Chapter Ⅷ. 理想费米系统

§1. 理想费米气体的热力学性质

根据 Chapter Ⅵ 中计算得到的巨配分函数 $\mathcal{Q}(z,V,T)=\prod_{\varepsilon}(1+ze^{-\beta\varepsilon})$ (for fermions)

可以得到 $\frac{PV}{kT}=q=\ln\mathcal{Q}=\sum_{\varepsilon}\ln(1+ze^{-\beta\varepsilon})$

可以看到，相较 Bosons 下的 $1-ze^{-\beta\varepsilon}$，$z=e^{\alpha}=e^{\beta\mu}$ 不能 μ 取任何值

在费米气体中都不会出现在单个态上占据数→∞的情况.(理想气体)，因此有 $z\in(0,+\infty)$

若用积分代替求和，那么有，$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$，$f_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty\frac{x^{\nu-1}dx}{z^{-1}e^x+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n^\nu}$ 称为 F-D 函数

$$\boxed{\frac{P}{kT}=\frac{g}{\lambda^3}f_{5/2}(z)\quad,\quad\frac{N}{V}=\frac{g}{\lambda^3}f_{3/2}(z)}$$

，其中 g 为内部结构(如自旋)权重因子

可以根据 q 来计算得到其他的热力学函数.(以 z,V,T 为变量).

$-ze^{-z}+1-e^{-z}=\xi$

$U=-\left(\frac{\partial\ln\mathcal{Q}}{\partial\beta}\right)_{z,V}=\frac{3}{2}(\ln\mathcal{Q})/\beta=\frac{3}{2}PV=\frac{3}{2}kNT\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}$

同时 $C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,z}+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{V,T}\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_{V,N}=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,z}-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{V,T}\frac{(\partial N/\partial T)_{V,z}}{(\partial N/\partial z)_{V,T}}$

$U=\frac{3}{2}PV=\frac{3}{2}gV\frac{kT}{\lambda^3}f_{5/2}(z)$，$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,z}=\frac{5}{2T}U$，$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{V,T}=\frac{3}{2}gV\frac{kT}{\lambda^3}\frac{1}{z}f_{3/2}(z)$

$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{V,z}=\frac{3}{2T}N$，$\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)_{V,T}=\frac{N}{f_{3/2}(z)}\times\frac{1}{z}f_{1/2}(z)$，代入得 $C_V=kN\times\left[\frac{15}{4}\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}-\frac{9}{4}\frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}\right]$

$A=\mu N-PV=kNT\left[\ln z-\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}\right]$，$S=\frac{U-A}{T}=kN\left[\frac{5}{2}\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}-\ln z\right]$

为了由 $n=\frac{N}{V}$ 与 T 来确定费米气体的一些性质，需要将 z 用 n,T 表示 ($n=\frac{g}{\lambda^3}f_{3/2}(z)$)

虽然精确函数得不出解析表达式，以下研究一些极限情形

① 非简并，$n\lambda^3\ll1$ (高温稀薄).

此时 $f_{3/2}(z)=\frac{n\lambda^3}{g}\ll1$，即有 $z\ll1$，$f_\nu(z)\simeq z$.($\mu\to-\infty$，从占据数的角度也称为经典)

代入以上式子，如 $P=nkT$，$U=\frac{3}{2}NkT$，$A=kNT[\ln\frac{n\lambda^3}{g}-1]$，$S=kN[\frac{5}{2}-\ln\frac{n\lambda^3}{g}]$，$C_V=\frac{3}{2}kN$

均退化为经典理想气体的相应结果

② $n\lambda^3<1$ 可以将其看作小量.应用位力展开 ($\frac{n\lambda^3}{g}\sim f_{3/2}(z)\sim z<1$)

利用 $n=\frac{g}{\lambda^3}f_{3/2}(z)$，求得一个逆级数，进而代入 $\frac{P}{kT}=\frac{g}{\lambda^3}f_{5/2}(z)$ 来得到

$\frac{PV}{kNT}=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}a_l\left(\frac{\lambda^3}{gv}\right)^{l-1}$，$a_l$ 为位力系数. $v=\frac{1}{n}$ 与 Boson 相比不同在于其正负交替.

