

Chapter XII: 相变 I

Intro: 统计力学研究的问题可以分成两大类.

1° 组内无相互作用 (理想气体, 理想液体, 固体等). 知道各组分能级即可知系统热力学性质

它们一般都用玻色 (即 Bose Gas 的 BEC)

2° 组内存在相互作用. 若开尔文热力学定律, 一般么遇上所析不违反与奇异性.

一般更在于这个状态下, 系统发生了相变.

相互作用不用 (如 Bogoliubov) 全权反对称, 子系统能级与单一组分能级无简单联系. 在低温下, 相关性很强

这可以发生合作同义, Chapter X & XI 中, 正是对开尔文定律, 理论才近似正确.

§1. 对凝聚问题的一般性讨论

若对相互作用势做 $u(r) = \begin{cases} +\infty & r < \sigma \\ 0 & \sigma < r < r^* \\ -\epsilon & r > r^* \end{cases}$ 的假设 (现实中差不多)

那么若能求出它的严格配分函数 $Q_N(V, T)$ 则

① 在热力学极限下 (令 $N, V \rightarrow \infty$) $N^{-1} \ln Q_N$ 仅与 $\frac{V}{N} = v$ 和 T 相关. 记为 $f(v, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \ln Q_N$

(此时有 $f(v, T) = -\frac{A}{NkT}$, $p(v, T) = -(\frac{\partial A}{\partial V})_{N, T} = kT(\frac{\partial f}{\partial v})_T \geq 0$)

② $f(v, T)$ 处处上凸 (因为 $(\frac{\partial p}{\partial v})_T = kT(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})_T \leq 0$, 在高温下均, 低温下可能存在 - (当 $T \rightarrow 0$ 时, 在 v 中取定)

这例如 两种比例不同的相共存的情况. (或不均).

注意: 对于 Q_N , 不必出现 $(\frac{\partial p}{\partial v})_T > 0$ 的情况, 因为 范德瓦耳斯方程中一部分非物理

但若用近似 (如集团展开) 则有可能

用 $\mu = \mu_0$ 等序进行非物理的近似修正

③ 仅在 $N \rightarrow \infty$ 的极限下, 方程才有绝对平直部分. 端点成为拐点

若 N 有限, 且计算时使用了 Q_N , 那么 $p' = kT(\frac{\partial \ln Q}{\partial V})_{N, T}$ 不再有奇点. p' 也与 N 相关, 不再仅为 v, T 函数

Extra. 相应的严格巨配分函数 $\Omega(z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T)$

对 z 因子化, 其 N 有上限, $N_m \sim V/\sigma^3$, 在 N_m 之上, $Q_N(V, T) = 0$ (由于所有 $E \rightarrow +\infty$).

因此只需 V 有限 (N_m 也有限), 那么 $\Omega(z, V, T)$ 奇异性与 $Q_N(V, T)$ 一致.

由巨正则系综与热力学, $p' = \frac{kT}{V} \ln \Omega$, $\bar{N}' = \frac{1}{z} (\frac{\partial \ln \Omega}{\partial z})_{V, T}$, $\sigma_N^2 = \overline{(N - \bar{N})^2} = (\frac{\partial \bar{N}}{\partial \ln z})_{V, T}$

$(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \bar{N}})_{V, T} = \frac{\bar{N}}{\sigma_N^2} = \frac{V}{kT} (\frac{\partial p'}{\partial \bar{N}})_{V, T} = -\frac{v^2}{kT} (\frac{\partial p'}{\partial v})_{V, T} \Rightarrow (\frac{\partial p'}{\partial v})_{V, T} = -\frac{kT}{v^2} \frac{\bar{N}^3}{\sigma_N^2} < 0$.

可见相对有限 V , $(\frac{\partial p'}{\partial v})_{V, T} \neq 0$. 在 $V \rightarrow \infty$ 时, σ_N 在量级上 $\sim O(\sqrt{N})$ 因此 $(\frac{\partial p'}{\partial v})_{V, T} \sim \frac{1}{O(\sqrt{N})}$ 在 $V \rightarrow \infty$ 的极限下 \Rightarrow

Tip: 例如在计算 $N'/V = n'$ 时, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_N}$ 不可交换.

Extra: Lee & Yang 也通过开尔文 $p(v, T) = kT \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \Omega$, $n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln z}$ 的解析行为对相变产生讨论

在固定 T 下, 在 z 复平面上的零点分布, 随着 V 个, 零点的变化.

对 $z > 0$, 有 $Q \geq 1$, 因为无空处在 $z > 0$ 的正半轴上.

但随 $V \rightarrow \infty$, Q 以式收敛 $\rightarrow +\infty$, 那么空处 $\rightarrow +\infty$, 可以产生连续分布且在某种意义上, 空处

到可以收敛至正半轴上的一些 z_0 处, 这些点处 P 有奇异性. 暗示发生了相变.

[Lee. 统计力学. Chapter III 凝聚理论与合作现象]

§1. 有限系统的性质

在理想玻色气体研究中的 $\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$, $n = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$. ($V \rightarrow \infty$ 时)

可以见到 $z=1$ 是 $g_\nu(z)$ 的奇点, 同时是系统至 BEC 的凝聚点.

这即指出对于相互作用气体, 有以下台柱

$$\left(\frac{P}{kT}\right)_V = \frac{1}{\lambda^3} \sum_l b_l(V, T) z^l, \quad (n)_V = \frac{1}{\lambda^3} \sum_l l b_l(V, T) z^l$$

且认为在 $V \rightarrow \infty$ 时, $b_l(V, T) \rightarrow b_l(T)$ $\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_l b_l(T) z^l = F(z)$, $n = z \frac{dF}{dz}$.

$F(z)$ 在 $z=0$ 附近解析, 因此 $z \in \mathbb{R} > 0$ 时延拓, 在 $z=1$ 处奇点, 因此 $z=1$ 处为系统凝聚点

实际物理系统在奇点附近可以凝聚.

假设构造 Pathria §1 中假设, E 配分函数可写成级数, 在 V 有限时.

由于 $Q_N(V, T)$ 恒正, 因此对于 $z > 0$ 的物理区域, $Q(z, V, T)$ 不为零, 对应空处 z_i 不在正半轴上.

① $z_i \notin \mathbb{R}^*$ ② 对 $z \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{P}{kT}\right)_V$ 与 $(n)_V$ 均为 z 的实, 正, 解析函数.

③ $v = \frac{1}{n}$, $p = p(V, T)$ 且为 v 的解析函数. $(n)_V, \left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T, \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T$ 均大于零且有限

§2. 零温为无限时的极限

Thm 1: 在 $z \in \mathbb{R}^*$ 时, 在物理区域内 $\frac{P}{kT} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln Q$ 存在且是 z 的连续, 逐点收敛

Thm 2: 在 $z \in \mathbb{C}$ 时, \exists 区域 D s.t. $\forall V, Q(z, V, T) = 0$ 的根 $z_i \notin D$ 则对 $\forall n \in \mathbb{Z}^*$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \frac{\partial^n}{\partial (\ln z)^n} \ln Q(z, V, T) \text{ 均存在且解析, 且 } \frac{\partial}{\partial (\ln z)} \text{ 与 } \lim_{V \rightarrow \infty} \text{ 在 } D \text{ 中可交换.}$$

§3. 相变

① 在 $V \rightarrow \infty$ 时, D 内无根, 则在 D 内的实轴上不会发生相变.

② 在 $V \rightarrow \infty$ 时, $Q(z, V, T) = 0$ 的根向实轴 $z \in \mathbb{R}^*$ 逼近, 那么在 $z=z_0$ 处, $\frac{P}{kT}$ 的导数或更高层次导数 ^{之所相变} 不可以代表发生相变

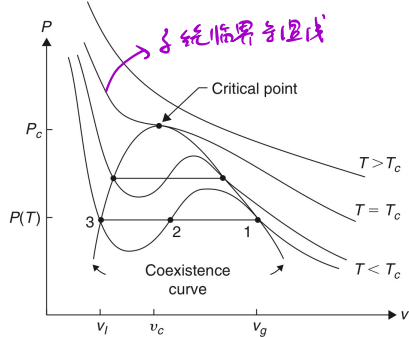
§2. Van der Waals 气体的凝聚.

范氏气体的状态方程: $(p + \frac{a}{v^2})(v-b) = RT$, a 描述分子间相互作用, b 描述分子大小.

均属于类 Jones 势与硬球势 (参阅展开) 且随 $v \gg b$

因此, 当 v 为序参量时, 即 $v = \frac{V}{N}$, a, b 都为一定参量的对应量

为了研究相变, 而假设在 $v \sim b$ 时也有类似近似成立



左图为根据状态方程制得曲线.

Tip: 若用 $u(r) = \begin{cases} +\infty & r < r_0 \\ -\epsilon & r_0 < r < r_1 \\ 0 & r > r_1 \end{cases}$ 来修正, 在 $r \rightarrow \infty$ 时作修正 $\rightarrow \infty$ 在 r 取有限大时 $(\frac{\partial p}{\partial r})_T > 0$

在 $T > T_c$ 时, $(\frac{\partial p}{\partial v})_T < 0$. 而在 $T < T_c$ 时, 么存在 $(\frac{\partial p}{\partial v})_T > 0$ 区域
为了 $(\frac{\partial p}{\partial v})_T < 0$ 条件成立, 用相变的 $\mu_1 = \mu_2$ 与平衡态法修正曲线

从 1 开始, 比平衡态 $v_g \rightarrow v_l$ 但 P 不变, Δv 和 $\Delta P = 0$ 对应 $(\frac{\partial p}{\partial v})_T = 0$, $r_T \rightarrow \infty$

在 $T > T_c$ 时, v_l 与 $v_g \rightarrow v_c$. 称为临界点.

将不同 T 下, 开始发生相变时的 $v_l(T)$ 与 $v_g(T)$ 连成一条线, 称为共存线.

