Chapter XI: 量子化场方法

§1. 二次量子化的表述形式

$\Psi(\vec r)$ 与 $\Psi^\dagger(\vec r)$ 作用在 Hilbert Space 上，Hilbert Space 中的矢量代表量子化场的某一特定态

引入记号 $|\Psi_{NE}\rangle$，表示 $\hat N$ 与 $\hat{\mathcal H}$ 的共同本征态 $\hat N|\Psi_{NE}\rangle = N|\Psi_{NE}\rangle$，$\hat{\mathcal H}|\Psi_{NE}\rangle = E|\Psi_{NE}\rangle$.

并有 $\langle\Psi_{NE}|\Psi_{NE}\rangle = 1$，Def $|\Psi_{00}\rangle$ 为真空态，且认为其唯一，一般也用 $|0\rangle$ 表示

$$\boxed{\text{考虑 } |\vec r_1,\cdots,\vec r_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}\Psi^\dagger(\vec r_1)\cdots\Psi^\dagger(\vec r_N)|0\rangle\text{，定义 } \Psi_{NE}(\vec r_1,\cdots,\vec r_N) = \langle\vec r_1,\cdots,\vec r_N|\Psi_{NE}\rangle.}$$

Tip: $\langle\vec r_1\cdots\vec r_N|\Psi_{NE}\rangle$ 归一化的证明. ($\Leftrightarrow \int d\vec r_1\cdots d\vec r_N\, |\vec r_1,\cdots,\vec r_N\rangle\langle\vec r_1,\cdots,\vec r_N| = 1$)

$$\int\prod d\vec r_i\ \Psi_{NE}^*\Psi_{NE} = \int\prod d\vec r_i\ \langle\Psi_{NE}|\Psi^\dagger(\vec r_1)\cdots\Psi^\dagger(\vec r_N)\underbrace{|0\rangle\langle 0|}_{\substack{=1\text{，由于仅存在}\langle 0|\propto|0\rangle\text{才不为零}}}\Psi(\vec r_N)\cdots\Psi(\vec r_1)|\Psi_{NE}\rangle \times\frac{1}{N!}$$

$$= \int\prod d\vec r_i\ \langle\Psi_{NE}|\Psi^\dagger(\vec r_1)\cdots\Psi^\dagger(\vec r_N)\Psi(\vec r_N)\cdots\Psi(\vec r_1)|\Psi_{NE}\rangle\times\frac{1}{N!}$$

$$= \langle\Psi_{NE}|\Big(\int d\vec r_1\cdots d\vec r_{N-1}\ \Psi^\dagger(\vec r_1)\cdots\Psi^\dagger(\vec r_{N-1})\ \hat N\ \Psi(\vec r_{N-1})\cdots\Psi(\vec r_1)\Big)|\Psi_{NE}\rangle\times\frac{1}{N!}$$

根据 $[\Psi,\hat N] = \Psi \Rightarrow$ $= \langle\Psi_{NE}|\big(\int d\vec r_1\cdots d\vec r_{N-1}\ \Psi^\dagger(\vec r_1)\cdots\Psi^\dagger(\vec r_{N-1})\big(\Psi(\vec r_{N-1})\hat N - \Psi(\vec r_{N-1})\big)\Psi(\vec r_{N-2})\cdots\Psi(\vec r_1)|\Psi_{NE}\rangle\times\frac{1}{N!}$

$$= \langle\Psi_{NE}|\big(\int d\vec r_1\cdots d\vec r_{N-2}\ \Psi^\dagger(\vec r_1)\cdots\Psi^\dagger(\vec r_{N-2})\big[(\hat N)^2 - \hat N\big]\Psi(\vec r_{N-2})\cdots\Psi(\vec r_1)|\Psi_{NE}\rangle\times\frac{1}{N!}$$

以此类推. $\quad = N!\times\frac{1}{N!} = 1.$

Tip: $|u_1{:}n_1; u_2{:}n_2;\cdots\rangle$ 定义的合理性在于 $a_i^\dagger a_i = \hat N_i$，$[\hat N_i,\hat N_j]=0$，因此可同时对角化.

Tip: 在下一节中，大部分情形为 $a/\lambda\ll 1$ 与 $na^3\ll 1$ 的情况 (a 为两体相互作用散射长度，λ 为平均热波长，n 为数密度)

$a(\vec p) = \frac{m}{4\pi\hbar^2}\int u(\vec r)\, e^{i\vec p\cdot\vec r/\hbar}\, d^3r$，$\vec p$ 为两粒子相对动量.

对低能散射，$|\vec p|\ll 1$，有 $a \approx \frac{m\int u(\vec r)\,d\vec r}{4\pi\hbar^2}$ (在原书记中，也有以 $\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta(\vec r)$ 来代替等异势的)

在球对称时，也可用散射相移写出 $\tan\eta_0(k)\approx -\frac{mk}{4\pi\hbar^2}\int_0^\infty u(r)\left[\frac{\sin(kr)}{kr}\right]^2 4\pi r^2 dr$，$\cot\eta_0(k) = -\frac{1}{ka} + \frac12 k\overset{\text{射程}}{r_0} + \cdots$

注意 $a(\vec p)$ 的正负由 $u(\vec r)$ 排斥 or 吸引决定. 一般假定 $a>0$，即排斥.

§2. 非理想气体的低温行为

在基 $u_{\vec p} = \frac{1}{\sqrt V}e^{i\vec p\cdot\vec r}$ 下，(或者写成 $u_{\vec p} = \frac{1}{\sqrt V}e^{i\vec p\cdot\vec r/\hbar}$) 令二体相互作用的 Hamilton 可写为 (无自旋)

$$\mathcal H = \sum_{\vec p}\frac{p^2}{2m}a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p} + \frac12\overset{\text{代表对 }\vec p_1+\vec p_2=\vec p_1'+\vec p_2'\text{ 求和}}{\sum{}'} u_{\vec p_1\vec p_2}^{\vec p_1'\vec p_2'}\, a_{\vec p_1'}^\dagger a_{\vec p_2'}^\dagger a_{\vec p_2}a_{\vec p_1},\quad \langle\vec p_1'\vec p_2'|U|\vec p_1\vec p_2\rangle = \frac1V\int d\vec r\, e^{i\vec p\cdot\vec r/\hbar}u(\vec r)\quad(\vec p = \vec p_2-\vec p_2')$$

低温近似：粒子动量很小，因此 $\langle\vec p_1'\vec p_2'|U|\vec p_1\vec p_2\rangle = \frac1V\int d\vec r\, u(\vec r) = u_0$，另有低能散射，$u_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{mV}$

变动量表达 Hamilton: $\mathcal H = \sum_{\vec p}\frac{p^2}{2m}a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p} + \frac{2\pi a\hbar^2}{mV}\Big[\sum_{\vec p}a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}a_{\vec p} + \sum_{\vec p_1\neq\vec p_2}a_{\vec p_1}^\dagger a_{\vec p_2}^\dagger a_{\vec p_2}a_{\vec p_1} + a_{\vec p_2}^\dagger a_{\vec p_1}^\dagger a_{\vec p_2}a_{\vec p_1}\Big]$

又有 $\sum_{\vec p_1\neq\vec p_2}a_{\vec p_1}^\dagger a_{\vec p_2}^\dagger a_{\vec p_2}a_{\vec p_1} = \sum_{\vec p_1\neq\vec p_2}\hat n_1\hat n_2 = \sum_{\vec p_1}\hat n_1(\hat N-\hat n_1) = \hat N^2 - \sum_{\vec p}(\hat n_{\vec p})^2$，另一项同理，排斥.

$a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}a_{\vec p} = \hat n_{\vec p}\hat n_{\vec p} - \hat n_{\vec p}$，求和后为 $\sum_{\vec p}\hat n_{\vec p}^2 - \hat N$

代入后 $\mathcal H = \sum_{\vec p}\frac{p^2}{2m}\hat n_{\vec p} + \frac{2\pi a\hbar^2}{mV}\big[2\hat N^2 - \hat N - \sum_{\vec p}(\hat n_{\vec p})^2\big]$. 可以看到，自由粒子气体的 Fock State 均为本征态.