根据 $C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$. $U=\frac{3}{2}PV\Rightarrow C_V=\frac{3}{2}kN\frac{\partial\left(\frac{PV}{kN}\right)_{N,V}}{\partial T}=\frac{3}{2}kN\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{5-3l}{2}a_l\left(\frac{\lambda^3}{gv}\right)^{l-1}$

③ 若 $n\lambda^3\gtrsim1$ (导致位力展开不收敛)

此时需用数值计算.

④ $n\lambda^3\gg1$ (简并性) 与 $n\lambda^3=\infty$ (完全简并性)

先考虑完全简并，实际上一般在 $T=0$ 来达到 $n\lambda^3=\infty$. 并设 $\mu(T=0)=\mu_0$.

此时 $\langle n_\varepsilon\rangle = \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon<\mu_0) \\ 0 & (\varepsilon>\mu_0)\end{cases}$ $\quad \lim_{T\to0}\mu(T)=\mu_0$

再由 $N=\sum_{\varepsilon<\varepsilon_F}\langle n_\varepsilon\rangle = V\int_0^{\varepsilon_F} a(\varepsilon)d\varepsilon$ 来引入费米能 ε_F. $\Rightarrow N=\dfrac{4\pi gV}{3h^3}p_F^3$. $\quad \varepsilon_F=\left(\dfrac{6\pi^2 n}{g}\right)^{2/3}\dfrac{\hbar^2}{2m}$ (Non S-R)

基态能 $E_0=\dfrac{2\pi gV}{5mh^3}p_F^5$, $\dfrac{E_0}{N}=\bar\varepsilon=\dfrac{3}{5}\varepsilon_F$. 由此 $P=\dfrac{2}{3}\dfrac{U}{V}=\dfrac{2}{5}n\varepsilon_F \propto n^{5/3}$ $(T=0)$

在考虑热容,熵等推广时,有必要将考虑区间推广至 $T\neq0$. 那么虽然此时 $z\neq+\infty$,但也很大.

因此可以考虑用 $f_\nu(z)$ 的渐近展开式来近似. 将直接给出其趋向 $f_{5/2}$ $f_{3/2}$ $f_{1/2}$ 展开有

$f_{5/2}(z)=\dfrac{8}{15\pi^{1/2}}(\ln z)^{5/2}\left[1+\dfrac{5\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\cdots\right]$, $f_{3/2}(z)=\dfrac{4}{3\pi^{1/2}}(\ln z)^{3/2}\left[1+\dfrac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\cdots\right]$, $f_{1/2}(z)=\dfrac{2}{\pi^{1/2}}(\ln z)^{1/2}\left[1-\dfrac{\pi^2}{24}(\ln z)^{-2}+\cdots\right]$

$\Rightarrow \dfrac{N}{V}=\dfrac{4\pi g}{3}\left(\dfrac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(kT\ln z)^{3/2}\left[1+\dfrac{\pi^2}{8}(\ln z)^{-2}+\cdots\right]$, 零级近似下由 $kT\ln z=\mu \Rightarrow \lim_{T\to0}\mu=\lim_{z\to\infty}\mu=\varepsilon_F$.

