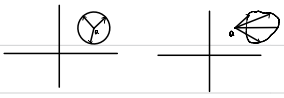
§2 多值函数

2.1 多值函数 支点

考虑 函数 $w=f(z)=\sqrt{z-a}$，当 $z-a=|r|e^{i\theta+2k\pi i}$ 时，$w=\sqrt{|r|}\,e^{i\frac{\theta}{2}+k\pi i}$ $(k\in\mathbb{Z})$

发现 $z-a$ 的值不变，但是 w 的值在 $\sqrt{|r|}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 与 $-\sqrt{|r|}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ 之间改变，这样的函数称为多值函数

无论 w 的多值的来源，事实上基于 $(z-a)$ 的幅角的多值性，即 $(z-a)$ 的幅角的定义，实际上是赋给你数据，例如下述两种情况



左图中，我们认为绕 a 等时针走一圈，$z-a$ 的幅角增加 2π，顺时针减少 2π；

右图中，我们认为绕图路上走一圈，$z-a$ 的幅角回到原先值

支点：当 z 绕 a 无穷小一圈 z 后，函数值 $w(z)$ 发生变化，则称 $z=a$ 为支点。

问题：多值函数是否一定存在支点呢？

不一定，考虑函数 $w=f(z)=\sqrt{z}$，$w=z^{\frac{1}{2}}$ 可以有多个取值，但是绕原点一圈 z 后，z 幅角增加 2π，$z^{\frac{1}{2}}$ 增加 π，w 增加 π，w 的值并未改变，因此 $z=0$ 不是支点。

2.2 无穷远点与支点

例题：讨论 $z=\infty$ 是否为 $w=\sqrt{z-a}$ 的支点？

法一：我们绕 ∞ 处走一圈（注意这一圈中不能包含任意有限点），对于 $\sqrt{z-a}$ 的情况，发现绕 a 走一圈的路径同样可作为绕 ∞ 点走一圈的路径，即该路径会导致 w 的值发生改变，因此 ∞ 是 $\sqrt{z-a}$ 的支点。

类似地，对于 $\sqrt{(z-a)(z-b)}$，我们选择的路径应当包围 a,b 两点的一条路径，当前方发现在该路径上，$(z-a)$，$(z-b)$ 的值均加 $2\pi i$，则 w 值不变，因此 ∞ 点不是 $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 的支点。

法二：作代换 $z=\frac{1}{t}$，$w=\sqrt{\frac{1}{t}-a}=\sqrt{\frac{1-at}{t}}$，我们只需考虑 $t=0$ 是否为支点：

绕 $t=0$ 走任意小一圈，$1-at$ 幅角不变，t 幅角改变，故 w 的值改变，则 $t=0$ 是支点，那么 ∞ 点也是支点。

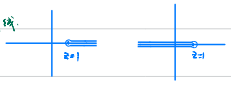
2.3 单值分支与黎曼面

同一个点都对应不同的函数值，这从直观上是不允许的，我们应该想在规定范围内任意一点只能对应一个函数值，这样的区域称为单值分支。

要使函数在域内单值分支，我们需要注意幅角的多值性，有时不能随意绕支点走一圈，于是我们引入割线，并规定在一个单值分支内，随意走不可再回穿过割线。

割线：包括支点的直线，其选择具有一定的任意性

例题：画出 n 种 $\sqrt{z-1}$ 的割线：



此外，对于多个单值分支，我们需要规定幅角，以此来确定该单值分支中任意位置的幅角的值。原则上，只要各单值分支能够使得各函数值都能取到，割线上下岸的幅角可以任意规定。

例题：给出 $\sqrt{z-1}$ 的割线上下岸的幅角规定。

上岸：$\arg(z-1)=0$，下岸：$\arg(z-1)=2\pi$

上岸：$\arg(z-1)=2\pi$，下岸：$\arg(z-1)=4\pi$

这两个单值分支相减与割线出现相同

则上，上岸：$\arg(z-1)=\pi$，下岸 $\arg(z-1)=3\pi$；上岸：$\arg(z-1)=3\pi$，下岸 $\arg(z-1)=5\pi$

也可以减为一个合法的选择，只要遵循对称即可。

事实上，多值函数的多值性意味着一个等平面不足以刻画函数的图像，我们需要多个平面来刻画，你应该手中的割线，正如直接拆出的割线，意即路径

割线，则是制作黎曼面的一种方法，我们把这种多个面粘在一起的结构称为黎曼面

$w=\sqrt{z-a}$ 的黎曼面

$w=\ln z$ 的黎曼面

2.4 根式函数与一般幂函数

多值函数都等来源于开方函数，其中根式函数为一个典型例子。

最简单的根式函数 $\sqrt{z-a}$，有 $z=a$，$z=\infty$ 两个支点。

n 次一般情况要复杂得多，例如 $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 就只有 $z=a$，$z=b$ 两个支点。