可以看见, 临界点处, $(\frac{\partial p}{\partial v})_T = 0$ 且 $(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2})_T = 0$. 由此得临界点坐标.

$$P_c = \frac{a}{27b^2}, \quad v_c = 3b, \quad T_c = \frac{8a}{27bk} \Rightarrow \gamma_c = \frac{RT_c}{P_c v_c} = \frac{8}{3} \text{ 为普适值.}$$

$$\text{引入约化变量 } P_r = \frac{P}{P_c}, \quad v_r = \frac{v}{v_c}, \quad T_r = \frac{T}{T_c}, \text{ 范德瓦耳方程} \Rightarrow (P_r + \frac{3}{2v_r^2})(3v_r - 1) = 8T_r$$

Von der Waal Equation 在临界点附近的行为.

$$\text{令 } P_r = 1 + \pi, \quad v_r = 1 + \psi, \quad T_r = 1 + t \Rightarrow \pi(2 + 7\psi + 8\psi^2 + 3\psi^3) + 3\psi^3 = 8t(1 + \psi + \psi^2)$$

在临界点处 ($t=0$) 上, 代入后得到最低阶下有 $\pi \approx -\frac{2}{3}\psi^3$

考虑相变时的比体积 v_l 与 v_g 与 P 随 t 的变化.

在 t 为 $0(t)$, 假设 π 最低阶小于 $0(t)$, 以 ψ 为 $2\pi + 3\psi^3 = 0$. 而在 t 从 $0^- \rightarrow 0^+$, 可以看见 π 的阶数大于 ψ , 而 ψ 有三值, 至少有一个小于 0 , 一个大于 0 , 因此不予取.

用 $\pi = 0(t)$, 根据共存线自由能近似, 则有 $\psi_{lg} = 0(t^{1/2})$, 因此 $\psi^3 = 0(t)$

由此有 $2\pi = 8t + 0(t) \Rightarrow \pi = 4t + 0(t)$, ψ 有三个, 左右两个 $\propto t^{1/2}$. 再以待最低阶近似 $\pi = 4t + 0(t)$

$$\psi_{lg} = \pm 2t^{1/2} + 0(t^{1/2})$$

接着考虑 $-(\frac{\partial \psi}{\partial \pi})_t$, 即压缩率. 并考虑在 $t \rightarrow 0^+$, ψ 为中间那个点处的压缩率. (只有在 $t > 0$, ψ 为 $\pm 2t^{1/2}$ 那时有可以用范德瓦耳方程描述的压力值, 否则在相变区.)

$$\text{那么若考虑最低阶, } \psi = 0(t^{1/2}), \quad -(\frac{\partial \psi}{\partial \pi})_t = \frac{1}{6t}$$

考虑在 $t \rightarrow 0^-$, ψ 为左右两个点处的压缩率, $\psi = \pm 2t^{1/2} \Rightarrow -(\frac{\partial \psi}{\partial \pi})_t = -\frac{1}{12t}$

$$\text{同样可以计算出 } C_v \approx \begin{cases} (C_v)_{ideal} + \frac{7}{2}k_B(1 + \frac{28}{25}t) & (t \leq 0) \\ (C_v)_{ideal} & (t > 0) \end{cases} \text{ 在临界点处存在有限的热容跃变.}$$

§3. 相变的动力学模型.

有时, 会以最近邻存在相互作用的模型模拟相变的发生. 点之依何化但

确切得多了物理特征, 使与原有方程, 以及可以发生相变

例如 有 N 个格点, 每个格点均有一个大小为 $g\mu_B \sqrt{J(J+1)}$ 的磁矩 μ , 并有 $(2J+1)$ 种取向.

N 个取向的集合构成了一个 $(2J+1)^N$ 种

利用正则系综推导得到 $\overline{M}(B, T)$ ，即外场 B ，温度 T 下的正则化磁矩，若 $B=0$ ， \overline{M} 和列的自发磁化

若在 $T < T_c$ 时有值， $T > T_c$ 时不有在自发磁化，则对 T 在 $T = T_c$ 处发生二级相变。

对大多数金属，磁矩仅与电子相关，且其比例约 g 因子 (Einstein-de Haas 效应) 约为 2。

这代表磁矩仅与电子自旋相关。并且对自发磁化的 T/T_c 关系与 $J = \frac{1}{2}$ 曲线最符合。

因此我们取 $\mu = 2 \times \mu_B \times \sqrt{S(S+1)}$ ， $S = \frac{1}{2}$ ， $\mu = \sqrt{3} \mu_B$ 且每个格点上仅 $m = \pm \frac{1}{2}$ 两种可能指向

重要假设：在考虑相互作用时，仅考虑相邻自旋的相互作用，耦合常数相等。

考虑两个自旋 \vec{S}_i, \vec{S}_j $W = \frac{J}{\hbar^2} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ ，在总角动量的基下对角，

$\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = \frac{1}{2} [S^2 - S_i^2 - S_j^2]$ ， $S = 0, 1$ ，因此本征值为 $-\frac{3}{4} \hbar^2$ 或 $\frac{1}{4} \hbar^2$ ，记 $\frac{\vec{S}_i}{\hbar} = \vec{s}_i$ ， $\frac{\vec{S}_j}{\hbar} = \vec{s}_j$ 。

并记 $a \hbar^2 = -2J$ ，则有 $W = -2J \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$ ，本征值为 $-2J (1, +1, -1, -1) = -2J$ ， $1, +1$ 为基态及第一

因此得到哈密顿量为 $E = C_{site} - 2J \sum_{i,j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$ ($\sum_{i,j}$ 为对所有相邻自旋对求和)

该模型代表的模型称为 Heisenberg 模型

进一步简化，将 $\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$ 简化为 $s_i s_j$ ，记为 $\frac{1}{2} \sigma_i \sigma_j$ ， σ_i, σ_j 可取 ± 1 ， $\frac{1}{2}$ 为归一化值不是

这之上简化为 Ising 模型，由于所有自旋对相等。这样的模型称为 Ising (伊辛模型)

Tip. 若略去 z 分量，得到 S 与 ^4He 超流相反相关的 XY 模型。

$J_z \gg J_x, J_y$ $J_z \propto J_x, J_y$

以上 Ising 模型与 XY 模型是各向异性 Heisenberg 模型的特例

引入参数 n 代表配位中涉及自旋的格点 (Ising $n=1$, XY $n=2$, Heisenberg $n=3$) 对给定系统， n 与晶格维数 d 直接决定与理论行为

1. Ising 模型的配分函数

为了研究自发磁化，要考虑在外场下的模型，不妨使 B 沿 z 方向并记相互作用为 $-J \sigma_i \sigma_j$ 。

则有 $g_e[\sigma_i] = -J \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - \mu_B \sum_i \sigma_i$

$Q_N(B, T) = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} e^{-\beta g_e[\sigma_i]}$ ， $A(N, B, T) = -kT \ln Q_N$

$E(N, B, T) = -\frac{\partial \ln Q_N}{\partial \beta} = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Q_N}{\partial T} \right)_B$ ， $C(N, B, T) = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_N = -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_{N, B}$

$M(N, B, T) = \mu \sum_i \sigma_i = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q_N}{\partial B} \right)_T = -\left(\frac{\partial A}{\partial B} \right)_{N, T}$

$M(0, T)$ 给出了自发磁化强度。 T_c 为铁磁相变温度

由于不同 $\{\sigma_i\}$ 只对应同一能量，所以可以看作 E 由 $N_{++}, N_{+-}, N_{--}, N_{+}, N_{-}$ 等唯一决定。

若用 q 表示晶格配位数 (最近邻数)，则有

$N_{+} + N_{-} = N$ ； $qN_{+} = 2N_{++} + N_{+-}$ ； $qN_{-} = 2N_{--} + N_{+-}$

可以看作，五步走三步，用两个表示所有，不妨选 N_{+} 与 N_{++} 。

$\Rightarrow E_N(N_{+}, N_{++}) = -J(N_{++} + N_{--} - N_{+-}) - \mu_B(N_{+} - N_{-}) = -J(\frac{1}{2}qN - 2qN_{++} + 4N_{++}) - \mu_B(2N_{+} - N)$

Key: 对不同的格点 $g_N(N_+, N_{++})$ 为该格点的简并度 (亦即对应位形数) 那就有

$$Q_N(B, T) = \sum_{N_+, N_{++}} g_N(N_+, N_{++}) e^{-\beta E_N(N_+, N_{++})}$$

\sum' 为是对固定 N_+, N_{++} 求和, 再对 N_+, N_{++} 求和.

§4. 晶格气和二元合金. (适用 Ising 模型的格点系统以外的系统)

α. 晶格气

晶格气用于描述“占据-空位”格点系统. N_0 格点, 它们被占据位中的格点上

这些位点构成配位数为 z 的晶格

与铁磁 Ising 不同, 相邻占有格点 $-E_0$, 不相邻则无, 即有 $W = -E_0 N_{00}$ (N_{00} 为近邻格子对数)

并记 $g_N(N_0, N_{00})$ 同 §3 中定义.

若忽略格点上粒子的动能, 那 $Q_N(N, T) = \sum_{N_{00}} g_N(N_0, N_{00}) e^{\beta E_0 N_{00}}$, 求和时取 N_0 进行

引来看, N 类似于体积 (只是不含 N , 其他仅有动能时对应格点问题)

相类似, 若考虑对应正则 $Q(Z, N, T) = \sum_{N_0=0}^N Z^{N_0} Q_{N_0}(N, T)$

并有 $P_N = kT \ln Q(Z, N, T)$ 且 $\frac{\bar{N}_0}{N} = \frac{1}{\nu} = \frac{\partial \ln Q}{\partial Z} \times \frac{Z}{N} = \frac{Z}{kT} \left(\frac{\partial P}{\partial Z} \right)_{N, T}$ (ν 为以晶格元配位数为单位的格子数/格点)

(正则) 晶格气 \leftrightarrow (正则) 无铁磁体

在晶格常数 $\rightarrow 0$ 并加入动能以后, 在 δ 帮下

晶格气模型用于模拟真实原子气体.

$N_0, N-N_0$

N_+, N_-

E_0

$4J$

1° $E_0 > 0$ 相互吸引的格点用于研究气体相变

Z

$e^{-2\beta(qJ - \mu B)}$

2° $E_0 < 0$ 类似于形成“占据-空位”格点支帮以开聚.