本征值 $E[\{n_{\vec p}\}]\approx\sum_{\vec p}\frac{p^2}{2m}n_{\vec p} + \frac{2\pi a\hbar^2}{mV}\big[2N^2 - n_{\vec p}^2\big]$ (且附上有 $\sum_{\vec p}n_{\vec p}^2 = O(N)$，在热力学极限下可略?)

基态对应有 $n_{\vec p}=\begin{cases} N & (\vec p=0) \\ 0 & (\vec p\neq 0)\end{cases}$ $\Rightarrow E_0=\frac{2\pi a\hbar^2 N^2}{mV}$, $P=-\left(\frac{\partial E_0}{\partial V}\right)_N=\frac{2\pi a\hbar^2N^2}{mV^2}=\frac{2\pi a\hbar^2 n^2}{m}$

$c^2=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)=\frac{1}{m}\frac{dP}{dn}=\frac{4\pi a\hbar^2 n}{m^2}$ （代入 ^4He 数据，可以看出 $c\simeq$ 一致）

$\mu_0=\left(\frac{\partial E_0}{\partial N}\right)_V=\frac{4\pi a\hbar^2 n}{m}$

当T有限但较低时，仍可用以上讨论. $Q_N(V,T)=\sum_{\{n_{\vec p}\}}' e^{-\beta\left[\sum_{\vec p}\frac{p^2}{2m}n_{\vec p}+\frac{2\pi a\hbar^2}{mV}(2N^2-n_0^2)\right]}$ ，$\sum'$代表为 $\sum_{\vec p} n_{\vec p}=N$ 求和

在最低阶近似下，可以 n_0/N 用理想气体结果替代 例如对比理想的Bosons，$\frac{n_0}{N}=1-\frac{\lambda_c^3}{\lambda^3}$ $\lambda_c=\left(\frac{\zeta(3/2)}{n}\right)^{1/3}$ or $1-\frac{v}{v_c}$, $v_c=\frac{\lambda^3}{\zeta(3/2)}$

$\Rightarrow \ln Q(N,V,T)=\ln Q_{ideal}(N,V,T)-\beta\frac{2\pi a\hbar^2N^2}{mV}\left(1+\frac{2v}{v_c}-\frac{v^2}{v_c^2}\right)$

由此有，平均自由能为 $\frac{1}{N}A(N,V,T)=\frac{1}{N}A_{id}(N,V,T)+\frac{2\pi a\hbar}{m}\left(\frac{1}{v}+\frac{2}{v_c}-\frac{v}{v_c^2}\right)$

$P=-\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T}=P_{id}+\frac{2\pi a\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{v^2}+\frac{1}{v_c^2}\right)$, $\mu=\frac{A}{N}+Pv=\mu_{id}+\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v_c}\right)$

与基态差异在于 基态 $\Leftrightarrow v_c/v\to+\infty$ or $n\lambda^3\gg 1$ （非简并条件）

在相变温度，即 $v=v_c$ 时，也有 $P_c=P_{id}+\frac{4\pi a\hbar^2}{m\lambda_c^6}\zeta^2(\frac{3}{2})=\frac{kT_c}{\lambda_c^3}\left[\zeta(\frac{5}{2})+2\zeta^2(\frac{3}{2})\frac{a}{\lambda_c}\right]$

$\mu_c=\mu_{id}+\frac{8\pi a\hbar^2}{m\lambda_c^3}\zeta(\frac{3}{2})=4\zeta(\frac{3}{2})kT_c\frac{a}{\lambda_c}$, $z_c=e^{\beta_c\mu_c}\simeq(1+4\zeta(\frac{3}{2}))\frac{a}{\lambda_c}$.

α. 相互作用在超冷原子 BEC 中的作用

在BEC下，可以利用 Gross-Pitaveskii Equation 描述 温度很低的相互作用.

外势假定为 $V(\vec r)=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2)$. 无相互作用基态为 $\psi(\vec r)=\frac{1}{\pi^{3/4}\sqrt{a_1a_2a_3}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{z^2}{a_3^2}\right)}$, $a_\alpha=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\alpha}}$.

在相互作用下，假设仅对单粒子基态修正 （修正参量为 $Na/(a_1a_2a_3)^{1/3}$，越大相互作用越明显）

此也有无相互作用基态展宽

利用粒子均处于基态的假设，利用Fock State 变分以使 自由能 F 极小.（只用以上无相互作用的试探函数）

$\Rightarrow$ GP 方程（不含时）：$\left\{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec r)\right]+(N-1)\int d\vec r'\,W_2(\vec r,\vec r')\,|\psi(\vec r')|^2\right\}\psi(\vec r)=\mu\psi(\vec r)$.

这是平均场近似的一种（利用Fock State 变分） 在 $N\gg1$ 时，可以 $N-1\simeq N$.

尤其对于温度很低时，相互作用可近似为接触势 $a\ll\lambda$ $W_2(\vec r,\vec r')=u_0\,\delta(\vec r-\vec r')=\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\delta(\vec r-\vec r')$

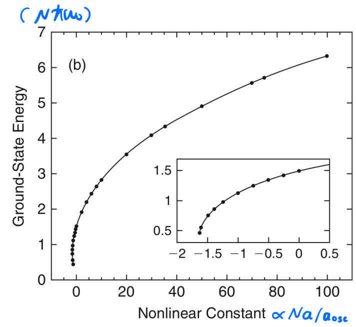
$\Rightarrow$ GP：$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec r)\right]\psi(\vec r)+Nu_0|\psi(\vec r)|^2\psi(\vec r)=\mu\psi(\vec r)$. 取 $\psi(\vec r)$ 为 $\int|\psi|^2=N$ 归一化 , $\Phi=\sqrt N\psi$

简化为 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec r)\right]\Phi(\vec r)+u_0|\Phi(\vec r)|^2\Phi(\vec r)=\mu\Phi(\vec r)$. （$u_0|\Phi(\vec r)|^2/V(\vec r)$）

1° $Na/a_{osc}\gg 1$ （$a_{osc}=(a_1a_2a_3)^{1/3}$）, $a>0$

对 $a>0$ 的斥力，波函数会胖一些. 此时可忽略动能项的 $\psi(\vec r)\simeq\sqrt{[\mu-V(\vec r)]/u_0}$ ，在 $V(\vec r)>\mu$ 时为零.

代入 $N=\frac{8\pi}{15}\left(\frac{2\mu}{m\omega_0^2}\right)^{3/2}\frac{\mu}{u_0}$ （?） $\Rightarrow$ $\mu=\frac{1}{2}\left(\frac{15Na}{a_{osc}}\right)^{2/5}\hbar\omega_0$.



$E=\frac{5}{7}\mu N$. 各方向尺度为 $R_\alpha=\left(\frac{15Na}{a_{osc}}\right)^{1/5}a_{osc}\frac{\omega_0}{\omega_\alpha}$. 我们在 $Na/a_{osc}\gg1$ 时，显著增大尺度.

也会使各向异性更强，下面的问题会讲更明显

2° $a<0$. （吸引）

此时，当 $|Na/a_{osc}|\ll 1$，原子在势阱与动能下处于亚稳态，（$-0.575\leq Na/a_{osc}<0$）也在近于稳定

在用 Feshbach 共振调控 a 的实验中，发现在 $N|a|/a_{osc}\approx 0.46$ 处很不稳定

§3. 非理想玻色气体的低能态

上一节中，基态玻色子低温下由相互作用带来的一阶修正得到了一个非零声速

这也意味着声子也将对于低温性质行为有重要影响。因此我们求元激发的谱 $\varepsilon(\vec p)$

并且由于低温，仅考虑 $\vec p\neq 0$ 上占据数 $\ll 1$ 的情形.

α. $\mathcal{H}$ 的近似形式

一阶近似下，仅取了 N^2 项，但在更进一步展开中，要保留 $N\times\sum_{\vec p\neq0} n_{\vec p}$ 项.