$\dfrac{U}{N}=\dfrac{3}{2}kT\dfrac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}=\dfrac{3}{5}(kT\ln z)\left[1+\dfrac{\pi^2}{2}(\ln z)^{-2}+\cdots\right]$ 在一级近似下有 $\mu\approx\varepsilon_F\left[1-\dfrac{\pi^2}{12}\left(\dfrac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$, 则有 $\dfrac{U}{N}\approx\dfrac{3}{5}\varepsilon_F\left[1+\dfrac{5\pi^2}{12}\left(\dfrac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$

$P=\dfrac{2}{3}\dfrac{U}{V}=\dfrac{2}{5}n\varepsilon_F\left[1+\dfrac{5\pi^2}{12}\left(\dfrac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\cdots\right]$, $\quad \dfrac{C_V}{kN}=\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{kT}{\varepsilon_F}+\cdots$, 一阶线性为主要部分

$\dfrac{A}{N}=\mu-\dfrac{PV}{N}=\dfrac{3}{5}\varepsilon_F\left[1-\dfrac{5\pi^2}{12}\left(\dfrac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2+\cdots\right]$, $\quad \dfrac{S}{kN}=\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{kT}{\varepsilon_F}+\cdots$ ($T\to0$, $S\to0$, Nernst 定律)

§2. 理想费米子气的磁性质. (Att: 这里的是非定域粒子性质, 与原子中电子磁性质关系不大)

研究一个有外磁场 $\vec{B}$ 的无相互作用的费米子气体的平衡状态.

在 Chapter III §7.中曾研究类似问题. 但那时的粒子是全同且定域的(可分辨), 并考虑取向是否量子化以区分经典与量子, 并得到均为顺磁, 且在 $\beta\to0$ 时均有等温磁化率 $\propto\dfrac{1}{T}$ (居里定律). 及之磁饱和.

对 Fermi 气体, 尤其在低温下会有很不同的结果. 例如 $T=0$ 下不存在磁饱和. χ_T 与密度相关.

与 T 无关的微弱顺磁性称为 Pauli 顺磁性; 由于外场中轨道角动量量子化引起的抗磁性称为 Landau 抗磁性

a. Pauli 顺磁性.

当存在 $\vec{B}$ 时, $\mathcal{H}=\dfrac{p^2}{2m}-\vec{\mu}^*\cdot\vec{B}$. $\vec{\mu}^*$ 为粒子的内禀自旋磁矩.

不妨以简单, 取自旋 $\frac{1}{2}$, 那么仅有二能级(不同自旋)

$\varepsilon_+=\dfrac{p^2}{2m}-\mu^*B$, $\quad \varepsilon_-=\dfrac{p^2}{2m}+\mu^*B$ ($\pm$ 代表与 $\vec{B}$ 方向相同/反)

根据 $T=0$ 时, $\varepsilon<\varepsilon_F$ 的能级被填满. 再根据之前的积分公式有

$N_+=\dfrac{4\pi V}{3h^3}[2m(\varepsilon_F+\mu^*B)]^{3/2}$, $N_-=\dfrac{4\pi V}{3h^3}[2m(\varepsilon_F-\mu^*B)]^{3/2}$

即 Pauli 顺磁性.

$M=\mu^*(N_+-N_-)$, $\quad T=0$ 的弱场磁化率为 $\chi_0=\lim_{B\to0}\dfrac{M}{VB}=\dfrac{4\pi(\mu^*)^2(2m)^{3/2}\varepsilon_F^{1/2}}{h^3}$ (与T无关)

利用 $g=2$ 时, 在 $B\to0$ 时, $N=\dfrac{8\pi V}{3h^3}\times(2m)^{3/2}(\varepsilon_F)^{3/2} \Rightarrow \chi_0=\dfrac{3}{2}n(\mu^*)^2/\varepsilon_F$.

对比 3.9 节中 $g=2$ ($J=\frac{1}{2}$) 给出的高温结果 (量子情形) $\Rightarrow \chi_\infty=n(\mu^*)^2/kT$

$\Big\}\ \dfrac{\chi_0}{\chi_\infty}\sim\dfrac{kT}{\varepsilon_F}$.

