验  $T_n \approx 2.19K$ .

差异源于原子  $\text{rot}(T)$  相互作用, 在  $T$  较大时无相互作用假设由于1级发更多而不适用.

$$\text{Tip: } (\rho_0)_{\text{rot}(T)} \propto m^* \frac{N}{V} \text{ 类似于玻子有效质量 } m^* = \frac{p_0^2}{3kT}, \text{ 约为 } 10 \sim 15 m_{\text{He}}.$$

$$\text{因此 } \frac{p_0^2}{2m kT} \gg 1 \text{ 的条件也导致于 } m^* \gg m. \text{ 重要在于 } m^* \propto T^{-1}.$$

这导致由实验给出, 因此  $\langle p^2 \rangle$  不依赖于  $T$ , 因此, 需存在一种非平衡级发, 不同  $T$  处有一个下凸的  $\rho_{\text{rot}(T)}$  曲线.

### ③ 超流临界速度 $v_c$ .

$$\text{考虑一团非相对论超流体, 速度为 } \vec{v}, \text{ 反量为 } M, \quad \vec{P} = M\vec{v}, \quad E = \frac{1}{2} M v^2.$$

倘若这些量发生的某些变化, 例如产生一个元激发, 该元激发记为  $\epsilon = \epsilon(\vec{p})$ .

超流体变化了  $\delta E = \delta \vec{P} \cdot \vec{v}$ , 假设超流体与元激发形成一个整体, 那么有

$$\delta E = -\epsilon, \quad \delta \vec{P} = -\vec{p}, \quad \text{再由 } \delta E = \delta \vec{P} \cdot \vec{v} \Rightarrow \epsilon = \vec{p} \cdot \vec{v} \leq p v$$

这并不马上对  $v$  有下限要求, 根据  $\epsilon(p)$ , 可以证明  $\epsilon(p)$  存在最小值.

只有超过了  $\epsilon(p)$  的最小值, 逸热过程才可能发生, 也即可以通过产生激发来耗散能量.

倘若  $v < v_c = (\epsilon/p)_{\min}$ , 那么液体中无产生激发, 进而可以维持超流. 这称为超流的 Landau 判据.

(但事实上  $v_c$  与容差, 例如管道尺寸有大关系,  $r$  小,  $v_c$  大. 一般相互作用强和初始动量易于超流 (见 Cohen Duv))

Tip: 若对于普遍情况, 如  $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ , 那么  $(\epsilon/p)_{\min} = 0$ , 因此不存在超流.

这也是相互作用在超流中重要的原因, 因为气体不可能产生超流现象. 液氦 3, 但无特殊值不超流.

Tip: 对于  $^4\text{He}$   $v_c = 2.4 \times 10^4 \text{ cm/s}$ , 对于  $^3\text{He}$ ,  $v_c \approx 1/p \approx 6.3 \times 10^3 \text{ cm/s}$ , 均远大于  $v_c$ .

原因主要在于  $\text{He II}$  中有  $\epsilon(p) \propto p$  的无激发, 量子化涡环, 它的  $v_c$  与  $\lambda$  有关.

$v_c = \frac{h}{mr}$ , 其随几何尺寸的变化与  $v_c$  关系也一致. (参见 Cohen Duv)

代表在一个较宽的  $k$  下才产生超流 (见图).   $l_c = 1$ .