注意在 §2 中得到 $2N^2-n_0^2$，忽略了 N 与 $\sum_{\vec p\neq0} n_{\vec p}^2$（均为 $O(N)$）则第一部分为 $\frac{1}{2}\frac{u_0}{V}\times\left[N^2+2N\sum_{\vec p\neq0} a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}\right]$ $u_0=\int d^3r\, u(\vec r)$ 相互作用基态

并且注意到在 $\sum_{\vec p\neq0} u\cdots a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p'} a_{\vec p'}$ 中，还保留有两项 $(a_0, a_0^\dagger)$ 的项（在 V 上期望 ~ $\sqrt{n_0}$ ~ $\sqrt{N}$）

又由于动量守恒，含有三项动量相同的，除去在 $2N^2-n_0^2$ 中已包含的动量传递项，剩余的有

$$\sum_{\vec p\neq0} u(\vec p)\left[a_{\vec p}^\dagger a_{-\vec p}^\dagger a_0 a_0 + a_0^\dagger a_0^\dagger a_{\vec p} a_{-\vec p}\right] \approx \frac{u_0}{2V}N\sum_{\vec p\neq0}\left[a_{\vec p}^\dagger a_{-\vec p}^\dagger + a_{\vec p} a_{-\vec p}\right],$$

代入 $\mathcal{H}$，最终得到，在低温（占据 $n_{\vec p}\ll 1$）下的 $\mathcal{H}$ 在保留 $N\times\sum_{\vec p\neq0} n_{\vec p}$ 时为

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec p}\frac{p^2}{2m}a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p} + \frac{u_0}{2V}\left[N^2 + N\sum_{\vec p\neq0}\left(2a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p} + a_{\vec p}^\dagger a_{-\vec p}^\dagger + a_{\vec p}a_{-\vec p}\right)\right]$$

可以看到，简化为仅含单体项的 $\mathcal{H}$，这就利用 B 变换求本征值.

β. u_0 的更精确计算

对 $\mathcal{H}$ 中的 $\sum_{\vec p\neq0}$ 项，取 $u_0=\int d^3r\, u(\vec r)$ 已足够，但对 N^2 项，于一阶修正之上给出不可忽略量

根据微扰论，一阶修正为 $\langle 0|u(\vec r)|0\rangle=\frac{u_0}{V}$，二阶近似下有

$\sum_{\vec p\neq0}\frac{|\langle\vec p|u(\vec r)|0\rangle|^2}{E_0-E_{\vec p}}$，由于处理二粒子的二体散射，$E_{\vec p}=\frac{p^2}{m}$. 由此有

$$u = \frac{u_0}{V}+\frac{1}{V^2}\sum_{\vec p\neq0}\frac{\left|\int u(\vec r)e^{-i\vec p\cdot\vec r}d\vec r\right|^2}{-p^2/m}$$ 即有 $\frac{u_0}{V}\to\frac{u_0}{V}-\frac{u_0^2 m}{V^2}\sum_{\vec p\neq0}\frac{1}{p^2} = \frac{4\pi a\hbar^2}{mV}$ (???)

得到 $u_0=\frac{4\pi a\hbar^2}{m}\left(1+\frac{4\pi a\hbar^2}{V}\sum_{\vec p\neq0}\frac{1}{p^2}\right)$

γ. $\mathcal{H}$ 的本征值.

代入新的 u_0，且仅在 N^2 项里保留至二阶

$$\mathcal{H} = \frac{2\pi a\hbar^2}{m}\frac{N^2}{V}\left(1+\frac{4\pi a\hbar^2}{V}\sum_{\vec p\neq0}\frac{1}{p^2}\right)+\frac{2\pi a\hbar^2}{m}\frac{N}{V}\sum_{\vec p\neq0}\left(2a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}+a_{\vec p}^\dagger a_{-\vec p}^\dagger+a_{\vec p}a_{-\vec p}\right)+\sum_{\vec p\neq0}\frac{p^2}{2m}a_{\vec p}^\dagger a_{\vec p}$$

利用 Bogoliubov 变换，$b_{\vec p}=\left(a_{\vec p}+\alpha_{\vec p}a_{-\vec p}^\dagger\right)\left(1-\alpha_{\vec p}^2\right)^{-1/2}$，$b_{\vec p}^\dagger$ 共轭，$\alpha_{\vec p}=\frac{mV}{4\pi a\hbar^2 N}\left\{\frac{4\pi a\hbar^2 N}{mV}+\frac{p^2}{2m}-\varepsilon(\vec p)\right\}<1$.
（且 $b_{\vec p}, b_{\vec p}^\dagger$ 满足玻色对易）

$\varepsilon(\vec p)=\left[\frac{4\pi a\hbar^2 N}{mV}\frac{p^2}{m}+\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2\right]^{1/2}$，且对 a 有要求 $\Rightarrow$ $\mathcal{H}=E_0+\sum_{\vec p\neq0}\varepsilon(\vec p)b_{\vec p}^\dagger b_{\vec p}$

$$E_0=\frac{2\pi a\hbar^2N^2}{mV}+\frac{1}{2}\sum_{\vec p\neq0}\left\{\varepsilon(\vec p)-\frac{p^2}{2m}-\frac{4\pi a\hbar^2N}{mV}+\left(\frac{4\pi a\hbar^2N}{mV}\right)^2\frac{m}{p^2}\right\}.$$

$b_{\vec p}$ 与 $b_{\vec p}^\dagger$ 是"准粒子"（元激发）的湮灭与产生算符，在 $p\to0$ 时，色散线性，这是声子特征.

弱的相互作用基态 $|\Phi_0\rangle$ 定义为 $\forall\vec p\neq0$ $b_{\vec p}|\Phi_0\rangle=0$ 的态，基态能量为 E_0

若引入 $x=p\left(\frac{V}{8\pi a\hbar^2N}\right)^{1/2}$ 的无量纲常量，就将求和转为积分

$$E_0=\frac{2\pi a\hbar^2N^2}{mV}\left[1+\left(\frac{128Na^3}{\pi V}\right)^{1/2}\int_0^\infty dx\left[x^2\left(x\sqrt{x^2+2}-x^2-1+\frac{1}{2x^2}\right)\right]\right]$$ (积分是收敛!!)

$\Rightarrow \frac{E_0}{N}=\frac{2\pi a\hbar^2 n}{m}\left[1+\frac{128}{15\pi^{1/2}}(na^3)^{1/2}\right]$，其中$n$为数密度，该式为$\frac{E_0}{N}$以$\sqrt{na^3}$展开的头两项（条件为 $na^3\ll 1$）

Tip: 更进一步研究会找下一项 $\propto (na^3)\ln(12\pi na^3)$，代表了无法用幂级数展开。

§. 基态的一些性质

在孤立状态下 ($dS, dN=0$) $P_0=-\left(\frac{\partial E_0}{\partial V}\right)_N=n^2\frac{\partial(E_0/N)}{\partial n}=\frac{2\pi a\hbar^2n^2}{m}\left[1+\frac{64}{5\pi^{1/2}}(na^3)^{1/2}\right]$ (与§2中基态相比多一项)

$c=\frac{1}{m}\frac{dP_0}{dn}=\frac{4\pi a\hbar^2 n}{m^2}\left[1+\frac{16}{\pi^{1/2}}(na^3)^{1/2}\right]$ (第二项给出了对c的修正，例如^4He中约为4.39，但实际上^4He不符合条件)

基态完全不存在元激发，但 $a_p^\dagger a_p$ 并不为零。

利用逆变换 $a_p=(b_p-\alpha_p b_{-p}^\dagger)(1-\alpha_p^2)^{-1/2}$，与 $a_p^\dagger$ 可得

$\langle\Phi_0|a_p^\dagger a_p|\Phi_0\rangle=\frac{\alpha_p^2}{1-\alpha_p^2}=\bar n_p=\frac{x^2+1}{2x\sqrt{x^2+2}}-\frac12$ ($\bar n_p$ 代表相互作用基态下粒子数)

这里利用获得无法正确计入以某些态，因此了正确计到激发态

而激发态粒子总数为 $\sum_{p\neq0}\bar n_p=N\times\left[\frac{32}{\pi}(na^3)\right]^{1/2}\int_0^\infty dx\left[x^2\left(\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+2}}-1\right)\right]=N\times\frac{8}{3\pi^{1/2}}(na^3)^{1/2}$

仅占比 N 小一个 $(na^3)^{1/2}$ 因子的量级，是 N 的很小一部分。

$\bar n_0=N-\sum_{p\neq0}n_p=N\left[1-\frac{8}{3\pi^{1/2}}(na^3)^{1/2}\right]$

Tip: 以上结果由 Lee, Huang, Yang 三人利用赝势法首先求得。$\bar n_p$ 对研究相互作用基态很重要

§4. 玻色液体的能谱

在§3中已得，对低密度的弱相互作用低温玻色体系有元激发能谱为

$\varepsilon(p)=\left[p^2u^2+(p^2/2m)^2\right]^{1/2}$, $u=(4\pi an)^{1/2}(\hbar/m)$. (由 Bogoliubov 首先推得，见 Chen Dxu)

原点处切线斜率.