实际上, 可求所有 T 均成立的 χ 表达式

对于某分布 $\{n_p^+\}\{n_p^-\}$, 其中各自可取 0,1 有 $E_n=\sum_p\dfrac{p^2}{2m}(n_p^++n_p^-)-\mu^*B(N^+-N^-)$, $N^\pm$ 为总数, 有 $N_++N_-=N$

$Q_N(\beta)=\sum{}' e^{-\beta E_n}$, 求和对所有 $\{n_p^+\}$ 与 $\{n_p^-\}$, 满足 $N_++N_-=N$ 的进行

求和可以分步进行，先固定 N^+（同时 N^-），得到

$$Q_N(\beta) = \sum_{N^+=0}^{N}\left[e^{\beta\mu^* B(2N^+-N)}\left(\sum_{\{n_p^+\}}'' \exp\left(-\beta\sum_p \frac{p^2}{2m} n_p^+\right)\right)\left(\sum_{\{n_p^-\}}'' \exp\left(-\beta\sum_p \frac{p^2}{2m} n_p^-\right)\right)\right]$$

，Σ'' 为对满足 $\sum n_p^\pm = N^\pm$ 的分布进行

引入 $Q_0(N)$ 表示无自旋，质量为 m 的 N 个粒子的理想 Fermi 气体配分函数，$Q_0(N) = e^{-\beta A_0(N)}$

$$\Rightarrow Q_N(\beta) = \sum_{N^+=0}^{N} e^{\beta\mu^* B(2N^+-N)} Q_0(N^+)\, Q_0(N-N^+)$$

对结果求对数，并用求和中最大项的对数替代求和的对数. 即 $\sum_{N^+} S(N^+)$，$\frac{\partial S}{\partial N^+}=0$.

$$\ln Q_N(\beta) = -\beta\mu^* B N + \ln\left[\sum_{N^+=0}^{N} e^{2\beta\mu^* B N^+} Q_0(N^+)\, Q_0(N-N^+)\right]$$

已经得到 $\bar N_+$ 与 $\bar N_-$

最大判据为 $2\mu^* B - \left(\frac{\partial A_0}{\partial N}\right)\Big|_{N=\bar N_+} + \left(\frac{\partial A_0}{\partial N}\right)_{N=\bar N_-} = 0$ or $\mu_0(\bar N_+) - \mu_0(\bar N_-) = 2\mu^* B$.（类平衡条件*）

引入无量纲参数 $r = \frac{\bar N_+ - \bar N_-}{N}$，恒量磁化强度，$r\in[0,1]$，平衡条件为 $\mu_0\Big|^{\frac{1+r}{2}N}_{\frac{1-r}{2}N} = 2\mu^* B$

在 $B=0$ 时，有 $r=0$，因此可以期望 B 较小时，r 也较小. 因此作 Taylor Expansion 并保留第一阶 $r \simeq \frac{2\mu^* B}{N(\partial_N\mu_0)_{N=\frac12 N}}$

最终有 $\chi = \frac{\mu^*(\bar N_+ - \bar N_-)}{BV} = \frac{\mu^* r N}{BV} = \frac{2(\mu^*)^2}{V(\partial_N\mu_0)_{N=\frac12 N}} = \frac{2(\mu^*)^2 n}{\partial_x \mu_0(xN)|_{x=1/2}}$，此为我们所有 T 下的弱场磁化率

因为无自旋的理想 Fermions Gas 的 μ_0 已在 §1 中研究得到.

(i) $T\to 0$. 此时取 $g=1$（无自旋）$\mu_0(N) = (\varepsilon_F)_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(6\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}$，$\frac{\partial\mu_0(xN)}{\partial x}\Big|_{x=1/2} = (6\pi^2 n)^{2/3}\frac{2^{1/3}\hbar^2}{3m} = \frac{2\times 2^{1/3}}{3}(\varepsilon_F)_0 = \frac{4}{3}\varepsilon_F$

代入得 $\chi_0 = \frac{3n(\mu^*)^2}{2\varepsilon_F}$，与 $T=0$ 时的分布直接得到结果一致.