Q

$e^{-\beta N(\frac{1}{2}qJ - \mu B)} Q_N$

引与以往同讨论, 1 度同相互相 2

P

$-\frac{A}{N} - \frac{1}{2}qJ + \mu B$

$\frac{\bar{N}_0}{N} (= \frac{1}{\nu})$

$\frac{\bar{N}_+}{N} [= \frac{1}{2} (\frac{\bar{M}}{\mu N} + 1)]$

β. 二元合金 (有序-无序相变)

与晶格气相同, 但这里变成了另一种原子, 相互作用为 E_{11}, E_{22}, E_{12}

$$W = E_{11} \times N_{11} + E_{22} \times N_{22} + E_{12} \times N_{12}, \quad N_1 + N_2 = N, \quad qN_1 = 2N_{11} + N_{12}, \quad qN_2 = 2N_{22} + N_{12}$$

如铁原子为一类, 用 N_1 与 N_2 表达 $\Rightarrow W = \frac{1}{2}qE_{22}N + q(E_{12} - E_{22})N_1 + (E_{11} + E_{22} - 2E_{12})N_{11}$

(正则) 晶格气

(正则) 二元合金

若要建立与铁磁体对应, 应有 $E_{11} = E_{22} = -J, E_{12} = J$

$N_0, N-N_0$

N_1, N_2

在 $T=0$ 时, 二元合金处于最低能量, 相互最有序, 用是格点与自旋的对应

$-E_0$

$E_{11} + E_{22} - 2E_{12}$

在 $T \uparrow$ 时, 热扰动使有序下降, 铁磁个格点上聚集个格点不再正确

A

$A = \frac{1}{2}qE_{22}N - q(E_{22} - E_{12})N_1$ 行为 $N_1 + N_2$ 个同种原子组成的系统

§5. Ising Model 的近似

α. 相互近似

Bragg-Williams 近似: 给定子系统中, 单个原子能量由整个子系统的“平均”有序度决定.

(⇒ 平均分子场 (内场) 理论)

由于在近似下, dS/dL 均不受考虑, 因此称为 **定序近似**. 且预见随 $L \rightarrow 0$, 所有序参量趋于零

引入一个长程序的有序度 $L = \frac{1}{N} \sum \sigma_i = 2 \frac{N_+}{N} - 1$ ($-1 \leq L \leq 1$), 且有 $N = N_+ + N_-$.

在 BW 近似下, $E = -J \times \frac{1}{2} \sum \sigma_i \sum \sigma_j - \mu_B N L = -\frac{1}{2} J N L^2 - \mu_B N L$ 为单原子能量

$N_+ = \frac{N}{2}(1+L)$, $N_- = \frac{N}{2}(1-L)$, 根据从有 $\sigma \rightarrow \pi$ 自旋所需能量 \propto 有序度序参量 L

$N_- / N_+ = e^{-\Delta E / kT}$, $\Delta E = -J \sigma_i \sigma_j - \mu_B \sigma_i = 2\mu_B (\frac{J}{2} \sigma + B)$ (引来看), $\frac{J}{2} \sigma$ 起平均场作用

引令 $J \sigma / 2 = B'$ 称为内分子场

根据 $\frac{N_-}{N_+} = \frac{1-L}{1+L} = e^{-2\mu(B'+B)/kT} \Rightarrow \tanh^{-1} L = \frac{J L / 2 + \mu B}{kT}$

做以引发生自旋磁化, 引本 $\tanh^{-1} L = \frac{J L / 2}{kT}$ 的解.

类居里温度.

根据 \tanh 在 0 处斜率为 1, 因此若有非零解, $\frac{J}{2kT} > 1$ or $T < \frac{J}{2k}$. 即相变温度 $T_c = \frac{J}{2k}$

Tip: 又因上, N_+ , N_- 可以互换对称而不改解, 这即为对称破缺, 存在基态解, 但并不对称.

一般又因 B 和 B' 的取值从 0 起于 0 而出现破缺.

1° 在 $T \rightarrow T_c^-$ 时, 引得到 $L(T)$ 与 $1 - \frac{T}{T_c}$ 的相变关系. $L(T) \propto \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$ ($T \rightarrow T_c^-, B \rightarrow 0$)

($L = \tanh(L \frac{T_c}{T})$, 再展开为 $L \frac{T_c}{T} - \frac{1}{3} L^3 (\frac{T_c}{T})^3$ 等)

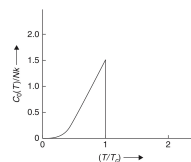
2° 在 $T \rightarrow 0$ 时, 有 $L(T) \rightarrow 1$, 同时有 $L(T) \propto 1 - 2e^{-2T_c/T}$ ($T/T_c \ll 1$)

($L = \tanh(L \frac{T_c}{T}) \propto 1 - 2e^{-2 \frac{T_c}{T} L} \approx 1 - 2e^{-2 \frac{T_c}{T}}$)

Tip: 画出 $L(T)$ 图, 发现与实验测得 Fe, Co, Ni, FeO₂ 符合还不错

β. 其余热力学与临界行为; 完全随机过程

$U_0(T) = -\frac{1}{2} J N L^2$ ($T < T_c$, 内场), $C_0(T) = \frac{\partial U_0}{\partial T} = \frac{N k L^2}{(T/T_c)^2 (1-L^2) - T/T_c}$ ($T < T_c$)



在 $T = T_c$ 处, $U_0(T)$ 连续, $T > T_c$ 时, $C_0(T) = 0$, $T \rightarrow T_c^-$ 时, 利用 $L(T) \propto \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \Rightarrow C_0(T \rightarrow T_c^-) = \frac{3}{2} k N$

引看到在临界点处出现了不连续 $T \rightarrow 0$ 时, $C_0(T) \propto 4 k N (\frac{T_c}{T})^2 e^{-2T_c/T} \rightarrow 0$

系统在 $T > T_c$ 后 $U = C = 0$ 且由于近似下, 序参量在 $T > T_c$ 时完全为零, 若要求 $\delta F = 0$, 在 $T > T_c$ 时,

完全无序的状态带有的熵 $-TS$ 很大, 因此引在 $S = S_{\text{Shannon}}$.

利用 Nernst 定理: $S(T_c) = \int_0^{T_c} \frac{C_0(T) dT}{T} = \int_0^{T_c} \frac{\partial U}{\partial T} = k N \ln 2$.

是 2^N 个自旋子做无序子系统的熵, 即为完全无序

$\chi(B, T) = (\frac{\partial M}{\partial B})_T = N \mu (\frac{\partial L}{\partial B})_T = \frac{N \mu^2}{k} \frac{1-L^2}{T - T_c(1-L^2)}$

若 $L \ll 1$ (在 $T \rightarrow 1$ 时, 对很大 B 成立) 在 $T \rightarrow T_c$ 时, $B \rightarrow 0$ 也成立) 引 $\chi_0(T) \propto \frac{N \mu^2}{2k} (T_c - T)^{-1}$ ($T \rightarrow T_c^-, B \rightarrow 0$)

$\chi_0(T) \propto \frac{N \mu^2}{k} (T - T_c)^{-1}$ ($T \rightarrow T_c^+, B \rightarrow 0$)

K上CP为 Curie-Weiss 方程 ($T > T_c$ 式子形式上5层里方程类似)

与 §2 对比发现 符合很好, 但推断出的 T_c 值全大于实验值.

在 $T \rightarrow 0$ 时, $\chi_o(T) \propto \frac{4NM^2}{k} e^{-2T_c/T}$

最后考虑 $T = T_c$ 时, L 与 B 的标度关系. $L \propto (\frac{3M}{kT_c} B)^{1/3}$ ($T = T_c, B \rightarrow 0$)

Att: 气液相变中, 各对应物理量的临界行为的幂次指数与铁磁相变完全一致

$$L \propto \psi(v), B \propto \pi_{cp}, C \propto C_v, \chi \propto \chi_T$$

霍伊近似方程与随机混合近似具有严格对应关系

$$U_o = -J(\frac{1}{2}qN - 2q\bar{N}_+ + 4\bar{N}_{++}), \text{ 又有 } U_o = -\frac{1}{2}JTN\bar{L}^2, \bar{N}_+ = \frac{1}{2}N(\bar{L}+1) \Rightarrow \bar{N}_{++} = \frac{1}{8}qN(1+\bar{L})^2 \Rightarrow \frac{\bar{N}_{++}}{\frac{1}{2}qN} = (\frac{\bar{N}_+}{N})^2$$

这代表近邻相互作用为“+”概率, 即为“+”概率平方, or $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$ (i, j 为相邻) 代表自旋间无相互作用.

亦即除了统计权重 (L) 外, 并无其他序, 因此, 可看成 $\frac{N}{2}(1+\bar{L})$ 与 $\frac{N}{2}(1-\bar{L})$ 的两种自旋的随机分布 (均匀混合)

$$\text{且有 } \bar{N}_{++} = \frac{1}{2}qN(\frac{1+\bar{L}}{2})^2, \bar{N}_{--} = \frac{1}{2}qN(\frac{1-\bar{L}}{2})^2, \bar{N}_{+-} = \bar{N}_{-+} = \frac{1}{2}qN\frac{1-\bar{L}^2}{4}, \frac{\bar{N}_{++}\bar{N}_{--}}{(\bar{N}_{+-})^2} = \frac{1}{4}$$

§6. 伊辛模型的一级近似. (在 $q \gg 1$ 时 \rightarrow 霍伊近似)

霍伊近似有两种情形: ^{B-W} 平均场与随机混合

相应的一级近似有两种: Bethe 近似与唯化学近似 (各自对应霍伊的 T-1 级)

它们用于 Ising Model 可获得相同结果, 但若引入更力所, 二种方法结果会不同

α . Bethe 近似

自旋间无相互作用, 且互相独立, 不受中后

将给定自旋 σ_o 及其最近邻的 q 个自旋 σ_j 视为一个群, σ_o 在中

在写 z 能时, σ_o 与其自旋的相互作用严格写出, 而其与自旋的相互作用能由平均场写出.