1° 在 $p\ll mu$ or $p\ll\hbar(an)^{1/2}$ 时，能谱近似为线性的 $\varepsilon\simeq up$，$u(=\frac{\partial\varepsilon}{\partial p})$ 给出了声速在 $p\to0$ 时的极限值.

2° 在 $p\to\infty$ 时，近似有 $\varepsilon\simeq p^2/2m+mu^2$，与经典一致.

但注意，这与^4He中的能谱有明显不同，这个简单例子，而^4He能谱有旋子谷。(原因在于 a^3n 约0.2，非$\ll1$的稀薄气体)

Feynmann 后来解决了^4He中元激发问题，从而一般原理得到了以下结果

Feynmann: (i) 玻色液体会发生类同理想玻色气体在动量空间凝聚的相变，尽管存在相互作用.

(ii) 在 $T\ll1$ 时，液体唯一可能激发态与纵波相关，即声子。保持液体密度不变的长程运动不会构成激发态，它们与基态差别仅在于原子互换.

也可能出现原子尺度上的运动，但有能隙 Δ，因此仅在 $T\sim\Delta/k$ 下出现，例如旋子

(iii) 当存在一种激发时，液体波函数形如

$\Phi=\Phi_0\sum_i^N f(\vec r_i)$，$\Phi_0$为基态波函数 ($\Phi$是它对称的).

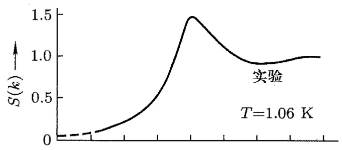
$f(\vec r)$ 的具体特性由变分原理确定.

液体结构因子 ; 对关联函数

$f(\vec r)$的最优选择为 $f(\vec r)=e^{i\vec k\cdot\vec r}$，对应能量为 $\varepsilon(\vec k)=\frac{\hbar^2k^2}{2mS(\vec k)}$，$S(\vec k)=1+n\int(g(\vec r)-1)e^{i\vec k\cdot\vec r}d\vec r$. (略去了 $\delta_{k,0}$ 部分)

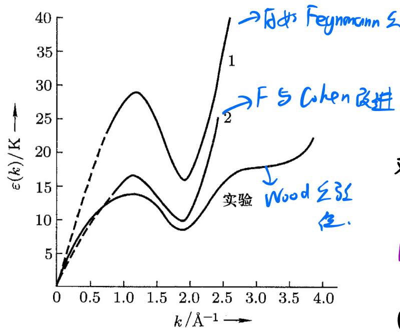
由此得 $\Psi=\Psi_0\sum_i e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}$，与 Ψ 联系的动量为 $\hbar\vec{k}$，$p\Psi=\left(\sum_i -i\hbar\nabla_i\right)\Psi_0\sum_i e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}=\hbar\vec{k}\,\Psi$.

若将 $\hbar\vec{k}$ 认为与激发相联系的动量 $\vec{p}$，则 $\varepsilon(\vec{p})=\frac{p^2}{2mS(\vec{p}/\hbar)}$，于是利用 $g(\vec{r})$ 即可获得 $\varepsilon(\vec{p})$



如左图，$S(k)$ 在 $k\ll1$ 时随 $\hbar k/2mc$ 线性增加。在 $k\approx2\pi/r_0$ 最大（对应 $g(\vec{r})$ 在 r_0 处最大）

对 ^4He，$r_0\sim3.6Å$。再之后减小，并伴随振荡（对应 $g(r)$ 的振荡）



在 $dS/dk=2S/k$ 时达到极大.

因此相应有 $\varepsilon(k)$ 在 $k\ll1$ 时 $\propto c$ 线性上升。在 $k\sim2Å^{-1}$ 处有一个凹陷（^4He）

对应了 $S(k)$ 的极大，最后趋于 $\hbar^2k^2/2m$

Feynman 将声子与旋子归入一套元激发，且均由液体结构 $S(k)$ 决定

（这里无旋转，因此旋子名字不当？）

§5. 具有量子化环流的状态

§4 中找到的激发形式，指出不改变体系的均匀运动在 $T\to0$ 时不构成激发态

但在 T 非零时，可能存在一些整体的均匀运动，也可作为元激发

Thm. Feynman 环流定理：设在超流体中的连通区域中 $\oint\vec{v}_s\cdot d\vec{l}=n\frac{h}{m}$ $(n\in\mathbb{Z})$

考虑一个静止的超流体，基态为 $\Psi_0(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N)$。若存在运动 $\vec{v}_s$，那么根据伽利略变换

$\Psi=e^{i\vec{P}\cdot\vec{R}/\hbar}\Psi_0$，$\vec{R}(t)=\sum_i\vec{r}_i(t)/N$，$\vec{P}=Nm\vec{v}_s$，$\Psi=\Psi_0\,e^{im(\vec{v}_s\cdot\sum_i\vec{r}_i)/\hbar}$

在各粒子严格以 $\vec{v}_s$ 运动时，Ψ 严格。但若粒子有小位移，近似不改变 $\vec{v}_s$，那么也近似成立

$\Delta\phi=\frac{m}{\hbar}\sum_i(\vec{v}_{si}\cdot\Delta\vec{r}_i)$。在粒子在一个环上旋转相邻原子位置后，波函数不变，相位差为 $2\pi n$

$\Delta\vec{r}_i$ 构成了一个回路，由此有 $\frac{m}{\hbar}\oint\vec{v}_s\cdot d\vec{l}=n\times2\pi$ or $\oint\vec{v}_s\cdot d\vec{l}=n\times\frac{h}{m}$ $(\vec{v}_s=\vec{v}_s(\vec{r}))$

Tip: 其中 $\frac{h}{m}$ 为环流量子。与 Bohr 量子化条件 $\oint p\,dq=nh$ 很像，但前者用于宏观，后者用于微观

据 Stokes 公式 $\oint_c\vec{v}_s\cdot d\vec{l}=\int_S(\nabla\times\vec{v}_s)\cdot d\vec{a}=n\frac{h}{m}$，也可理解为涡度通量量子化

而对于 S 为单连通区域时，S 可连续缩至零，若 $\vec{v}_s$ 连续，那么左侧连续 $\to0$；但右侧无法连续变化

因此，在速度场处处连续的单连通区域中，$\nabla\times\vec{v}_s=0$（这是朗道假设的条件）

Tip: 超流与超导有很强相似性。

超流	超导
环流量子 $\frac{h}{m}$	磁通量子 $\frac{h}{2e}$
机械动量 $m\vec{v}_s$	Cooper pair 电磁动量 $2e\vec{A}$
朗道条件 $\nabla\times\vec{v}_s=0$	迈斯纳效应（一部分） $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}=0$

但若速度场不连续（有奇点）那么可形成围绕奇点的流动.

例如有柱对称性的涡流. $v_\rho=0$, $v_\phi=\frac{K}{2\pi\rho}$, $v_z=0$. $\rho=0$为速度场奇点. $\oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{l} = \underline{K}$ (Γ包含 $\rho=0$处) 因此K量子化

从 $\rho=a$ 到 $\rho=b$ 这一段内, z方向上单位长度涡旋的能量为

$\frac{E}{L} = \int_a^b \frac{1}{2}[(2\pi\rho)d\rho \times m n_0] \times \left(\frac{K}{2\pi\rho}\right)^2 = \frac{m n_0 K^2}{4\pi}\ln(b/a)$, b为容器大小, a为原子间距(一般与涡旋核结构相关)

对量子力学相干. 一般以一个自旋波函数 $\Psi(\vec{r})$ 描述涡旋. $\Psi(\vec{r})=(n^*)^{1/2} e^{is\phi} f_s(\rho)$

$n(\vec{r})=|\Psi(\vec{r})|^2 = n^* f_s^2(\rho)$. 若取 $\rho\to\infty$, $f_s(\rho)\to 1$, 则 n^* 为涡旋远处中的粒子数密度.