(ii) $T\geq 0$ 此时 $\mu_0(N) = (\varepsilon_F)_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{(\varepsilon_F)_0}\right)^2\right]$，$\frac{\partial\mu_0(xN)}{\partial x}\Big|_{x=1/2} = \frac{4}{3}\varepsilon_F\left[1 + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2 2^{-4/3}\right]$

代入得 $\chi = \chi_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}2^{-4/3}\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2 + \cdots\right]$

(iii) $T\to\infty$ 此时取 $g=1$，$n\lambda^3 = f_{3/2}(z) \simeq z \Rightarrow \mu_0(N) = kT\ln\frac{N\lambda^3}{V}$，$\frac{\partial\mu_0(xN)}{\partial x}\Big|_{x=1/2} = 2kT$

代入得 $\chi_\infty = \frac{n(\mu^*)^2}{kT}$. 确实退化为高温弱场下非全同粒子的极限.

(iv) $T \gg 1$ 此时取 $f_{3/2}(z) = z - z^2/2^{3/2}$ 的一阶近似，$\Rightarrow \chi \simeq \chi_\infty\left(1 - \frac{n\lambda^3}{2^{5/2}}\right)$，修正以 $\propto T^{-3/2}$.

β. Landau 抗磁性.

源于垂直于 B 平面内轨道运动的量子化，$B\uparrow$ 时，系统的总能量上升，表现抗磁性.

例如取 B 沿 z 轴，那么在 z 方向上近似自由，在 (x,y) 平面上的能级发生量子化

$$E_j = \hbar\omega_c\left(j+\tfrac12\right) + \frac{p_z^2}{2m},\quad \omega_c = \frac{Bq}{m}$$

，对于全空间，每个能级的简并度均为无穷

在 $E_j \sim E_{j+1}$ 间的态数为（不考虑 z 自由度）$\frac{1}{(2\pi)^2/S}\times\frac{\hbar\omega_c}{\hbar^2 k}m\times(2\pi k) = \frac{m\omega_c}{2\pi\hbar}S$

即每个态上的能级数为 $\frac{Bq}{2\pi\hbar}S$，近似与 j 无关

以下推出计算巨配分函数. $\ln Q = \sum_\varepsilon \ln(1+ze^{-\beta\varepsilon})$

$$\Rightarrow \ln Q = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L_z\, dp_z}{h}}_{z\text{方向态密}}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\ln\left(1+ze^{-\beta[p_z^2/2m + \hbar\omega_c(j+\frac12)]}\right)\times\frac{Bq}{2\pi\hbar}S\right]$$

在高温下，$z\ll 1$，因此可以简化为 $\ln Q = \frac{BqVz}{h^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}dp_z\, e^{-\beta p_z^2/2m}\right)\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\hbar\omega_c(j+\frac12)}$

即 $\ln Q(z,V,T) = \frac{BqVz}{h^2}\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}\left[2\sinh\left(\frac{\beta Bq\hbar}{2m}\right)\right]^{-1}$

其中 $N=(z\frac{\partial}{\partial z}\ln Q)_{V,T}=\frac{zV}{\lambda^3}\frac{x}{\sinh x}$，$x=\frac{\beta B e\hbar}{2m}=\beta B\mu_B$，$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m}$ 为玻尔磁子

一般 $E=-\frac{\partial\ln Q}{\partial\beta}$，但由于此处仅有 xy 上能量，即 $\hbar\omega_c\times(j+\frac{1}{2})$ 与 势能相关，因此对 B 偏导

$$M=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\ln Q}{\partial B}\right)_{\beta,V,T}=\frac{zV}{\lambda^3}\mu_B\left[\frac{1}{\sinh x}-\frac{x\cosh x}{\sinh^2 x}\right]=-N\mu_B L(x),\quad L\text{ 为朗之万函数},\ L(x)=\coth x-\frac{1}{x}$$

可以看到这与朗之万顺磁性相似，但差了个负号。（$M=N_0\mu L(x)$，$x=\mu_B B$）

(i) $\mu_B B\ll kT$．此时有 $N\simeq\frac{zV}{\lambda^3}$，$M\simeq-\frac{NB(\mu_B)^2}{3kT}$，$\Rightarrow\chi_\infty=\frac{M}{VB}\simeq-\frac{n(\mu_B)^2}{3kT}$