对这 $q+1$ 个自旋的 z 能为 $z_{q+1} = -\mu_B \sigma_o - J \sum_{j=1}^q \sigma_o \sigma_j - \mu(B+B') \sum_{j=1}^q \sigma_j$ (B' 为内场, 由 $\bar{\sigma}_o = \bar{\sigma}_j$ 的自洽条件决定)

用配分函数写出该群对应的 $Q = \sum_{\sigma_o, \sigma_j} e^{\beta[\mu_B \sigma_o + J \sum_{j=1}^q \sigma_o \sigma_j + \mu(B+B') \sum_{j=1}^q \sigma_j]}$, 并引入 $\alpha = \beta \mu_B, \alpha' = \beta \mu_B', r = \beta J$ 代入

$$\Rightarrow Q = Q_+ + Q_-, \text{ (+, -) 按 } \sigma_o \text{ 划分, } Q_{\pm} = \sum_{\sigma_j} e^{\pm \alpha + (\alpha + \alpha' \pm r) \sum_{j=1}^q \sigma_j} = e^{\pm \alpha} [2 \cosh(\alpha + \alpha' \pm r)]^q$$

$$\bar{\sigma}_o = \frac{Q_+ - Q_-}{Q_+ + Q_-}, \bar{\sigma}_j = \frac{1}{q} \left(\sum_{j=1}^q \sigma_j \right) = \frac{1}{q} \frac{\partial \ln Q}{\partial \alpha'}, \text{ 根据自洽场条件, } \bar{\sigma}_o = \bar{\sigma}_j \text{ 得}$$

$$e^{2\alpha'} = \left[\frac{\cosh(\alpha + \alpha' + r)}{\cosh(\alpha + \alpha' - r)} \right]^{q-1}, \text{ 由此可求出 } \alpha', \text{ 亦即 } B' \text{ 与 } \sigma$$

在求自旋自发磁化时, 令 $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha' = \frac{q-1}{2} \ln \left[\frac{\cosh(\alpha' + r)}{\cosh(\alpha' - r)} \right]$

在 $r=0$ 时, 2 级有 $\alpha' = 0$, 无自发磁化, 因此仅当 $r > r_c$ 时才有自发磁化

$\alpha' = 0$ 为平凡解, 若要求有 $\alpha' > 0$ 的解, 则与霍伊方程有关, 由于 $\alpha' \rightarrow \infty$ 时, 右侧 $\rightarrow 0$, 因此 ^{居里点}

$$\text{要求右侧在霍伊点导数 } (q-1) \tanh r > 1, \Rightarrow r > r_c = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q}{q-2} \right) \text{ or } T < T_c = \frac{2J}{k} \times \left[\ln \left(\frac{q}{q-2} \right) \right]^{-1}$$

Tip: 在一级近似下 $q=2$ (-1级) 时, 不存在相变, 平均场判断失效.

对于16个行为， α' 16个可由左列三所导为 $-\frac{2}{3} \tanh r \operatorname{sech}^2 r$ 的。

则在 $r \rightarrow r_c$ 时有 $\alpha' \propto \left\{ 3 \cosh^2 r \left[1 - \frac{1}{(q-1) \tanh r} \right] \right\}^{1/2} \Rightarrow \alpha' \propto \left[\frac{3(q-1)^2}{q^2-2q} \right]^{1/2} (r-r_c)^{1/2} \propto \left[\frac{3(q-1)^2}{q^2-2q} \times \frac{1}{r_c} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2}$

故考虑点 \bar{L} 的16个行为， $\bar{L} = \bar{\sigma} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+ + \omega_-} \Rightarrow \bar{L} = \frac{\sinh(2\alpha + 2\alpha')}{\cosh(2\alpha + 2\alpha') + e^{-2r}}$

在 $B \rightarrow 0$ 极限 ($\alpha \rightarrow 0$) 下有 $\bar{L}_0 \propto \frac{2}{q-1} \alpha' \propto (1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}$ (与零温近似行为一致，且在 $q \rightarrow +\infty$ 时逼近为重近似的)

β. 准化学近似

首先用 ω, α' 与 r 来表征 N_{++}, N_{--} 与 N_{+-} ，这可以用通过升并-降算符作用得到获得

因此先考虑 σ_0, σ_1 (可中任-个) 以外的自由自旋部分

$\Rightarrow \Omega = \sum_{\sigma_0, \sigma_1} \left(e^{\alpha \sigma_0 + (\alpha + \alpha') \sigma_1 + r \sigma_0 \sigma_1} \times [2 \cosh(\alpha + \alpha' + r \sigma_0)]^{2^N} \right)$ 并写成 $\Omega_{++} (\sigma_0 = \sigma_1 = 1), \Omega_{--} (\sigma_0 = \sigma_1 = -1), \Omega_{+-} (\sigma_0 = -\sigma_1) = 4\Omega$

并利用 $\Omega_{++} : \Omega_{--} : \Omega_{+-} = \bar{N}_{++} : \bar{N}_{--} : \bar{N}_{+-}$ ，并利用 $\bar{N}_{++} + \bar{N}_{--} + \bar{N}_{+-} = \frac{1}{2} g N$ 归一化有

$(\bar{N}_{++}, \bar{N}_{--}, \bar{N}_{+-}) = \frac{1}{2} g N \frac{(e^{2\alpha + 2\alpha' + r}, e^{-2\alpha - 2\alpha' + r}, 2e^{-r})}{2 [e^r \cosh(2\alpha + 2\alpha') + e^{-r}]}$ ，并有 $\frac{\bar{N}_{++} \bar{N}_{--}}{(\bar{N}_{+-})^2} = \frac{1}{4} e^{4r} = \frac{1}{4} e^{4\beta J}$

与随机混合明显不同，随机有 $\frac{\bar{N}_{++} \bar{N}_{--}}{(\bar{N}_{+-})^2} = \frac{1}{4}$ ($\bar{N}_{++} = \bar{N}_{--}^2, \bar{N}_{--} = \bar{N}_{++}^2, \bar{N}_{+-} = \bar{N}_{++} \bar{N}_{--} \times A_2$)

在 $J > 0$ 时，即存在反铁磁，系统相变随机更倾向于形成有序。

★ (准化学近似) 若将 $2\uparrow \rightleftharpoons \uparrow + \downarrow$ 视为化学反应过程 (满足守恒定律, $\Delta E = 4J$ / 个)

$\frac{\bar{N}_{++} \bar{N}_{--}}{(\bar{N}_{+-})^2} = \frac{1}{4} e^{4\beta J} = e^{\beta \Delta E}$ ，形式上与 Law of the mass action - 法 $\frac{1}{4} e^{\beta \Delta E}$ 为 反应平衡常数

($J \neq 0$) 在 $\alpha, \alpha' \rightarrow 0$ 时，长程序不存在，但 $\frac{\bar{N}_{++} \bar{N}_{--}}{(\bar{N}_{+-})^2} \neq \frac{1}{4}$ 说明短程序依旧存在，短程序仅在 $r \rightarrow 0$ 即 $T \rightarrow +\infty$ 时消失

★ 短程序。在随机混合中应用了不存在短程序的公式，现在改用更精确的短程序公式 (在 $T > T_c$ 时)

即 $(\bar{N}_{++}, \bar{N}_{--}, \bar{N}_{+-})_{T=0} = \frac{1}{2} g N \frac{(e^r, e^r, e^{-2r})}{4 \cosh r}$

最后再用 $\bar{N}_{++}, \bar{N}_{--}, \bar{N}_{+-}$ 各自比例来计算所有热力学量。

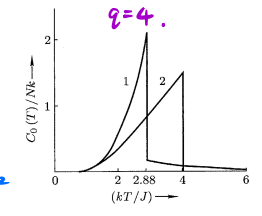
例如 $\alpha = 0$ ($B \rightarrow 0$) 下的 U_0 与 C_0 ， $U_0 = -J \left(\frac{1}{2} g N - 2g \bar{N}_{+-} + 4\bar{N}_{++} \right) = -\frac{1}{2} g J N \frac{\cosh(2\alpha') - e^{-2r}}{\cosh(2\alpha') + e^{-2r}}$ ， α' 由自1个方程给出

在 $T > T_c$ 时， $\alpha' = 0 \Rightarrow U_0 = -\frac{1}{2} g J N \tanh r$ ， $C_0(T) / kN = \frac{1}{kN} \left(\frac{\partial U_0}{\partial T} \right) = \frac{1}{2} g r^2 \operatorname{sech}^2 r (T > T_c)$ ， $T \rightarrow \infty, C_0(T) \propto T^{-2}$

(Tip: 由于体系仍有短程序，并非处于完全无序状态，才会发热， $C_0(T)$ 在 $T > T_c$ 时不为零)

若次要计算比起 (Bethe 模型) 更加精确 ($q=4$) 比更曲线

按下来考虑磁场的行为，在 $T > T_c^+$ 时， $C_0(T_c^+) \rightarrow \frac{1}{2} k N q r_c^2 \operatorname{sech}^2 r_c = \frac{1}{8} k N \frac{q^2(q-2)}{(q-1)^2} \left(\ln \frac{q}{q-2} \right)^2$



$T > T_c^-$ 时 $\alpha' \neq 0$ ，且 $\alpha' \propto (1 - \frac{T}{T_c})^{1/2}$ ，首先要在 U_0 中代入 α' 得到 $\Rightarrow C_0(T_c^-) \rightarrow \frac{1}{8} k N \frac{q^2(q-2)(3q-2)}{(q-1)^2} \left(\ln \frac{q}{q-2} \right)^2$

发现比 T_c^+ 处值大 $3q-2$ 倍。在 $q \gg 1$ 时么还不作为零近似

在 $B \neq 0, T > T_c$ 时， $\alpha \neq 0 \Rightarrow \bar{L} \propto (3q^2 u / (q-1)(q-2) k T_c)^{1/3} B^{1/3} (T = T_c, B \rightarrow 0)$

(Especially, $q=2$ 时，Bethe 近似估算是错误的 (错))

Tip: 最后，发现 $q=2$ 时不收敛，原因在于相互作用过于短程，当 $J_{ij} \propto |i-j|^{-CH}$ ， σ_i 全相反， σ_i 不全相反， σ_i 不收敛

但对应准化学 ($q=2$)，发生相反，原因在于相互作用范围更大，相互抵消更迭

(例如由 Peierls 证明, 在 $d=2$ or 3 时 ($q=4$ or 6), 将基态/β或西个时在 $T < T_c$ 时, 火的定带来的 α 的 $-TS$ 大于自由能升高, 予以自由能升高, 因此基态熵为零, 存在低温长程序) 值得注意的, 近似彼此不同, 但在零件行为上, 都给出了正确结果!

