由柯西定理，可以将 $C$ 变为包围 $z=a$ 点的小圆弧围道

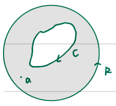
$\lim_{z\to a}(z-a)\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)=f(a)$，利用小圆弧引理，

$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)$，即 $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-a}dz$

如此看来，柯西积分可以理解为对某处函数值的定义

3.2 无界区域的柯西积分公式

定理：对于无界区域，取围道 $C$，$z=a$ 在围道 $C$ 之外，且在围道上与围道外部 $f(z)$ 单值解析，那么 $f(a)-f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz$，其中 $C$ 的正向为顺时针方向，如果 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 一致趋于 0，则有 $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz$



我们首先需要对该定理的使用范围有所认知，那就是 $f(z)$ 在围道 $C$ 内部是不解析的，而在围道 $C$ 的外部解析。因为如果在围道 $C$ 的内部单值解析的话，我们可以立即得到 $\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=0$。然而这个条件本身就很难找到有实用价值，因而可以仅当作一种数学上的乐趣。从另一个角度理解，柯西积分可以用来定义解析函数在某点处的函数值，但是它无法定义在非解析区域的函数值。比如说 $z=a$ 在围道 $C$ 之内（非解析区域），那如上题中 $z=a$ 在围道 $C$ 之外的情形柯西积分便不再适用。我们也可以将之理解为一个复连通区域，只不过一般而言我们挖掉的是"点"。例如 $z=a$ 处，而在此处我们还需要挖掉围道 $C$ 内部的非解析区域。这么看来如果 $z=a$ 在围道 $C$ 内，也就是在非解析区域中挖掉一个奇点的确不具有意义。

法一：做变量替换 $z=\frac{1}{t}$，则 $z\to\infty$ 与 $t\to 0$ 等价

$\oint_{|z|}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint\frac{f(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}-a}(-)\frac{dt}{t^2}=-\oint\frac{f(\frac{1}{t})}{t(1-at)}dt$

$=-\oint f(\frac{1}{t})\left(\frac{1}{t}+\frac{a}{1-at}\right)dt=\oint\frac{f(\frac{1}{t})}{t-\frac{1}{a}}dt-\oint\frac{f(\frac{1}{t})}{t}dt$

$=[f(a)-f(\infty)]\cdot 2\pi i=2\pi i f(a)$

法二：将围道 $C_p$ 与 $C$ 共同组成的部分当作一个新的有界闭区域，

则有 $\oint_{C_p}\frac{f(z)}{z-a}dz+\oint_C\frac{f(z)}{z-a}=2\pi i f(a)$

我们有 $\lim_{z\to\infty}z\cdot\frac{f(z)}{z-a}=\lim_{z\to\infty}f(z)=0$，利用大圆弧引理，$\oint_{C_p}\frac{f(z)}{z-a}dz=0$

于是 $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}$

3.3 解析函数的高阶导数

定理：有界闭区域内的解析函数的任意阶导数均存在，并满足：

$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

采用数学归纳法，我们首先证明 $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$

$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$，利用柯西积分我们可以得到：

$f(z+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}d\zeta$，$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

$f'(z)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta\right)$

$=\frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta-z-h}-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\zeta$

$=\frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{(\zeta-z)}\right)d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$

假设 $n=k$ 时成立，即 $f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta$

$f^{(k)}(z+h)=\frac{k!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}}d\zeta$

$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k!}{2\pi i}\oint f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{k+1}}-\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right)d\zeta$

$=\frac{k!}{2\pi i}\oint f(\zeta)\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{k+1}}-\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right)d\zeta=\frac{k!}{2\pi i}\oint f(\zeta)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right)d\zeta$

$=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta=f^{(k+1)}(z)$ 由数学归纳法得证

事实上，如果我们不加证明地认定 $f(z)$ 的任意阶导数均存在，则可以直接将 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 两端同时对 $z$ 求 $n$ 阶导数，立即得到

$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

由此我们可以看到，柯西积分还能够用来定义解析函数的任意阶导数

§4 柯西定理推论

4.1 莫雷拉定理：

定理：有界闭区域内连续函数，如果对任意简单闭合围道都有 $\oint_C f(z)dz=0$，那么 $f(z)$ 在区域内是解析的。该定理为柯西定理的逆定理。

$\forall c$，$\oint_C f(z)dz=0$，则可以定义 $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$

$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}f(\zeta)d\zeta=f(z)$

「说明：严格来说，此处用到函数连续性，更数学的表述方为：

$\left|\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))dz\right|\le\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\varepsilon\Delta z=\varepsilon$

$f(z)$ 连续，有 $\forall\delta$，$\exists\varepsilon>0$，s.t. $|f(z+\delta)-f(z)|<\varepsilon$，$\Rightarrow\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$」