合并 Pauli 顺磁性（or 即自旋量子）与 Landau 抗磁性

对电子有 $\chi_\infty=\frac{n(\mu_B^2-\frac{1}{3}\mu_B'^2)}{kT}$，$\mu_B'=\frac{e\hbar}{2m'}$，$m'$ 为有效质量

若在全部温度下，但仍假设 B 很弱，有 $\mu_B B\ll kT$．

此时级数中 z 非远小于 1，不可直接求，那么用 Euler 求和公式处理此式，近似一阶 $\sum_{j=0}^{\infty}f(j+\frac{1}{2})\simeq\int_0^\infty f(x)dx+\frac{1}{24}f'(0)$

$$\Rightarrow\ln Q=\frac{VeB}{h^2}\left[\int_0^\infty dx\int_{-\infty}^{+\infty}dp_z\ln\{1+z\exp[-\beta(2\mu_B Bx+p_z^2/2m)]\}-\frac{1}{12}\beta\mu_B B\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_z}{z^{-1}\exp[\beta p_z^2/2m]-1}\right]$$

第一部分与 B 无关（$x\to Bx$）．第二部分可化为 $-\frac{\pi V(2m)^{3/2}}{6h^3}(\mu_B B)^2\beta^{1/2}f_{1/2}(z)$

$$\chi=\frac{M}{VB}=\frac{1}{VB\beta}\left(\frac{\partial\ln Q}{\partial B}\right)_{z,V,T}=-\frac{(2\pi m)^{3/2}\mu_B^2}{3h^3\beta^{1/2}}f_{1/2}(z)$$，仍为抗磁性结果

(i) $z\ll1$　$f_{1/2}(z)\simeq z\simeq n\lambda^3$，那么退化为之前结果

(ii) $z\gg1$，引用 $f_{1/2}(z)\simeq\frac{2}{\sqrt\pi}\sqrt{\ln z}$ 的渐近表达式（例如 $T\to0$）$\Rightarrow\chi_0\simeq-\frac{1}{2}n\mu_B^2/\varepsilon_F$，恰为 Pauli 顺磁性的三分之一（若 $\mu_B=\mu^*$）

§3. 金属中的电子气

Drude → Sommerfeld → Bloch　（在 Sommerfeld 引入新统计后，才逐步完善

α. 热电子发射（Richardson effect）

可以将电子近似为一种由表面势所禁锢于金属内部的气体．

势垒可以等效为一个阶跃势，并近似为一个不随 T 变化的常数 W．

且在发射流不大时，可近似为金属内电子气处于准静态．

由此热发射问题类似于泻流问题，不过将 p_z 在 $(0,+\infty)$ 积分 $\to(\sqrt{2mW},+\infty)$ 上积分．

（当然，这不能保证逃出，会有一个有效的反射系数 r，真实为泻流的 $(1-r)$ 倍）

单位时间从单位表面逃出的电子数为 $R=\int_{\sqrt{2mW}}^{+\infty}dp_z\int_{-\infty}^{+\infty}dp_x\int_{-\infty}^{+\infty}dp_y\,\frac{2}{h^3}v_z f_\beta^{FD}(\frac{p^2}{2m}-\mu)$

先把对 p_x,p_y 积分积出来 $R=\frac{4\pi mkT}{h^3}\int_{\varepsilon_z=W}^{\infty}d\varepsilon_z\ln[1+e^{(\mu-\varepsilon_z)/kT}]$

对于实际可以感兴趣的 T，$\varepsilon_z-\mu>W-\mu\gg kT$．因此可简化为（$\varepsilon_z-\mu\sim\varepsilon_F\gg kT$，高度简并 Fermions Gas，$z=e^{\mu/kT}\gg1$）