§7. 临界指数

相变系统在临界点附近的临界行为通常有幂次奇异性, 并由临界指数描述

要确定序参量 m 以及对应序场 h . 且在 $h \rightarrow 0$ 时 $m \rightarrow m_0$, m_0 在 $T \geq T_c$ 时为零, $T < T_c$ 时不为零

(例如对铁磁相变, $m = \bar{L}$, $h = \mu B / kT_c$; 对气液相变, $m = (\rho_l - \rho_c)$ or $(\rho_g - \rho_c)$, $h = (P - P_c)$)

3) 临界指数 $\beta, \gamma, \delta, \alpha, \alpha'$

$m_0 \sim (T_c - T)^\beta$ ($T \rightarrow T_c^-$); $\chi \sim (T - T_c)^{-\gamma}$ ($T \rightarrow T_c^\pm$); $\chi_c = (\frac{\partial m}{\partial h})_{T, h \rightarrow 0} \sim \begin{cases} (T - T_c)^{-\gamma} & (T \rightarrow T_c^+) \\ (T_c - T)^{-\gamma'} & (T \rightarrow T_c^-) \end{cases}$

$m|_{T=T_c} \sim h^{1/\delta}$ ($h \rightarrow 0$); $C_v = (\frac{\partial E}{\partial T})_v \sim \begin{cases} (T - T_c)^{-\alpha} & (T \rightarrow T_c^+) \\ (T_c - T)^{-\alpha'} & (T \rightarrow T_c^-) \end{cases}$

对气液相变 $|P - P_c|_{T=T_c} \sim (\rho - \rho_c)^\delta$ ($T=T_c, \rho \rightarrow \rho_c$)

Tip: 对 C_v 行为, 有时 α or $\alpha' \rightarrow 0$, 此时行为 $\sim \frac{|T - T_c|^{-1} - 1}{\lambda}$, 在 $h \rightarrow 0$ 时 $\sim -h |T - T_c|$ 变为对数发散

对铁磁(平均场)与气液(范德瓦耳斯)相变, 给出的临界指数均为

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \gamma' = 1, \quad \delta = 3, \quad \alpha = \alpha' = 0$$

临界指数	磁性系统 ^(a)	气-液系统 ^(b)	二元液体混合物 ^(c)	二元合金 ^(d)	铁电系统 ^(e)	超流 ^4He ^(f)	平均场结果
α, α'	0.0 - 0.2	0.1 - 0.2	0.05 - 0.15	—	—	-0.026	0
β	0.30 - 0.36	0.32 - 0.35	0.30 - 0.34	0.305 ± 0.005	$0.33 - 0.34$	—	1/2
γ	1.2 - 1.4	1.2 - 1.3	1.2 - 1.4	1.24 ± 0.015	1.0 ± 0.2	无法得到	1
γ'	1.0 - 1.2	1.1 - 1.2	—	1.23 ± 0.025	1.23 ± 0.02	无法得到	1
δ	4.2 - 4.8	4.6 - 5.0	4.0 - 5.0	—	—	无法得到	3
ν	0.62 - 0.68	—	—	0.65 ± 0.02	$0.5 - 0.8$	0.675	1/2
η	0.03 - 0.15	—	—	$0.03 - 0.06$	—	—	0

对比实验结果, 发现实验上确有对不同的系统

临界指数近似相等, 但与平均场给出的值还略

有差距.

①. 指数的相互关联性.

并不完全独立, 关联可以通过 $\begin{cases} \text{热力学态的不等式} \\ \text{现代相变理论获得} \end{cases}$ 且一般仅有两个指数真正独立.

②. 由系统的什么特性决定? (or 为何具有普适性)

仅与极少的特性(参量)相关 $\begin{cases} \text{系统所占} \\ \text{空间(长度 } d) \end{cases}$; 序参量分量数目 n ; 微观相互作用范围(长程 or 短程)

例如仅与最近邻相互作用是短程例子.

Tip: 以下讨论均默认相互作用短程, 因此指数仅与 d, n 相关, 且的 d, n 为连续变量.

在 Bethe 近似中, d 仅通过 q 起作用, 但指数与 q 无关, 实际上指数直接依赖 d , 在固定 d 下与 q 无关

对 n , Ising Model 中 $n=1$ 具有离散 ($\sigma_i = \pm 1$) 对称性; 而也有 $n \geq 2$ ($\sigma_i, \alpha = 1, \dots, n$) 的连续对称性 ($\sigma_i \in [-1, 1]$) 模型 \rightarrow Heisenberg

前者, $d \leq 1$ 时 $T_c = 0$, $d > 1$ 时 $T_c \neq 0$; 后者 $d \leq 2$ 时 $T_c = 0$, $d > 2$ 时 $T_c \neq 0$ ($d=2, n=2$ 特殊)

= 普适指数均依赖 d, n , 仅当 $d > 4$ 时与 d, n 无关, 值与平均场一致

Tip: 对给定的 d, n , 指数与经典 or 量子处理自反元变

③如何从第一性原理计算

Chapter XIII 收敛性分析; Chapter XIV 用重整化群方程的自洽分析

§8. 热力学不等式

Rushbrooke inequality: 由热力学, 任何经历相变的物理系统, $\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2$.

利用变化 $C_p > C_v$ 的公式, 再由临界指数 α 即可证明

$$C_H - C_m = -T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_m \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H = T \chi^{-1} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2 \quad \text{由于 } \lim_{T \rightarrow T_c} C_H / C_m = 1, \text{ 因此点 } C_v \text{ 对应的为 } C_m, \text{ 也即为对 } C_H$$

$$C_m \geq 0 \Rightarrow C_H \geq T \chi^{-1} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2, \text{ 若利用 } T \rightarrow T_c^- \text{ 的幂次关系并让 } H \rightarrow 0 \text{ 则有}$$

$$\Rightarrow D_1 \times (T_c - T)^{-\alpha'} \geq D_2 T_c (T_c - T)^{\gamma' + 2(\beta-1)} \Rightarrow (T_c - T)^{\alpha' + \gamma' + 2(\beta-1)} \leq D_3$$

在 $T \rightarrow T_c^-$ 时也成立到 $\alpha' + \gamma' + 2\beta - 2 \geq 0$. 亦即上式

Griffiths inequality: $\alpha' + \beta(\delta+1) \geq 2$ (KI 中的 α, β, γ' 均变为 T_c^- , 但 GI 中与 $\delta(T-T_c)$ 取起来)

$$\text{利用 } \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_m = -S, \quad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_m = -C_v / T \leq 0 \quad \text{因此对 } T \text{ 上凸}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial M} \right)_T = H \quad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_T = \frac{1}{\chi} \geq 0 \quad \text{因此对 } M \text{ 下凸}$$

$$\text{引} \lambda \quad A^*(T, M) = [A(T, M) - A(T_c, 0)] + (T - T_c) S(T_c, 0)$$

$$S^*(T, M) = S(T, M) - S(T_c, 0)$$

在 $T_1 < T_c$ 时, 因 $M = 0$, 利用上凸有 (A^* 也上凸)

$$A^*(T, M_1) \leq A^*(T_1, M_1) - S^*(T_1, M_1) (T - T_1)$$

在 $T_1 = T_c$ 时, $M = 0$, 利用上凸有

$$A^*(T, 0) \leq A^*(T_c, 0) = 0 \quad (S^*(T_c, 0) = 0)$$

令 $T = T_1$, 再利用 $H = 0$ 恒开条件下有 $A^*(T_1, M_1) = A^*(T_1, 0)$, $S^*(T_1, M_1) = S^*(T_1, 0)$ (M_1 为自发磁化强度)

$$\Rightarrow A^*(T_c, M_1) \leq -S^*(T_1, 0) (T_c - T_1) \quad \text{, 对 } T_1 < T_c \text{ 均成立}$$

令 $T_1 \rightarrow T_c^-$, 则有 $M_1 \rightarrow 0$, $M_1 \sim (T_c - T_1)^\beta$

$$A^*(T_c, M_1) = \left[\int_0^{M_1} H dM \right]_{T=T_c} \sim D M_1^{\delta+1} = D' (T_c - T_1)^{\beta(\delta+1)}$$

$$S^*(T_1, 0) = \int_{T_c}^{T_1} \frac{C(T, 0)}{T} dT \sim \frac{D''}{T_c} (T_c - T_1)^{1-\alpha'}$$

$$\text{代入得 } (T_c - T_1)^{2-\alpha'-\beta(\delta+1)} \geq D''' > 0, \text{ 由此有 } \alpha' + \beta(\delta+1) \geq 2$$

Extra: 其它的 Griffiths 不等式有 $\gamma' \geq \beta(\delta-1)$; $\gamma \geq (2-\alpha)(\delta-1)/(\delta+1)$ 等.

Tip: 代入 $\alpha = \alpha' = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \gamma' = 1$, $\delta = 3$ (平均场), 可得以上不等式均成为等式

§9. Landau 唯象理论

London 提出, 在临界点附近, 系统的自由能可以展开为序参量的幂级数

平衡位置由自由能对序参量的导数为零确定.

① $h=0$

对于零场情形, 由于 \mathbb{Z}_2 对称性, $\psi_0(t, m_0)$ 中不含 m_0 奇次项

$$\psi_0(t, m_0) = q(t) + r(t)m_0^2 + s(t)m_0^4 + \dots \quad (t = \frac{T-T_c}{T_c}, |t| \ll 1)$$

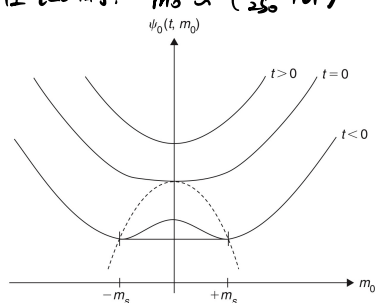
$$q(t) = \sum_{k=0} q_k t^k, \quad r(t) = \sum_{k=0} r_k t^k, \quad s(t) = \sum_{k=0} s_k t^k \quad (\text{假设 } s(t) > 0 \text{ 在 } |t| \ll 1 \text{ 时})$$

那上序参量平衡位置对上式对 m_0 求偏导, 并略去 m_0^4 以上项

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial m_0} = 2r(t)m_0 + 4s(t)m_0^3 = 0 \Rightarrow m_0 = \sqrt{\frac{r(t)}{2s(t)}} \text{ or } 0. \quad \text{对 } t > 0 \text{ 时的平衡位置}$$

由于 m_0 不会取, 所以 $r_0 = 0$. 取 $r(t)$ 仅有 $r_1 t$ 项, $r_1 > 0, s_0 > 0$ 则

在 $t < 0$ 时, $m_0 \propto (\frac{r_1}{2s_0} |t|)^{1/2} \quad (t \rightarrow 0^-)$. 而令 $\beta = \frac{1}{2}$ 如此, 在 $t > 0$ 时, 平衡位置不存在



$$\psi_0(t, m_0) \propto q_0 + r_1 t m_0^2 + s_0 m_0^4, \quad s_0, r_1 > 0.$$

且由上 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} = \frac{1}{\chi} > 0$, 因此中间一段应视为平衡 (t < 0 时)

② $h \neq 0$.