$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2im|\Psi|^2}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) = \frac{\hbar}{m}\nabla(s\phi) = (0, s\frac{\hbar}{m\rho}, 0)$.

对比 $v_\phi = \frac{K}{2\pi\rho} \Rightarrow K=\frac{sh}{m}$, 而K量子化, 因此有 $s\in\mathbb{Z}$ (且对于有涡旋情形, 仅需考虑 $s\in\mathbb{Z}^*$)

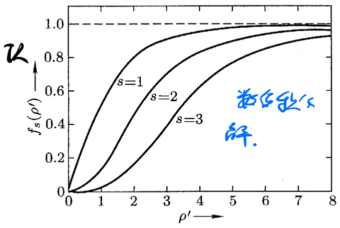
引入利用修正T, 用a表示相互作用的GP方程确定 $f_s(\rho)$ $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + u_0|\Psi|^2\right]\Psi = \varepsilon\Psi$, $u_0=\frac{4\pi a\hbar^2}{m}$

在 $\rho\to\infty$时有 $n(\vec{r})\to n^*$ 因此对任一 $f_s(\rho)$ 均有 在$\rho\to\infty$时, $(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\to 0)$ $u_0 n^*=\varepsilon$, $\varepsilon = 4\pi a\hbar^2 n^*/m$

将ε与ψ表达式代入方程, 得到 $\frac{d^2f_s}{d\rho'^2}+\frac{1}{\rho'}\frac{df_s}{d\rho'}+\left(1-\frac{s^2}{\rho'^2}\right)f_s - f_s^3=0$, $\rho'=(8\pi a n^*)^{-1/2}\rho = l\rho$.

1° $\rho\to 0$. v很大, 会有很大离心力, 会导致 $n\to 0$. 因此 $\rho\to 0$时 f_s 应趋于零, 由此忽略三次项

那么方程近似为 Bessel 方程 $f_s(\rho')\sim J_s(\rho')\sim(\rho')^s$



数值解.

2° $\rho\to\infty$ 此时有 $f_s\simeq 1$, 由此可略去二阶导项, f_s几乎不变化 $f_s(\rho)\simeq 1-\frac{s^2}{2\rho'^2}$

由此, 在非理想(a)玻色气体(修正临界) 下, 可以存在量子化涡旋,

即涡旋大小

且由于 $n(\vec{r})$随$\rho\to 0$而趋于零, 因此速度奇异性不会有害影响; $l=(8\pi a n^*)^{-1/2}$ 为 n 的变化长度, 对 ^4He, $l\sim 1Å$

在 $s=1,2,3$ 时, 利用已知 $f_s(\rho)$ 可求得单位长度 $E_{quantum}/L \sim \frac{n^*h^2}{4\pi m}\ln\left(\frac{R}{l}\right)$, R为区域外径. 不会有奇异性

半经典结果为 $\frac{n^*h^2}{4\pi m}\{\ln(R/a), 4\ln(R/a), 9\ln(R/a)\}$ (K以sh/m, b以R替代, 有奇异性)

Tip: 从上面看到, 1个s涡旋的能量大于s个1涡旋能量, 因此相对不稳定.

但之后也可以见出现.

引由实验证明 ^4He 超流中量子化涡旋的存在, 实验也观测到了s=3涡旋.

§6. 量子化涡环和超流动性破缺.

Feynman 通过考虑直径为D的管中流出 He II, 得到产生量子涡旋的临界速度

$v_0 = \frac{\hbar}{mD}\ln(D/l)$. 其中 l 为 $(8\pi a n^*)^{-1/2}\sim 1Å$

这样得到 $v_0\sim 1m/s$ ($D\sim 10^{-7}m$). 但实验值约为 $0.1m/s$. 还差一个量级.

不过这里考虑产生一股子得到的过高 v_0, 且也解释 v_0随管径的变化

§5.中讨论了柱对称的线性涡旋. 但一般涡线可以弯曲, 若不终止于壁或液体自由表面

那么涡线形成一条闭合曲线: 涡环. 量子化条件也成立.

涡旋 $n=0$ 的核心

一般环半径 $r \gg$ 涡核尺寸 l. 涡环各环元产生 $\vec{v}$ 叠加形成场中流速

涡环将有垂直于环面的速度！ $v \sim \frac{s\hbar}{2mr}$，$s$ 为涡旋级数.（由此可有 $\varepsilon(\vec{p})$ 关系）

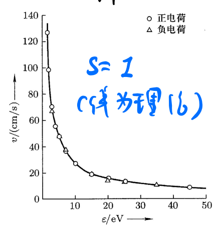
假设一对线性涡旋相距 $2r$，它们均有 $K=\frac{sh}{m}$，则各自在对方处速度为 $\frac{sh}{m\times 2\pi\times 2r}=\frac{s\hbar}{2mr}$

但若绕成一个涡环，实际上与 l_0 线性涡旋较一些.但仍为同一数量级

在 $r\gg l$ 时，引用线性涡旋估算能量. $\varepsilon \sim 2\pi^2\hbar^2 n_0 s^2 m^{-1} r\ln(\frac{r}{l})$

由于 $r\gg l$. $\frac{d}{dr}(r\ln\frac{r}{l})=\ln\frac{r}{l}+1\sim\ln\frac{r}{l}$，因此可近似将 $\ln\frac{r}{l}$ 看为常数，ε 对 r 依赖由 r 贡献'

此时有 $v\propto\varepsilon^{-1}$，涡环能量越大运动越慢（$M\propto r^3$. $v\propto r^{-1}$，$\varepsilon\propto Mv^2\propto r$）



$s=1$（纯理论）

如左图.在实验中真的观测到量化涡环.涡环环流 $\sim(1.00\pm0.003)\times10^{-3}\ cm^2/s$

$s\ h/m=0.997\times10^{-3}cm^2/s$ 很接近，且似乎有一个 ~ 1.2 Å 的涡核.

根据朗道判据 $v_c=(\varepsilon/p)_{min}$. 涡环的经典动量为 $p=2\pi^2\hbar n_0 r^2$

（我根据 $v=\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}=\frac{d\varepsilon}{dr}(\frac{dp}{dr})^{-1}$，在一阶近似下为 $\frac{\varepsilon}{2p}$；且有 $\varepsilon\overset{(\varepsilon\delta)}{\propto}p^{1/2}$，这时与常见环形能量相符）

代入 ε 与 p 的 $v_c\sim[\frac{\hbar s}{mr}\ln(r/l)]_{min}$，在 r 取 $r_{max}=R$ 时有 $v_c\sim\frac{\hbar s}{mR}\ln(R/l)$

5 Fernman 估计一段，这里用 R 为 $3D$.实际比实验值大一个数量级.但有较好的比量关系.

Tip：在 $r\sim R$ 时，"镜像涡旋"效应不可忽略，流动能量下降约 $\frac{1}{10}$（也因为边界效应

$v_c\simeq 0.46\frac{\hbar}{mR}$（$s=1$）（解析近似），实际求解方程 $\Rightarrow v_c\simeq 0.59\frac{\hbar}{mR}$（不仅考虑壁，也考虑镜像涡旋边界）

（$\sim 7cm/s$，偏了）　　（$\sim 9cm/s$，比 13 多 cm/s 还小一些）

§7. 非理想费米气体的低能态.