$R=\frac{4\pi m(kT)^2}{h^3}e^{(\mu-W)/kT}$，热电流密度即为 $J=eR=\frac{4\pi me(kT)^2}{h^3}e^{(\mu-W)/kT}$

1° 对于经典情况，$T\gg T_F$（弱简并），有 $\overset{e^{\mu\beta}}{z}\simeq n\lambda^3/g$ $\Rightarrow J_{classical}=ne\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}\,T^{1/2}e^{-W/kT}$　仅有 $W\gg kT\gg\mu$ 时可能

2° 对于高度简并，$T\ll T_F$ 有 $\mu\simeq\varepsilon_F$，与 T 无关　$J_{FD}=\frac{4\pi me}{h^3}(kT)^2e^{(\varepsilon_F-W)/kT}$，也记 $\varphi=W-\varepsilon_F$ 为功函数

只之两个J均有指数型的主要依赖，但指数不同，一般画出 $\ln(J/T^2)$ 与 $\frac{1}{T}$ 的关系曲线。

对经典，功函数即为 W，而对 FD，功函数为 $W-\varepsilon_F$

(i) 由于 W 可以通过一些其他的实验来测得（例如电子束在金属上的折射率，$n=\left(\frac{E+W}{E}\right)^{1/2}$）

得到的结果很好地符合了费米气的一些结果。（例如对钨，$W=13.5eV$，$\varepsilon_F=9eV$，功函数约为 $4.5eV$，很准确，也说明 $\varphi\gg kT$ 是合理的）

(ii) 并且在绝对数量级上，FD结果也与实际接近

Extra：肖特基效应.

在 $10^6V/cm$ 水平，更大会出现场发射（即电场足够大以改变势垒）→镜像势

若在金属表面加一个促进电子逸出的电场，那么势垒变为 $\Delta(x)=W-eEx-\frac{e^2}{4x}$

最大值在 $x=\sqrt{e/4E}$ 处，即 $\Delta_{max}=W-e^{3/2}E^{1/2}$。由此，指数因子变为 $e^{(\varepsilon_F-W+e^{3/2}E^{1/2})/kT}$

可以借此测得无电场极值，也与实际值接近（实际上，这个经典与FD差别不大）

β. 光电发射（Hallwachs effect）

这时，存在额外能量来源，（肖特基中为外电场）这里是入射光子。

假设单色，频率为 ν，此时已积分从 $(W-h\nu,+\infty)$，假设单光子过程主导

此时 μ 可能会落在 $(W-h\nu,+\infty)$ 区间内，因此同样的近似无法用于 $\int_{W-h\nu}^{+\infty}\ln[1+e^{(\mu-\varepsilon)/kT}]\,d\varepsilon$

因此引入截止频率 $h\nu_0=W-\mu \overset{常温近似}{\simeq} W-\varepsilon_F=\varphi$，作替换 $x=(\varepsilon_z-W+h\nu)/kT$

$\Rightarrow R=\frac{4\pi m(kT)^2}{h^3}\int_0^\infty dx\ln\left[1+\exp\left\{\frac{h(\nu-\nu_0)}{kT}-x\right\}\right]$，$J=\frac{4\pi me(kT)^2}{h^3}\int_0^\infty dx\ln[1+e^{\delta-x}]$，$\delta=h(\nu-\nu_0)/kT$.

利用 $f_\nu(z)=\int_0^\infty\frac{x^{\nu+1}dx}{ze^x+1}$ $\Rightarrow J=\frac{4\pi me(kT)^2}{h^3}f_2(e^\delta)$

(i) $h(\nu-\nu_0)\gg kT$，即 $e^\delta\gg1$ 时，利用 f_2 的渐近展开有 $f_2(z)\simeq\frac{1}{2}(\ln z)^2$，代入得 $J=\frac{2\pi me(\nu-\nu_0)^2}{h}$，与 T 无关