此时, 仅在 ψ_0 中多加一项 $-hm$ ($h > 0$) 若不考虑 hm 项更可以.

$$\psi_h(t, m) = -hm + q(t) + r(t)m^2 + s(t)m^4.$$

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial m} = -h + 2r(t)m + 4s(t)m^3 = 0 \quad \text{为平衡位置 } m \text{ 满足方程. (且令即使 } t > 0, m \neq 0)$$

$$\text{磁化率 } \chi = \left(\frac{\partial m}{\partial h} \right)_{h \rightarrow 0} = \frac{1}{2r(t) + 12s(t)m^2}, \quad \text{因此 } \chi(t \rightarrow 0^+) = \frac{1}{2r_1} \sim \frac{1}{2r_1} t^{-1} \quad (r=1)$$

$$\text{又有 } t \rightarrow 0^-, \quad m \rightarrow \left(\frac{r_1}{2s_0} |t| \right)^{1/2} \Rightarrow \chi(t \rightarrow 0^-) = \frac{1}{4r_1} |t|^{-1} \quad (r'=1)$$

$$h \text{ 与 } m \text{ 关系: 若令 } t=0 \Rightarrow m = \left(\frac{h}{4s_0} \right)^{1/3}, \quad \text{即 } \delta=3$$

C_h 与 C_m : 在 $t \rightarrow 0^+$ 时 $h \rightarrow 0$ 则有 $m \rightarrow 0$. 即有 $\psi_0(t, m) = q(t) \quad (t \rightarrow 0^+)$

$$C_m = -\left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} \right)_m \sim -(2q_2 + 6q_3 t + \dots), \quad C_h = -\left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} \right)_h = C_m$$

在 $t \rightarrow 0^-$ 时, $h \rightarrow 0$ 无 $m \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} C_m &= -\left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} \right)_m = -(2q_2 + 6q_3 t + \dots) + (2r_2 + \dots)m^2 + (2s_2 + \dots)m^4 \\ &= -[2q_2 + (6q_3 - \frac{r_1 r_1}{s_0})t + \dots] \end{aligned}$$

$$C_h - C_m = -\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_m \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)_h = \left(\frac{\partial h}{\partial m} \right)_t \left[\left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)_h \right]^2 = r_1^2 / 2s_0.$$

因此 C_m 连续, 但一阶导数不连续, C_h 不连续, 且对它们有 $\alpha = \alpha' = 0$.

Tip: q_k, r_k, s_k 代表了系统的相互作用性质, 但不同的系统对应相同指数行为

同样1/6并行的系统可归入一个普适类，它由 d, n 以及微扰相互作用范围决定

在 k 上， d 起作用， $n=1$ ，相互作用为长程。(对 $d > 4$ ，平均场对 V_n 仍适用)

§10. 热力学函数的标度假设.

考虑 Landau 理论中的状态方程，有 $h(t, m) \propto 2r_1 t m + 4s_0 m^3$

若以 $h(t, m)/|t|^{3/2}$ ， $m/|t|^{1/2}$ 作为新的变量，

$$\Rightarrow h(t, m) \propto \frac{r_1^{3/2}}{s_0^{1/2}} |t|^{3/2} \left[2 \operatorname{sgn}(t) \left(\frac{s_0^{1/2}}{r_1^{1/2}} \frac{m}{|t|^{1/2}} \right) + 4 \left(\frac{s_0^{1/2}}{r_1^{1/2}} \frac{m}{|t|^{1/2}} \right)^3 \right]$$

反解出 m 有 $m(t, h) \propto \frac{|t|^{1/2} r_1^{1/2}}{s_0^{1/2}} \lambda \left(\frac{s_0^{1/2}}{r_1^{1/2} |t|^{3/2}} h \right)$

$$-m + \left[-h + 2r_1 t m + 4s_0 m^3 \right] \frac{\partial m}{\partial h} = -m$$

↑ 对 h 求导得 $1 \pm 3m^2 (-m)$

写出自由能中奇异的部份 $\psi_h^S(t, m) \propto -hm + r_1 t m^2 + s_0 m^4 \propto \frac{r_1^2 t^2}{s_0} \mu \left(\frac{s_0^{1/2}}{r_1^{3/2} |t|^{3/2}} h \right) = \psi^S(t, h)$

可见得到，有奇异性的干长被减少了。变化于用标度 $|t|^{1/2}$ 与 $|t|^{3/2}$ 对 m, h 缩放。

取 $(h, t, m) \rightarrow \left(\frac{h}{|t|^{3/2}}, \frac{t}{|t|}, \frac{m}{|t|^{1/2}} \right)$ $\psi_h^S(t, m) \rightarrow \left(\frac{\psi_h^S}{|t|} \right) \left(\frac{h}{|t|^{3/2}} \right)$

标度假设.

抽下来，将 $\psi^S(t, h)$ 写为 $\psi^S(t, h) \propto |t|^{2-\alpha} f(Gh/|t|^\Delta)$ ， α, Δ 称为普适指数

对给定普适类中的系统，普适指数相同。(f 为一个普适函数，并取其在 $t \rightarrow 0$ 与 $t \rightarrow 0$ 分别为 f_+, f_-)

F, G 为非普适参量，用于表征系统特有性质

预期 α, Δ 给出所有临界指数， F, G, f 给出带以件幅度。

α. 对临界指数与幅度的推导.

① 在 $h \neq 0$ 时 ($m \neq 0$)，此时 t 从 $0^- \rightarrow 0^+$ 不久出现奇异性。由此有 两侧临界性质相同， $\alpha = \alpha', \beta = \beta' ??$

(由 $h < 0, t < 0$)

$$m(t, h) = - \left(\frac{\partial \psi^S}{\partial h} \right)_t = -FG |t|^{2-\alpha-\Delta} f'(Gh/|t|^\Delta)$$

$$\chi(t, h) = - \left(\frac{\partial^2 \psi^S}{\partial h^2} \right)_t = -FG^2 |t|^{2-2\Delta-\alpha} f''(Gh/|t|^\Delta)$$

令 $h \rightarrow 0$ 的自发磁化强度。 $m(t, 0) = -FG |t|^{2-\alpha-\Delta} f'(0) = B |t|^\beta$ (B 可无限随 $t \rightarrow 0$ 不同)

由此 $B = -FG f'_\pm(0)$ ， $\beta = 2 - \Delta - \alpha$ ， $f'_\pm(0)$ 指在 $t \rightarrow 0^\pm$ 时 f 在零处导数 (注意在 $t \rightarrow 0^+$ 时， $f'_+(0) = 0$ ，因此无 $f'_\pm(0)$)

令 $h \rightarrow 0$ 得弱场磁化率， $\chi(t, 0) = \begin{cases} C_+ |t|^{-\gamma} & (t \rightarrow 0^+) \\ C_- |t|^{-\gamma} & (t \rightarrow 0^-) \end{cases}$

由此 $C_\pm = -FG^2 f''_\pm(0)$ ， $\gamma = \alpha + 2\Delta - 2$ 。

由上有 $\Delta = \gamma + \beta$ 以及 $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ (Rushbrooke)

$$m(t, h) = -FG |t|^\beta f'(Gh/|t|^\Delta) = -FG \left(\frac{Gh}{|t|^\Delta} \right)^{-\beta/\Delta} (Gh)^{\beta/\Delta} f'(Gh/|t|^\Delta) = -FG^{1+\beta/\Delta} h^{\beta/\Delta} g(Gh/|t|^\Delta)$$

由此 $|t| = (Gh)^{1/\Delta} \left[g^{-1} \left(-\frac{m}{FG^{1+\beta/\Delta} h^{\beta/\Delta}} \right) \right]^{-1}$ 在 $|t|=0$ 等温线上有 $m \propto h^{\beta/\Delta}$

由此有 $\delta = \Delta/\beta$ 。以及 $\beta(\delta+1) + \alpha = \alpha + 2\beta + \gamma = 2$ (Griffiths) ($\beta\delta = \beta + \gamma$ ， $\gamma = (2 - \alpha(\delta+1))/(\delta+1)$ 等)

弱场磁化率 $C_h^{(S)}(t, 0) = - \left(\frac{\partial^2 \psi^S}{\partial h^2} \right)_h \Big|_{h \rightarrow 0} = -(2-\alpha)(1-\alpha) F |t|^{-\alpha} \times f_\pm(0)$ 。(注意 f 中奇异性在 $h \rightarrow 0$ 后消失，所以 $|t| \neq 0$)

可见到的确得出 $C_h^{(S)}$ 随 α 变化。

以上用 α 与 Δ 两个普适常数 + 标度假设 \rightarrow 所有临界指数; 表明又有两个临界指数存在

Tip: 各幅值互不相同, 但由于 f 为普适函数, 那么 $\frac{f_{\pm}(t)}{f_{\pm}(t_0)}$, $\frac{FC_{\pm}}{B^2} = -\frac{f'_{\pm}(t)}{[f_{\pm}(t)]^2}$ 均普适, 与系统无关

Extra: 普适性存在的根据. 在 $T \rightarrow T_c$ 时, δ 无关取长 \rightarrow 宏观, 导致局域细节不重要, 自标起同.

§11. 关联和涨落的作用

在 Chapter X 中提及, 准弹性散射函数 $S(\vec{q})$ 进而获得 $g(\vec{r})$. $|\vec{q}| = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}$, 因此 $S(\vec{q})$

在准弹性下近似为 $S(0)$, $I(\theta) \propto S(0)$.

散射变大.

涨落

散射由于空间不均匀. 因此空间量的涨落全归向散射.

在接近系统(如液体)临界点时, 散射大大增加, 尤其在小角度.