这时的空间应为轨道⊗自旋，因此基也要换为 $|\vec{p},\sigma\rangle$. $\sigma=\pm\frac{1}{2}$

由于 $\mathcal{H}$ 中的 $\mathcal{H}_0$，W_{int} 均与自旋无关，因此在动量分校上再加一自旋分量.

$$\mathcal{H}=\sum_{\vec{p},\sigma}\frac{p^2}{2m}a^\dagger_{\vec{p},\sigma}a_{\vec{p},\sigma}+\frac{1}{2}\sum{}'U^{\vec{p}_1',\sigma_1';\vec{p}_2',\sigma_2'}_{\vec{p}_1,\sigma_1;\vec{p}_2,\sigma_2}a^\dagger_{\vec{p}_1',\sigma_1'}a^\dagger_{\vec{p}_2',\sigma_2'}a_{\vec{p}_2,\sigma_2}a_{\vec{p}_1,\sigma_1}$$

其中 $\sum'$ 代表对 $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'$，$\sigma_1+\sigma_2=\sigma_1'+\sigma_2'$ 项求和. $U^{\vec{p}_1',\sigma_1';\vec{p}_2',\sigma_2'}_{\vec{p}_1,\sigma_1;\vec{p}_2,\sigma_2}=\langle\vec{p}_1',\sigma_1';\vec{p}_2',\sigma_2'|U(1,2)|\vec{p}_1,\sigma_1;\vec{p}_2,\sigma_2\rangle$

矩阵元 U 与两体相互作用散射长度 a 相关.在低能情形下，可近似以

$U^{0,\sigma_1';0,\sigma_2'}_{0,\sigma_1;0,\sigma_2}$ 替代 $U^{\vec{p}_1',\sigma_1';\vec{p}_2',\sigma_2'}_{\vec{p}_1,\sigma_1;\vec{p}_2,\sigma_2}$

求和中，若 $\sigma_1=\sigma_2$（$=\sigma_1'=\sigma_2'$）那么由于反对称，求和中 $a^\dagger_{\vec{p}_1'\sigma}a^\dagger_{\vec{p}_2'\sigma}a_{\vec{p}_2\sigma}a_{\vec{p}_1\sigma}+a^\dagger_{\vec{p}_2'\sigma}a^\dagger_{\vec{p}_1'\sigma}a_{\vec{p}_2\sigma}a_{\vec{p}_1\sigma}=0$

因此这一部分的求和为零，仅有 $\sigma_1\neq\sigma_2$（$\Rightarrow\sigma_1'\neq\sigma_2'$）的贡献，即共 4 种可能.另于看 $\sigma_1=\sigma_1'$ 这两种是彼此相同，同理 $\sigma_1=\sigma_2'$（U 满足 $U(1,2)=U(2,1)$）

$\Rightarrow\mathcal{H}=\sum_{\vec{p},\sigma}\frac{p^2}{2m}a^\dagger_{\vec{p}\sigma}a_{\vec{p}\sigma}+\frac{U_0}{V}\sum{}'a^\dagger_{\vec{p}_1'+}a^\dagger_{\vec{p}_2'-}a_{\vec{p}_2-}a_{\vec{p}_1+}$，$\frac{U_0}{V}=(U^{0+;0-}_{0+;0-}-U^{0+;0-}_{0-;0+})$，$\sum'$ 为对 $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'$ 求和

无法如 Bosons 利用 Bogoliubov 变换是因为不存在一个低能聚集的基态，不可将四个 a 近似为两个 a

因此以下使用微扰论计算其本征值，将第二个求和看作微扰.

$E^{(0)} = \sum_{\vec{p},\sigma} \frac{p^2}{2m} n_{\vec{p}\sigma}$, $|\varphi^{(0)}\rangle$ 为 $\{n_{\vec{p}\sigma}\}$ 代表的 Fock State.

对于热平衡下，我们有 $\overline{n_{\vec{p}\sigma}} = \frac{1}{z_0^{-1} e^{p^2/2mkT}+1}$. $z_0 = e^{\beta\mu_0}$ 为逸度.

并由此我们有 (取 $g=2$, E 与 σ 无关) $E^{(0)} = V \frac{3kT}{\lambda^3} f_{5/2}(z_0)$, $n = \frac{2}{\lambda^3} f_{3/2}(z_0)$

$E^{(1)} = \frac{u_0}{V}\sum_{\vec{p}_1,\vec{p}_2} n_{\vec{p}_1+} n_{\vec{p}_2-} = \frac{u_0}{V} N_+ N_-$ (一阶微扰下取对角元) 一阶微扰本征矢不需计算了.

这也可以给出热平衡的值，$\overline{N_+}=\overline{N_-}=\frac{1}{2}N$, $\overline{N_+N_-}=\frac{1}{4}N^2$ (平衡分布完全由 $E^{(0)}$ 决定)

$\overline{E^{(1)}} = \frac{u_0}{4V}N^2 = V\frac{u_0}{\lambda^6}[f_{3/2}(z_0)]^2$. 若代入 $u_0 \simeq 4\pi a\hbar^2/m$. (伪势极限)

$\Rightarrow E^{(1)} = V\frac{2kT}{\lambda^3}\left(\frac{a}{\lambda}\right)[f_{3/2}(z_0)]^2$ 因此伪势极限等价为 $a \ll \lambda$ ，我们得到修正为 $\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ 一阶.

$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$ $\Rightarrow$ 对 $\forall$ Fock State. $E^{(2)} = \frac{2u_0^2}{V^2}\sum_{\vec{p}_1,\vec{p}_2}^{\vec{p}_1'} \frac{n_{\vec{p}_1+}n_{\vec{p}_2-}\times(1-n_{\vec{p}_1'-})(1-n_{\vec{p}_2'+})}{(p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2)/2m}$

注意，求和时仅有 $(\vec{p}_1,\vec{p}_2)$ 占据 $(\vec{p}_1',\vec{p}_2')$ 未占据时才能有贡献.

但此处 $E_n^{(2)}$ 无法给出 E 的二阶修正，因为 u_0 也有关于 a 的一阶修正

$\frac{4\pi a\hbar^2}{mV} \simeq \frac{u_0}{V} + 2\frac{u_0^2}{V^2} \quad \frac{1}{(p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2)/2m}$ $\Rightarrow$ $u_0 \simeq \frac{4\pi a\hbar^2}{m}\left[1-\frac{8\pi a\hbar^2}{mV} \quad \frac{1}{(p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2)/2m}\right]$

将其代入 $E^{(1)}$ 中 获得第一个二阶修正 $E_{I}^{(2)} = -2\left(\frac{4\pi a\hbar^2}{mV}\right)^2\sum_{\vec{p}_1\vec{p}_2}^{\vec{p}_1'} \frac{n_{\vec{p}_1+}n_{\vec{p}_2-}}{(p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2)/2m}$

$E^{(2)}$ 中仅留 u_0 一阶与 $\vec{p}$ 无关项的 $E_{II}^{(2)} = 2\left(\frac{4\pi a\hbar^2}{mV}\right)^2\sum_{\vec{p}_1\vec{p}_2}^{\vec{p}_1'} \frac{n_{\vec{p}_1+}n_{\vec{p}_2-}[1-n_{\vec{p}_1'+})(1-n_{\vec{p}_2'-})}{(p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2)/2m}$

$\Rightarrow E^{(2)} = E_{I}^{(2)}+E_{II}^{(2)} = -4\left(\frac{4\pi a\hbar^2}{mV}\right)^2\sum_{\vec{p}_1\vec{p}_2}^{\vec{p}_1',\vec{p}_2'} \frac{n_{\vec{p}_1+}n_{\vec{p}_2-}n_{\vec{p}_1'+}\delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_2,\vec{p}_1'+\vec{p}_2'}}{(p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2)/2m}$ (应用对称性 $=0$) (4个n乘积对于 $(\vec{p}_1,\vec{p}_2)\leftrightarrow(\vec{p}_1',\vec{p}_2')$)

最终 $E^{(2)} = V\frac{8kT}{\lambda^3}\left(\frac{a^2}{\lambda^2}\right)F(z_0)$, $F(z_0) = -\sum_{r,s,t=1}^{\infty}\frac{(-z_0)^{r+s+t}}{\sqrt{rst}\,(r+s)(r+t)}$.