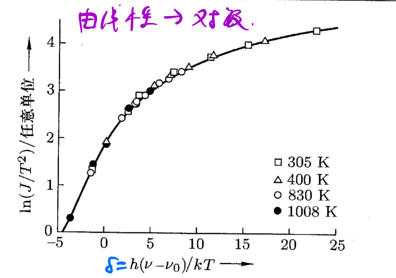
(ii) $h(\nu_0-\nu)\gg kT$ 即 $e^\delta\ll1$ 时，此时 $f_2(z)\simeq z$，代入得 $J=\frac{4\pi me(kT)^2}{h^3}e^{h(\nu-\nu_0)/kT}$

恰为 F.D 的热电子发射，附加单光子能量 $h\nu$。

在 $\nu=\nu_0$ 时，$f_2(1)=\frac{\pi^2}{12}$，代入得 $J_0=\frac{\pi^3mek^2}{3h^3}T^2$。与实验吻合较好

（$\ln(J/T^2)-\delta$ 关系图也称为福勒标绘图）→

由曲线性→对数.



§4. 超冷原子费米气体.

利用与 Bosons 相同的激光致冷与磁阱来约束，可以使费米气体温度降至 nK.

$a(\varepsilon)=\frac{\varepsilon^2}{2(\hbar\omega_0)^3}$（谐振子，各向异性的简并度，$\omega_0=\sqrt[3]{\omega_1\omega_2\omega_3}$）$\Rightarrow N(\mu,T)=\frac{1}{2(\hbar\omega)^3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^2d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$

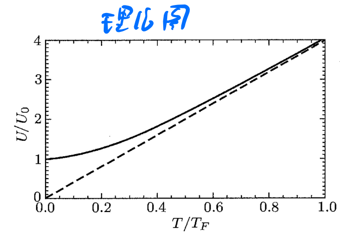
再由 $\int_0^{\varepsilon_F}a(\varepsilon)d\varepsilon=N\Rightarrow\varepsilon_F=(6N)^{1/3}\hbar\omega_0$，可以得到 ε_F 由 (μ,T) 的表达式

对 100Hz 的磁阱中约 10^6 个原子，$T_F\simeq870nK$，$U_0=\frac{3}{4}N\varepsilon_F$.

在 $T\neq0$ 时，理论值为 $U/U_0=4\left(\frac{T}{T_F}\right)^4 z f_4\left(\frac{1}{z}\right)$，$\mu(T)$ 可由 $3\left(\frac{T}{T_F}\right)^3f_3\left(\frac{1}{z}\right)=1$ 确定

右图画出 U/U_0 随 T/T_F 的变化。经典为 $U(T)=3NkT$

理论图



但实际上，在足够条件下，吸引相互作用将导致 BEC-BCS 交叉

§5. 白矮星的统计平衡性质

将白矮星近似为完全简并的相对论电子气；并且有压强与星体引力压相消。给出白矮星 R-M 关系

§6. 原子的统计模型.

将电子在核外分布看为电子云，各处有 $n(\vec{r})$. 并假设局域完全简并.

则电子各处的最高能为 $\epsilon_F(\vec{r}) - e\varphi(\vec{r}) = \text{const}$. ($\epsilon_F$ 由 n 决定). 保证稳态.

并且假设球对称，在边界处，$n(\vec{r})=0$. 因此若选取此处 $\varphi(\vec{r})=0$，则有 $\epsilon_F(\vec{r}) - e\varphi(\vec{r}) \equiv 0$

再用 $\nabla^2\varphi(\vec{r}) = e\,n(\vec{r})/\epsilon_0$ 联立得到 $\varphi(\vec{r})$ 微分方程

辅以 $r\to 0$ 时 $\varphi(\vec{r}) \to -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$，$r=r_0$ 处 $\varphi(\vec{r})=0$ （实际上可取 $r_0\to\infty$）

由此解得 $n(\vec{r})$，是近似，但为很好近似 且对大核，更为满足 电子波长 $\ll$ $n(\vec{r})$ 变化尺度.