长程的关联变化

根据 $I(\theta) \propto S(\theta) \propto \tilde{g}(\vec{q}) = \int g(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$. 小角度对应了液体的长波涨落. ($\theta \rightarrow 0$)

与自旋或密度涨落相同

在图 8.2 中 δ 系统在临界点附近对 δ 的散射强度在角度不同, T 不同时的分布

可以看到随着 $T \downarrow$ θ 小的位置散射强度极大. 例如 $\theta=0$ 及 $T=T_c$

推升的关联上 $\theta=0$ 在 $T \rightarrow T_c$ 时发散. ($\theta=0$ 无法实验观测, 因为与入射束重叠)

并写出最大值与 T_c 的关系, $I_{\max}(\theta) \propto k^{-1}$, $T_{\max}(\theta) - T_c \propto k^{\eta}$ ($k \propto \sin \frac{\theta}{2}$, $\theta \rightarrow 0$ 时 $k \rightarrow 0$)

以及 $I_{\max}(\theta) [T_{\max}(\theta) - T_c]^{\eta_1/\eta_2} = \text{Const.}$

临界散射问题起源于长程的分子间微观相互作用的直接作用, 与更关键的长程-长程关联的问题有关

在 $T \rightarrow T_c$ 时, ρ - ρ 关联将变为长程.

以自旋系统为例 自旋-自旋关联函数 $g(i,j) := \overline{\sigma_i \sigma_j} - \overline{\sigma_i} \overline{\sigma_j} = \overline{(\sigma_i - \overline{\sigma_i})(\sigma_j - \overline{\sigma_j})}$ (涨落关联函数 (协方差))

根据 $\mathcal{Q}_N(H,T) = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta \mu H \sum_i \sigma_i} \Rightarrow \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Q}_N}{\partial H} = \overline{M}$

再有 $\frac{\partial^2}{\partial H^2} \ln \mathcal{Q}_N(H,T) = \frac{1}{\mathcal{Q}_N} \frac{\partial^2 \mathcal{Q}_N}{\partial H^2} - \left(\frac{1}{\mathcal{Q}_N} \frac{\partial \mathcal{Q}_N}{\partial H} \right)^2 = \beta^2 [\overline{M^2} - \overline{M}^2]$

称为涨落平方关系.

由此有 $\chi(H,T) = \left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial H} \right)_T = \beta [\overline{M^2} - \overline{M}^2] = \beta \mu^2 \sum_{\langle ij \rangle} g(i,j)$, 即 χ 与关联函数成正比

Tip: 与液体系统涨落-密度压缩率关系类似. 且以上二式均为涨落-耗散定理的平衡极限.

当系统具有平移不变性时有 $\chi(H,T) = N \beta \mu^2 \sum_{\vec{r}} g(\vec{r})$. ($\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $g(\vec{r}) = g(|\vec{r}|)$)

若连续化则有 $\chi(H,T) = \frac{N \beta \mu^2}{\alpha^d} \int d\vec{r} g(\vec{r})$. d 为空间维数, α^d 为单元体积, $N \alpha^d = V$

发现, $\chi(H,T) = \frac{N \beta \mu^2}{\alpha^d} \tilde{g}(\vec{0})$. 即 Fourier 空间中 $\vec{q}=\vec{0}$ 成分.

下一步考虑 $g(\vec{r})$ 与 $\tilde{g}(\vec{q})$ 的数学关系 以下采用平均场.

根据平均场中, $\tanh^{-1} \bar{L} = \frac{qJ\bar{L} + \mu B}{kT}$. 若处在非均匀外场中, $\bar{L} \rightarrow \bar{\sigma}_i$, $B' = \frac{qJ\bar{L}}{\mu} \rightarrow \sum_{\langle ij \rangle} \frac{J}{\mu} \bar{\sigma}_j$, $B \rightarrow H_{\text{eff}}$ (有效场)

则有 $\bar{\sigma}_i = \tanh(\beta \mu H_{\text{eff}})$, $H_{\text{eff}} = H_i + \frac{J}{\mu} \sum_{\langle ij \rangle} \bar{\sigma}_j$

有效场的 ∇^2 .

但若有 H 在格点上位置连续, 那么有 $H_{\text{eff}} \approx H_i + \frac{qJ}{\mu} \bar{\sigma}_i + \frac{J}{\mu} \alpha^d \nabla^2 \bar{\sigma}_i$ (后者为修正项)

其中 $c \ll 1$, α 为铁磁晶格常数, 并假设 $\bar{\sigma}_i$ 对的式在 $\bar{\sigma}_i$ 同因号, 那么 $\nabla^2 \bar{\sigma}_i$ 可近似为:

将 $\tanh u \sim x - \frac{1}{3}x^3$, 并保留临界点附近 $H_i = 1$, $\nabla^2 \bar{\sigma}_i = 1$, $\bar{\sigma}_i = 1$ 且 δ 远 (Landau Theory of $m^4 K$)

$$\Rightarrow \beta \mu H_i = (1 - \beta \epsilon J) \bar{\sigma}_i + \frac{1}{3} (\beta \epsilon J)^3 (\bar{\sigma}_i)^3 - \beta J c \alpha^2 \nabla^2 \bar{\sigma}_i$$

根据临界点 $H_i = 0$, $1 = \beta \epsilon J$. 将故 $h_i = \beta \mu H_i$, $t = \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{\beta_c - \beta}{\beta} \sim \frac{\beta_c - \beta}{\beta_c}$

$$\Rightarrow h_i \sim t \bar{\sigma}_i + \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_i)^3 - c' \alpha^2 \nabla^2 \bar{\sigma}_i, \quad (在 t \rightarrow 0 \text{ 时}) \quad (c' = c/\epsilon \sim 1)$$

可以见到, 这与 Landau 理论同的物态方程类似且考虑了序参量的变化 ($\nabla^2 \bar{\sigma}_i$)

Tip: $\bar{M} = \mu \sum \bar{\sigma}_i$, 故所有 H_i 写成 δH , $\delta \bar{M} = \mu \sum_i \frac{\partial \bar{\sigma}_i}{\partial H_i} = \beta \mu^2 \sum_i g(c, j) \Rightarrow \frac{\partial \bar{\sigma}_i}{\partial H_i} = g(c, j)$

由此对两侧 h_j 求偏导 $\Rightarrow [t + (\bar{\sigma}_i)^2 - c' \alpha^2 \nabla^2] g(c, j) = \delta_{ij}$

在 $t > 0$ 且 $\{h_i\} \rightarrow 0$ 时, $\bar{\sigma}_i \rightarrow 0$, 由此有 $(t - c' \alpha^2 \nabla^2) g(c, j) = \delta_{ij}$

在均匀 (假设没有) 两边因变量 \vec{r} , 令 $\vec{r} = \vec{r}'$, $(t - c' \alpha^2 \nabla^2) g(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ (连续版本)

对两侧做 Fourier 变换 $\Rightarrow \boxed{\tilde{g}(\vec{k}) \propto \frac{1}{t + c' \alpha^2 k^2}}$ (Ornstein-Zernike 结论, 给出了德朗-卡根公式)

Tip: 由此, $\chi \sim g(0) \sim \frac{1}{t}$ 即 $\chi \sim t^{-1}$ ($t \rightarrow 0^+$) 表明在靠近临界点附近 (平均场理论)

对其做 Fourier 逆变换得 $g(r) \sim \int \frac{e^{-i\vec{r} \cdot \vec{k}}}{t + c' \alpha^2 k^2} d^d(k)$, 可由积分求 $\frac{r}{\xi}$ 做.

$\Rightarrow g(r) \sim \left(\frac{\alpha^2}{\xi r}\right)^{(d-2)/2} K_{(d-2)/2}\left(\frac{r}{\xi}\right)$, ($\xi = \alpha(c'/t)^{1/2}$), $K_\mu(x)$ 为第二类修正 Bessel 函数

根据在临界点附近 $K_\mu(x) \sim x^{-1/2} e^{-x}$ ($x \gg 1$) 与 $K_\mu(x) \sim x^{-\mu}$ ($\mu > 0, x \ll 1$)

$g(r) \sim \frac{\alpha^{d+2}}{\xi^{(d+1)/2} r^{d-1/2}} e^{-r/\xi}$ ($r \gg \xi$) $g(r) \sim \frac{\alpha^{d+2}}{r^{d-2}}$ ($r \ll \xi, d > 2$), $g(r) \sim \ln(\xi/r)$ ($r \ll \xi, d=2$) 特特

Tip: 在 $d=3$ 时 $g(r)$, $\boxed{g(r)|_{d=3} \sim \frac{\alpha}{r} e^{-r/\xi}}$ (!!! 三阶中关联函数衰减) 且对 $\forall r$ 成立.

在这里, ξ 用来描述 spin-spin correlation 的延伸距离, 因此 ξ 为关联长度, $\xi = \alpha \left(\frac{c'}{t}\right)^{1/2}$

在 $t \gg 1$ 时, $\xi \sim \alpha$, 而在 $t \rightarrow 0^+$ 时, ξ 将无穷大, $\xi \sim t^{-1/2}$ ($t \rightarrow 0^+$)

在 $t \rightarrow 0^+$ 时, $\xi \rightarrow +\infty$, 由短程相互作用产生的关联会随着靠近相变而变为长程的关联

关联延伸可宏观尺度, 微观不同的系统进而产生相似性.

Tip: 根据定义以及 $I(0) \sim \tilde{g}(0)$, 有 $\frac{1}{I(0)} \sim \frac{1}{\chi} (1 + \xi^2 k^2)$, 在临界点做 $\frac{1}{I(0)}$ 的图 (Ornstein-Zernike 公式)

但在 $t=0$ 时, 系统做非线性, 指数级小于 2

(在 $k \leq 0.1$ 下, 有线性), 纵轴截距给出 $\frac{1}{\chi(t)}$, 斜率给出 $\xi^2(t)/\chi(t)$. 由此在不同 t 下得到 $\chi(t) \delta \xi(t)$

可以见到, 对 t 个因子的 $I(0) \sim \frac{1}{t + c' \alpha^2 k^2}$, 最大值在 $t=0$ 处取得, 有 $\chi \propto k^{-2} \propto 0^{-2}$ (发散)

因此有 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ (平均场下)

§12. 临界指数 ν 与 η

虽然在平均场下得到 $\xi \sim \alpha t^{-1/2}$ ($t \rightarrow 0^+$) 但系统实际上总会有差异.