幂函数 z^α，当 α 为整数时为单值函数。

当 $\alpha=\frac{q}{p}$ 时，和 p 图示后，z^α 展开，故有 p 个单值分支

当 α 为无理数时，有无穷个单值分支

2.5 $\ln z$ 函数

$w=\ln z$ 与 $w=e^z$ 互为反函数，$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z$ $(k<z)$

具有无穷多个单值分支，$0,\infty$ 为其支点。

2.6 反三角函数

例题：推导 $\arcsin z$，$\arccos z$，$\arctan z$ 的对数表达式

$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=w$，令 $e^{iz}=t$，$2iw=t-\frac{1}{t}$，$t^2-2iwt-1=0$

$t=\frac{2iw\pm\sqrt{-4w^2+4}}{2}=iw\pm\sqrt{1-w^2}$ $\Rightarrow \arcsin z=-i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$ 注收入 $\sqrt{1-z^2}$ 中

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=w$，令 $e^{iz}=t$，$2w=t+\frac{1}{t}$，$t^2-2wt+1=0$

$t=\frac{w\times\sqrt{w^2-1}}{2}=w\pm\sqrt{w^2-1}$ $\Rightarrow \arccos z=-i\ln(z\pm\sqrt{z^2-1})$ 注收入 $\sqrt{z^2-1}$ 中

$\tan z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=w$，令 $e^{iz}=t$，$\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=iw$，$t^2=\frac{1+iw}{1-iw}$

$\Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{1+iw}{1-iw}}$ $\arctan z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$ 注收入 $\ln$ 中

$\arcsin z=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$，$\arccos z=\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})$，$\arctan z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$

为根式函数与 $\ln$ 函数的组合，其分支情况取决于其集

第四章 复变函数的积分

§1 复变积分的柯西定理

1.1 复变积分

考虑复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的积分，$\int_C f(z)\,dz=\int_C(u+iv)\,d(x+iy)$

$=\int_C(u+iv)\,dx+(iu-v)\,dy$

换种意义上来说，这可以理解为一个第二类曲线积分。

事实上，复变函数理论可以理解为二元微积分的推广。

1.2 单连通区域的柯西定理：

定理：有界单连通区域内，解析函数沿任一简单闭合围道的积分 $\oint_C f(z)\,dz=0$

对于 $I=\oint_C(u+iv)\,dx+(iu-v)\,dy$ 利用 格林公式，

有 $I=\iint_S\left(i\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_S\left(-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)dx\,dy$

由于 $f(z)$ 为解析函数，有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，故 $I=0$，即 $\oint_C f(z)\,dz=0$

1.3 复连通区域的柯西定理：

格林公式在有奇点处并不成立，故复连通区域的围道积分并不一定为0

定理：对于复连通区域，取包围奇点的小围道 $C_1,C_2,\cdots C_n$，有 $\oint_C f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)\,dz$

考虑由 n 个挖洞的新围道 L，L 所包围区域内无奇点，

故可以利用柯西定理 $\oint_L f(z)\,dz=0$

$\oint_L f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n}\int_{\theta_{k1}\to\theta_{k2}}f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)\,dz=0$

由于 θ_{k1} 与 θ_{k2} 位置与方向相反，故 $\int_{\theta_{k1}\to\theta_{k2}}f(z)\,dz=0$

所要证明 C,L 围道均为逆时针方向走（围绕内部区域的情况），但 C_k 区域和内部的情况

方向相反，化简得到 $\oint_C f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)\,dz$

§2 N个重要引理

2.1 $\oint\frac{1}{z^n}\,dz$ 型积分

例题：求围道积分 $\oint_C\frac{1}{z^n}\,dz$，其中 n 为整数，C 为简单闭合围道。

有界区域内，仅有 0 可能为奇点。

若围道 C 不包围原点，则 $\oint_C\frac{1}{z^n}\,dz=0$（柯西定理）

若围道 C 包围原点，若 $n=0,-1,-2,\cdots$，$z=0$ 不是奇点，$\oint_C\frac{1}{z^n}\,dz=0$

若 $n=1,2,3,\cdots$，则由复连通区域的柯西定理，取围绕原点的小圆盘 S，

$z=Se^{i\theta}$，$dz=iSe^{i\theta}d\theta$，$\oint_C\frac{1}{z^n}\,dz=\oint_S\frac{1}{z^n}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{iSe^{i\theta}}{S^ne^{in\theta}}\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}iS^{1-n}e^{(1-n)i\theta}\,d\theta$，若 $n\neq1$，则 $\oint_C\frac{1}{z^n}\,dz=\int_0^{2\pi}iS^{1-n}e^{(1-n)i\theta}\,d\theta=0$