最终在热平衡下，计算至二阶修正 $E = V\frac{kT}{\lambda^3}\left[3f_{5/2}(z_0)+2\frac{a}{\lambda}(f_{3/2}(z_0))^2+\frac{8a^2}{\lambda^2}F(z_0)\right]$ (z_0 由 n, T 确定)

对于 $T\to 0$ 的 Fermions 基态 ($z_0\to+\infty$) 此时用参量渐近行为代数后有

$f_\nu(z_0) \simeq (\ln z_0)^\nu/\Gamma(\nu+1)$, $F(z_0) \simeq \frac{16(11-2\ln 2)}{105\pi^{3/2}}(\ln z_0)^{7/2}$, $\ln z_0 \simeq \lambda^2\left(\frac{3\pi^{1/2}n}{8}\right)^{2/3}$

代入得基态下有 $\frac{E_0}{N} = \frac{3}{10}\frac{\hbar^2}{m}(3\pi^2 n)^{2/3} + \frac{\pi a\hbar^2}{m}n\left[1+\frac{6}{35}(11-2\ln 2)\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n^{1/3}a\right]$

基态压强为 $P = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = n^2\frac{\partial(E_0/N)}{\partial n} = \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{m}(3\pi^2 n)^{2/3}n + \frac{\pi a\hbar^2}{m}n^2\left[1+\frac{8}{35}(11-2\ln 2)\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n^{1/3}a\right]$

$C_0 = \frac{1}{m}\frac{dP_0}{dn} = \frac{1}{3}\frac{\hbar^2}{m^2}(3\pi^2 n)^{2/3} + \frac{2\pi a\hbar^2}{m^2}n\left[1+\frac{4}{15}(11-2\ln 2)\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n^{1/3}a\right]$

§8. 费米液体的能谱：朗道唯象理论.

在§4中讨论了玻色液体的能谱与其主要特征，这样的能谱称为玻色型谱

预期由自旋½费米子组成的液体，比如 ^3He 液体，会有不同的能谱，不妨称为费米型谱.

Tip: 费米子组成液体不一定有费米型谱，谱型主要取决于相互作用性质.

这里的讨论基于排斥，这样 Fermions 无法形成玻色对. 吸引在§9中讨论，§8讨论排斥典型能谱.

Landau 以演化构造理想 Fermi Gas 的方法来构造量子液体的费米能谱.

假设，在逐渐"纳入"相互作用下，气态逐渐变为液态. 在此过程中，动量空间能级之间排序保持不变

且在该排序中，全体粒子的角色由该体中的元激发替代（准粒子）其数目与粒子数一致且遵循 Fermi 统计

每个准粒子均有一确定动量 $\vec p$，因此可由 $n(\vec p)$ 来描述分布。$\overset{\text{计自旋}}{2}\int n(\vec p)\frac{d\vec p}{h^3} = N/V =: \int n(\vec p)\, d\tau$

虽然 $n(\vec p)$ 可以决定能量 E，但 $E \neq \sum_{\vec p} n(\vec p)\varepsilon(\vec p)$，而是 $E = E[\{n(\vec p)\}]$，作为泛函。

本身也与 $[\{n(\vec p)\}]$ 相关

$\varepsilon(\vec p) := \frac{\delta E[\{n(\vec p)\}]}{\delta n(\vec p)}$ （δE 为仅在 $\delta n(\vec p)$ 下的变动） or $\delta E[\{n(\vec p)\}] = V\int \varepsilon(\vec p)\,\delta n(\vec p)\, d\tau$.

在初始分布为基态（所以泛函）时，分布函数的微小偏差（激发态）（这一点为了保证 $n(\vec p)$ 良定义）

代表了 $f(\vec p,\vec p')$ 并非泛函.（也正经早为分布的泛函）

可以通过线性泛函关系式 $\delta\varepsilon(\vec p) = \int \underbrace{f(\vec p,\vec p')}_{\text{(for ideal gas, } f=0)}\,\delta n(\vec p')\, d\tau'$ 来给出。（因此 $\varepsilon(\vec p)$ 也不再是泛函）

$\varepsilon(\vec p)$，$f(\vec p,\vec p')$ 分别是 $E[\{n\}]$ 对 $n(\vec p)$ 的一阶与二阶泛函导数。

如果加入自旋可写为 $\delta E = \sum_{\vec p\sigma}\varepsilon(\vec p,\sigma)\,\delta n(\vec p,\sigma) + \frac{1}{2V}\sum_{\vec p\sigma;\vec p'\sigma'} f(\vec p,\sigma;\vec p',\sigma')\,\delta n(\vec p,\sigma)\,\delta n(\vec p',\sigma')$

其中 δn 为分布相对基态的微小变化，$\varepsilon(\vec p,\sigma)$ 不再是泛函，而是基态分布下的函数

由于 $f(\vec p,\sigma;\vec p',\sigma')$ 关于字母对称（二阶导）$\frac{\delta(\frac{\delta E}{\delta n_{\vec p}})}{\delta n(\vec p')}$，因此一般为 $a+b\vec S_1\cdot\vec S_2$ 形式，a,b 仅与 $\langle\vec p,\vec p'\rangle$ 相关.

为了找到 $n(\vec p)$ 对 $\varepsilon(\vec p)$ 的形式依赖，根据 $S/k = -\sum_{\vec p}(n\ln n + (1-n)\ln(1-n))$，再由 $\delta F/\delta n=0$ 而得到的

$\bar n(\vec p,\sigma) = \frac{1}{e^{(\varepsilon(\vec p,\sigma)-\mu)/kT}+1}$，一般 ε 为泛函（但此时，ε 为函数）

在费米面上的近似，$\varepsilon(\vec p,\sigma)$ 可以作泰勒近似 $\varepsilon(\vec p\simeq\vec p_F) = \varepsilon_F + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{p=p_F}(p-p_F)+\cdots \simeq \varepsilon_F + u_F(p-p_F)$

其中 u_F 为费米面上准粒子的速度（与粒子 v_F 不同）.

同时定义 $m^* = \frac{p_F}{u_F} = \frac{p_F}{(\partial\varepsilon/\partial p)_{p=p_F}}$ 并称之为准粒子在动量 p_F 下的有效质量.

Tip：可以用另一种方式看，$\varepsilon(p\simeq p_F) = \frac{p^2}{2m} + V(p) = \frac{p^2}{2m^*} + Const$

这类似于将 p 以 p_F 下的其他粒子间相互作用，看作平均场，便定义了有效质量.

对 p 求导再令 $p=p_F$ ⇒ $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p_F}\frac{dV(p)}{dp}\Big|_{p=p_F}$

m^* 的定义很有用，因为在低温近似下，$\bar n$ 与 $\varepsilon(\vec p,\sigma)$ 的关系与气体一致，S 用 $\bar n$ 的表达式也与气体一致.

根据低温下 $C_V \simeq S \simeq \frac{\pi^2}{3}k^2 T a(\varepsilon_F)$，$a$ 为单粒子态密度，可以得到，唯一不同在于，费米面附近的态密度

中可以 m^* 替代 m ⇒ $\frac{(C_V)_{real}}{(C_V)_{ideal}} = \frac{m^*}{m}$

以下求在 f 已知前提下，m 与 m^* 的关系式

因为粒子数相一致.