引入临界指数 ν , $\xi \sim t^{-\nu}$ ($t \rightarrow 0, t \rightarrow 0^+$)

Tip: 在 $t \rightarrow 0$ 时, 反对 $n=1$ 的标量场型需要 $\psi'(t \rightarrow 0)$ 对变量故型 $n \geq 2$, 对 $t \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$. 因此 ψ' 元素型

$$g(r) \sim e^{-r/\xi} \times r^{\nu}, \text{ 而在 } t \rightarrow 0^+ \text{ 时, } \xi \gg r, g(r) \sim r^{\nu'}$$

引入标度指数 η : $g(r) \sim r^{-(d-2+\eta)} \quad (t=0)$

平均场 (含 h), $g(r) \sim h(\xi/r)$ 而二维伊辛模型标度解 $g(r) \sim r^{-\frac{1}{4}}$ 与平均场相同, $\eta = \frac{1}{4}$

但其对更低的标度, 平均场含 $r^{-\frac{1}{2}}$ 很危险, 因此 $\eta \neq 0$.

正如之前用 $|t|^{2\alpha}$, $|t|^\alpha$ 来标度化 ψ^2 与 h , 这里若要标度化 r , 那用含 $|t|^{-\nu}$ 来标度化

$$g(r; t, h) \sim \frac{G(r t^\nu, h t^\alpha)}{r^{d-2+\eta}}, \quad \tilde{g}(k; t, h) \sim \frac{\tilde{G}(k/t^\nu, h/t^\alpha)}{k^{2-\eta}} \rightarrow r^d dr, \text{ 含 } \xi^{2-\eta} \text{ 与 } \eta \text{ 是}$$

其中, Δ, ν 与 η 普适, G 也普适的. 并为此, 这里已略去非普适量.

① 在 $h \rightarrow 0$ 有 $g(r; t, 0) \sim \frac{G(r t^\nu, 0)}{r^{d-2+\eta}}, \quad \tilde{g}(k; t, 0) \sim \frac{\tilde{G}(k/t^\nu, 0)}{k^{2-\eta}}$ 标度含 $t \rightarrow 0$, $g(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad \tilde{g}(k) \sim \frac{1}{k^{2-\eta}}$

利用 $\chi(t, h) \sim \int g(r; t, h) r^{d-1} dr \Rightarrow \chi(t, 0) \sim \int \frac{G(r t^\nu, 0)}{r^{2-\eta}} dr \sim t^{-(2-\eta)\nu} \Rightarrow \nu = (2-\eta)\nu$

Tip: 据 $\xi \sim r^{-\nu} \Rightarrow \chi \sim \xi^{2-\eta}$. 类似地可改写 $0-2$ 标度式: Fisher 标度, $\nu \leq (2-\eta)\nu$

$$\frac{1}{\Gamma(0)} \sim \tilde{g}(k) \sim \frac{1}{\chi} (1 + \xi^{2-\eta} k^{2-\eta}). \text{ 类似解得 } \frac{1}{\Gamma(0)} \sim k^2 \text{ 圆的那块.}$$

②. 若 ν 的标度关系 (含 d) 来标度化 χ $\nu d = 2 - \alpha$

迄今的所有的式中不含 d , 但维数对指数会有影响

随着 ν 趋近临界点, 出现长程关联, 关联长度 $V \sim \xi^d$; 又有在 $h \rightarrow 0, t \rightarrow 0^+$ 时 $f^S(t) \sim t^{2-\alpha} \rightarrow 0$.

$V \rightarrow +\infty$, 因此 V 作为标度, 应当比 $\frac{1}{V} \rightarrow 0$ 才能保证正标度不会反. 也不至于 ξ

由此 $t^{2-\alpha} \sim \xi^{-d} \sim t^{-\nu d}$ 即 $\nu d = 2 - \alpha$. 也得到标度关系. (与 Josephson 标度 $\nu d \geq 2 - \alpha, \nu' d \geq 2 - \alpha'$ 对应)

Tip: "起"的标度在于无需用标度标度化, 为引入其他标度如标度 V .

Tip: 平均场的 $\nu = \frac{1}{2}, \alpha = 0$ 仅当 $d = 4$ 才严格成立, 这也表明这个式子与其他标度关系 d 的不同

并且可以看出, 起标度关系对 $d=3$ 的关系自洽很好, 理论上对 $d=4$ 是较好普适性, 对 $d > 4$ 会出现问题

$$\text{取之得 } \nu d = 2 - \alpha = 2\beta + \gamma = \beta(\delta+1) = \gamma(\delta+1)/(\delta-1) \Rightarrow 2-\eta = d(\delta-1)/(\delta+1) \quad (\text{Fisher-Ham-Guntan 标度, } 2-\eta \leq d(\delta-1)/(\delta+1))$$

由此可估计 η 的下界.

§13. 平均场理论最后一瞥.

平均场理论无法表示真实系统中临界现象的真正性质 最主要由于 忽略了涨落!

α. 可忽略涨落的标度 (平均场成立的标度)

$g(r) = \overline{\sigma_i \sigma_j} - \overline{\sigma_i} \overline{\sigma_j}$. 在足够长标度, 而随看 $t \rightarrow 0^+$, $g(r) \sim \frac{1}{r^{2-d+\eta}}$ 含 ξ , 标度也含 ξ . 将主导标度行为

当 ξ , 在涨落确可忽略时, 平均场成立. Ginzburg 判据: $kT \chi \ll \bar{m}^2$

据 $\chi = (\bar{m}^2 - \bar{m}^2)/kT = \sigma_m^2/kT$. 若 $kT \chi \ll \bar{m}^2$ 即有 $\sigma_m/\bar{m} \rightarrow 0$.

不妨对伊辛模型 (标度) 来应用这个判据 得到平均场成立的条件是 $d > 4$.

在 $t \rightarrow 0^-$ 时, 2张膜 $V \sim \xi^d$. 且有 $\chi = A \xi^d |t|^{-\gamma}$, $\bar{M} = B \xi^d |t|^\beta$, $\xi \sim a |t|^{-\nu}$

$\Rightarrow A' \xi^d |t|^{-\gamma} \ll B' \xi^{2d} |t|^{2\beta} \Rightarrow |t|^{2\beta - \gamma d + \gamma} \gg D'$ 由此引起标度关系. 在相反时, 1张膜 ($\frac{\sigma_m}{\sigma_n}$) 在51同量级

利用标度关系 $\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \Rightarrow |t|^{2-\alpha-\gamma d} \gg D' \nearrow$ 则有 $2-\alpha-\gamma d = 0$ or $\gamma d = 2-\alpha$

若平均场成立, 则有 $\alpha=0, \nu=\frac{1}{2} \Rightarrow |t|^{2-\frac{1}{2}d} \gg D'$ 由此 $d > 4$ 才成立 ($d=4$ 不成立)

Tip: 在 $n \rightarrow \infty$ 的球状模型下, 也有 $d > 4$ 时平均场成立. 而1张膜在随 n 而变, 因此对 n , $d > 4$ 下平均场均成立

经验上则在 $d < 4$ 时, 起标度关系不成立; $d > 4$ 时, ν 与 α 均保持平均场值. (5d, n无义)

也即 $d=4$ 为被忽略子流的 **上临界维度**.

β. 忽略1张膜带来的一些问题. (比热不发散)

在平均场下, $U = -J \overline{(\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j)} = -J \sum_{i,j} \overline{\sigma_i \sigma_j}$

在平均场, 直接用 $\bar{\sigma}^2$ 代替, 那么确有 β 的发散. 在 $t \rightarrow 0^-$ 时 ξ 趋近为 $\frac{2}{3}kN$. $t \rightarrow 0^+$ 时, $S \propto S_{\text{free}}, C_V = 0$.

为视涨落由于 $U_{\text{fluctuation}} = U_f = -J \sum_{i,j} (\overline{\sigma_i \sigma_j} - \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j) = -J \sum_{i,j} g(i,j)$.

$g(i,j)$ 的平均场表达式为 $g(i,j) \sim \begin{cases} e^{-\eta \xi} \times \dots & (r > \xi) \\ \frac{1}{r^{d-1}} \times \dots & (r < \xi) \end{cases}$ 在 $t \rightarrow 0^+$ 时, ξ 趋近大于 $n.n. |r_i - r_j|$. 因此

U_f 将不会发散, 但空所以与 t 无关, 因此 g_{ik} 趋近第二项在 ξ 的 Bessel 函数下 $-P_0$

$U_f / NJ \sim \begin{cases} t^{(d-2)/2} & 2 < d < 4 \\ \ln(1/t) & d=4 \\ t & d > 4 \end{cases}$ 若 $d < 4$, 在 $d < 4$ 时, U_f 发散, 会带来比热发散

(利用 $\xi \sim t^{-1/2}$)

$C_f / NJ \sim \begin{cases} t^{(d-4)/2} & 2 < d < 4 \\ \ln(1/t) & d=4 \\ \text{const} & d > 4 \end{cases}$ 但在 $d > 4$ 时, 与平均场 ξ 及 C_V 的发散, $\alpha = \alpha' = 0$ 一致.

当 $d > 4$, 还可直接看 $\frac{\partial g(i,j)}{\partial t}$ 来看发散. $-\frac{\partial g(i,j)}{\partial t} \sim \alpha^d \int \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0}}{t^2(1+\xi^2 k^2)^2} k^{d-1} dk$ \rightarrow 若 ξ 为1张膜, 一关联长度

因此仅在 $k \leq O(\xi^{-1})$ 内的低波数有贡献, 在 $r_0 \ll \xi$ 时, $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \sim 1$

$-\frac{\partial g(i,j)}{\partial t} \sim \alpha^d \int \frac{k^{d-1} dk}{t^2(1+\xi^2 k^2)^2} \sim t^{-\nu d - 2}$, 平均场下为 $t^{-\frac{1}{2}(d-4)}$. 因此确有在 $d < 4$ 的发散 ($d > 4$ 不发散?)

Tip: 因此有, 是在 $k \leq O(\xi^{-1})$ 的低波数1张膜 (长程1张膜) 对比热发散起主要作用, 而在 $\lambda \ll \xi$ 上的1张膜几乎无贡献