若 $n=1$，$\oint\frac{1}{z^n}\,dz=\int_0^{2\pi}i\,d\theta=2\pi i$

综上，$\oint z^n\,dz=\begin{cases}2\pi i & n=-1,\text{且围道 }C\text{ 包围原点}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$

事实上，我们可以发现，复变函数的许多重要结论都基于 $\oint_C\frac{1}{z^n}\,dz=2\pi i$（C包围原点）

例题：求积分 $I=\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta$

$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$，令 $e^{i\theta}=z$，$\sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$，$d\theta=ie^{i\theta}d\theta=iz\,dz$

$\Rightarrow I=\oint\frac{dz}{iz}\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^{2m}=\oint\frac{(-1)^m(z^2-1)^{2m}}{i\,z^{2m+1}\cdot2^{2m}}\,dz$

将 $(z^2-1)^{2m}$ 展开，$(z^2-1)^{2m}=\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kz^{2(2m-k)}C_{2m}^k$

故 $I=\oint\frac{(-1)^m}{i\,2^{2m}\cdot z^{2m+1}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^kz^{2(2m-k)}C_{2m}^k$

由上述积分可知，只有 $k=m$ 时，z 的次数为 -1，积分值才有贡献

$I=\frac{(-1)^m\cdot2\pi i}{i\,2^{2m}\cdot2^{2m+1}}(-1)^mz^{2m+1}\cdot C_{2m}^m=\frac{2\pi}{2^{2m}}\frac{(2m)!}{(m!)^2}=\frac{\pi\,(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2}$

2.2 小圆弧引理

定理：$f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域内连续，且有 $(z-a)f(z)$ 一致趋于 k，则在 $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$ 范围内，$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz=ik(\theta_2-\theta_1)$

$ik(\theta_2-\theta_1)=\int_{C_\varepsilon}\frac{k}{z-a}\,dz$（利用 2.1 中的积分）

则 $\left|\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz-\int_{C_\varepsilon}\frac{k}{z-a}\,dz\right|=\int_{C_\varepsilon}\left|\frac{f(z)(z-a)-k}{z-a}\right|dz=I$

$(z-a)f(z)$ 一致趋于 k 的数学表述，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $|(z-a)f(z)-k|<\varepsilon$

$\Rightarrow I<\int_{C_\varepsilon}\frac{\varepsilon\,dz}{|z-a|}=i\varepsilon(\theta_2-\theta_1)$，故 $\lim_{\varepsilon\to0}I\le\lim_{\varepsilon\to0}i\varepsilon(\theta_2-\theta_1)=0$

则 $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}f(z)\,dz=ik(\theta_2-\theta_1)$

2.3 大圆弧引理

定理：$f(z)$ 在 $z=\infty$ 点连续，且有 $zf(z)$ 一致趋于 k，则在 $\theta_1\le\arg z\le\theta_2$ 范围内，$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=ik(\theta_2-\theta_1)$

$ik(\theta_2-\theta_1)=\int_{C_R}\frac{k}{z}\,dz$（利用 2.1 中的积分）

则 $\left|\int_{C_R}f(z)\,dz-ik(\theta_2-\theta_1)\right|=\int_{C_R}\left|\frac{zf(z)-k}{z}\right|dz=I$

$zf(z)$ 一致趋于 k 的数学表述，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $|zf(z)-k|<\varepsilon$

故 $I<\int_{C_R}\frac{\varepsilon}{z}\,dz=i\varepsilon(\theta_2-\theta_1)$，故 $\lim_{R\to\infty}I\le\lim_{\varepsilon\to0}i\varepsilon(\theta_2-\theta_1)=0$

则 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz=ik(\theta_2-\theta_1)$

但增注意的是，大小圆弧引理并不需要 $f(z)$ 为解析函数，这是因为大小圆弧的积分路径是确定的，而解析函数所满足的柯西定理能够带来的最大好处在于积分路径在单连通区域内可以任意选择

§3 柯西积分

3.1 有界区域的柯西积分公式

定理：在有界区域内，对于单值解析函数，有 $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}\,dz$，其中 C 为区域内一条简单闭合围道（包含 $z=a$ 点）