$\int \vec p\, n(\vec p)\, d\tau = m\int\frac{\partial\varepsilon(\vec p)}{\partial\vec p}\,n(\vec p)\,d\tau$，即动量密度 = 粒子的质量通量（应用了准粒子与粒子一一对应）

现在对 $n(\vec p)$ 作一个变分 $\delta n(\vec p)$，那么两边的变化相等

$$\int\vec p\,\delta n\, d\tau = m\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec p}\,\delta n\, d\tau + m\int d\tau\int d\tau'\,\frac{\partial f(\vec p,\vec p')}{\partial\vec p}\,\delta n(\vec p')\,n(\vec p)$$ （这里暂时不考虑自旋）

$$= m\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec p}\,\delta n\, d\tau - m\int d\tau\int d\tau'\, f(\vec p,\vec p')\,\frac{\partial n'}{\partial\vec p'}\,\delta n(\vec p)$$ （用了 $f(\vec p,\vec p')=f(\vec p',\vec p)$ 以及变量替换，分部积分）

由于 $\delta n(\vec p)$ 任意 ⇒ $\frac{\vec p}{m} = \frac{\partial\varepsilon(\vec p)}{\partial\vec p} - \int d\tau'\, f(\vec p,\vec p')\,\frac{\partial n(\vec p')}{\partial\vec p'}$

由于此时分布趋近 $\theta(p-p_F)$，且以上论述均仅对 ε 的 ε_F 的准粒子而言，因此以 $\theta(p_F-p)$ 替代 $n(\vec p)$，

利用平衡态在球坐标下的分布函数 $\frac{\partial n(\vec p')}{\partial \vec p'} = -\frac{\vec p'}{p'}\delta(p'-p_F)$ 代入，并由于求 ε_F 附近 m^*，因此将 $\vec p$ 取为 $\vec p_F$

两边点乘 $\vec p_F$ 再除 p_F^2 ⇒ $\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{4p_F}{2h^3}\int d\Omega' \cos\theta\, f(\theta)$. $f(\theta)=f(\vec p_F,\vec p_F')$, $\theta=\langle p_F, p_F'\rangle$, $d\Omega'$ 为 $\hat{p}_F'$

由于未考虑自旋相同求和2次，因此在计入自旋后 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_F}{2h^3}\sum_{\sigma\sigma'}\int d\Omega'\cos\theta\, f_{\sigma\sigma'}(\theta)$

声速

在绝对零度下，声速（热力学平衡）实际上因为 $\tau\to\infty$ 而为零，但这里考虑其平衡的零点极限。

此时由于 T=0，等温与等熵不必区分。 $c_0^2 = \frac{\partial P_0}{\partial \rho} = \frac{\partial P_0}{\partial (mN/V)} = -\frac{V^2}{mN}\left(\frac{\partial P_0}{\partial V}\right)_{N,T}$

在 T=0 下，$dE=dS=0$，因此有 $\mu_0 dN = P_0 dV$，以及 $\mu_0 N = E - TS + P_0 V \Rightarrow N d\mu_0 = V dP_0$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial P_0}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{N}{V}\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial V}\right)_{N,T} = -\frac{N^2}{V^2}\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial N}\right)_{V,T}$ 代入得 $c_0^2 = \frac{N}{m}\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial N}\right)_{V,T}$

进一步利用 $\mu_0 = \varepsilon(p_F) = \varepsilon_F$，那么 $\delta\mu_0 = \delta\varepsilon_F = \frac{\partial \varepsilon_F}{\partial p_F}\delta p_F + \int f(\vec p_F, \vec p')\,\delta n(\vec p')\,d\tau'$

$\delta p_F = \left(\frac{\partial p_F}{\partial N}\right)_V \delta N = \frac{1}{3}\frac{p_F}{N}\delta N$ ， $\frac{\partial \varepsilon_F}{\partial p_F}\delta p_F = \frac{p_F^2}{3m^*}\frac{\delta N}{N}$.

假设仅在 $p\sim p_F$ 时，δn 非零，且近似为常值则 $\int f(\vec p_F,\vec p')\,\delta n(\vec p')\,d\tau' = \frac{\delta N}{4\pi V}\int f(\theta)\,d\Omega'$ $f(\theta)$ 在 T=0 时不为零。

代入得 $\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial N}\right)_{V,T} = \frac{p_F^2}{3m^*N} + \frac{1}{4\pi V}\int f(\theta)\,d\Omega' \Rightarrow c_0^2 = \frac{p_F^2}{3mm^*} + \frac{n}{4\pi m}\int f(\theta)\,d\Omega' = \frac{p_F^2}{3m^2} + \frac{p_F^3}{6m h^3}\times \overset{\text{自旋求和}}{4}\int f(\theta)(1-\cos\theta)\,d\Omega'$

例如研究用 a 表相互作用的稀薄非理想费米气。

将 $E^{(1)}$ 与 $E^{(2)}$ 相加，求对 $n(\vec p,\sigma)$ 的二阶导，再代入 $p=p'=p_F$，再对求和自旋为 σ's 得到

$$A(\theta) = \frac{2\pi a\hbar^2}{m}\left[1+2a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left\{2+\frac{\cos\theta}{2\sin(\theta/2)}\ln\frac{1+\sin(\theta/2)}{1-\sin(\theta/2)}\right\}\right]$$

$$B(\theta) = -\frac{8\pi a\hbar^2}{m}\left[1+2a\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}\left\{1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\ln\frac{1+\sin(\theta/2)}{1-\sin(\theta/2)}\right\}\right],$$

$f(\vec p,\sigma;\vec p',\sigma') = A(\theta) + B(\theta)\,\vec S_1\cdot\vec S_2$ （依赖于自旋的本质为交换项）

但由于对自旋的求和中，$\vec S_1\cdot\vec S_2$ 抵消 $((+)+(-)+(-)+(+)=0)$ 因此只需考虑 f 的关于自旋对称部分

代入 $A(\theta)$ 得 $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} - \frac{8}{15m}(7\ln 2 - 1)\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}a^2$，与 $c^2 = \frac{p_F^2}{3m^2} + \frac{2\pi a\hbar^2}{m^2}\frac{N}{V}\left[1+\frac{4}{15}(11-2\ln 2)\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3}a\right]$，与§74一致。

§9. 费米气体的凝聚

若 Fermions 之间相互作用吸引，那么不论多弱（在 T 足够低时）原本 Fermi Gas 都会形成 Cooper pair，不再稳定（凝聚）

一些现象：金属超导，^{3}He 超流，超冷 Fermi Gas 凝聚 由此导致。

在金属超导中，屏蔽效应与电声耦合使费米面两侧准粒子有推迟吸引作用，形成 Cooper Pair

超导临界温度 $kT_c \sim \hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N(\varepsilon_F)|u_0|}}$，$N(\varepsilon_F)$ 为 Fermi 面上每一个自旋的态密度，u_0 为电子的吸引耦合，$\hbar\omega_D$ 为德拜能量。表征声子作用

可以看到，超导并非 u_0 微扰的结果

利用 Feshbach 共振 磁场可调控超冷原子相互作用大小与正负，从而制造低温分子，也可弱吸引不形成分子。

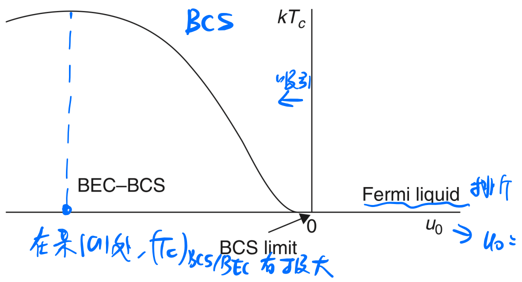
在 u_0 较小时，形成类 BCS 态，在 u_0 较大时，又会过渡到 BEC 态。

在谐势阱中下 BCS/BEC 相变 T_c 为 $\frac{kT_c}{\hbar\omega} \sim \frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega}e^{-\frac{\pi}{2k_F|a|}}$， $\omega = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$， $k_F = \sqrt{\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2}}$ （在 $|a|$ 较小时）

Cooper pair 数目为电子一半

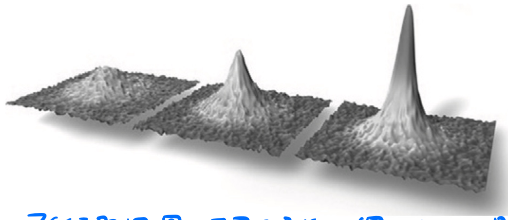
相变 T_c 为 $\frac{kT_c}{\hbar\omega} \simeq \left[\frac{N}{2\zeta(3)}\right]^{1/3}$，而 $\frac{kT_c}{\varepsilon_F} \simeq 0.41$ （在 $|a|$ 较大时）

因此这过程开始 $|a|$ 较小，相互作用弱，到很低温才会形成 BEC。后来 $|a|$ 大，从而出现 BCS-BEC 过渡



$\Rightarrow u_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$.

在某$|a|$处，$(T_c)_{BCS/BEC}$有极大



我们的问题，不同的实验（调节$|a|$）相同温度 T/T_F 约0.07

随着$|a|$变大，凝聚体占比增加（1%~10%）