说明 $F'(z)=f(z)$，故 $F(z)$ 为解析函数，又解析函数的任意阶导数均存在，那么解析函数的任意阶导数均解析，故 $f(z)$ 为解析函数

4.2 柯西不等式：

定理：有界闭区域内解析函数 $f(z)$，在内部 $z=a$ 点做半径为 $R$ 的圆，则有 $|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!M}{R^n}$，$M$ 为 $|f(z)|$ 的最大值。

$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$，设边界上 $|f(\zeta)|$ 最大值为 $M$，围道长度 $l$，边界到 $z$ 点的最近距离为 $d$，则有 $|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}}$

对应于圆的情形，$d=R$，$l=2\pi R$，则有 $|f^{(n)}(z)|\le\frac{n!M}{R^n}$

4.3 最大模原理

定理：有界闭区域上的解析函数，$|f(z)|$ 的最大值在边界上取到。

$|f(z)|^m\le\frac{1}{2\pi}\frac{M^m l}{d}$，其中 $M$ 为边界上的 $|f(z)|$ 的最大值，$m$ 为正整数

则有 $|f(z)|\le M\cdot\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{m}}$，当 $m\to\infty$ 时，有 $|f(z)|\le M$

4.4 刘维尔定理

定理：$f(z)$ 在全平面内解析且有界，则 $f(z)$ 为常数

$|f'(z)|\le\frac{M}{R}$，$M$ 为边界上最大值，当 $R\to\infty$ 时，$M$ 有界，则 $\lim_{R\to\infty}\frac{M}{R}=0$

故 $|f'(z)|\le 0$，则 $f'(z)=0$，即 $f(z)$ 为常数

4.5 代数基本定理

定理：多项式 $P(z)=a_0+a_1z^1+\cdots+a_mz^m$ 至少有一个根

反证法，$P(z)\neq 0$，则 $\frac{1}{P(z)}$ 在全平面内解析且有界，

由刘维尔定理，$\frac{1}{P(z)}$ 为常数，又 $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{P(z)}=0$，故 $\frac{1}{P(z)}=0$，矛盾

§5 柯西积分的应用

5.1 柯西型积分

在一些特殊条件下，我们可以解决一些非解析函数的积分。

例题：求 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^*}{\zeta-z}d\zeta$

注意到 $|\zeta|^2=\zeta\zeta^*=1$，故 $\zeta^*=\frac{1}{\zeta}$，将非解析函数 $\zeta^*$ 变成了解析函数 $\frac{1}{\zeta}$

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta}\frac{1}{(\zeta-z)}d\zeta$

若 $|z|<1$，则 $z$ 在围道内，则 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\delta_z}\frac{1}{\zeta}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\delta_0}\frac{1}{\zeta}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta$

$=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}=0$

若 $|z|>1$，围道内只有 $\zeta=0$ 这一个奇点，$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\delta_0}\frac{1}{\zeta}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{z}$

另：我们也可以使用无界区域柯西积分公式，由于 $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$，

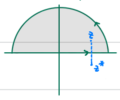
$\frac{1}{2\pi i}\oint_{-C}\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta=\frac{1}{z}$，$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}=-\frac{1}{z}$。

综上，$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^*}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}0 & |z|<1\\ -\frac{1}{z} & |z|>1\end{cases}$

5.2 泊松公式

我们由柯西积分公式可以看到，对于有界闭区域内的单值函数，我们可以仅通过边界上的值来确定各点的函数值（实部和虚部），而我们又知道解析函数的实部和虚部之间满足柯西黎曼条件，于是乎对于特定的围道，我们可以仅凭边界上的实（虚）部来确定内部各处的实（虚）部

例题：对于在上半平面内解析的函数，给出泊松公式。



$2\pi i f(z)=\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-z}dx+\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

由大圆弧引理，（认为 $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$），$\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0$

故 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi,0)+iv(\xi,0)}{\xi-x-iy}d\xi\cdot\frac{1}{2\pi i}$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[u(\xi,0)+iv(\xi,0)](\xi-x+iy)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi\cdot\frac{1}{2\pi i}$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[(\xi-x)u(\xi,0)-yv(\xi,0)]+i[(\xi-x)v(\xi,0)+yu(\xi,0)]}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi\cdot\frac{1}{2\pi i}$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[(\xi-x)v(\xi,0)+yu(\xi,0)]+i[yv(\xi,0)-(\xi-x)u(\xi,0)]}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi$

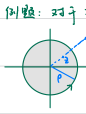
考虑围道积分 $\oint\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}d\zeta=0$，展开得到：

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)-yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi=0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yv(\xi,0)+(\xi-x)u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi=0$

$\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi$

$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi$

例题：对于在圆内解析的函数，给出泊松公式



由柯西积分：$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

$0=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}d\zeta$

$\zeta=\rho e^{i\theta}$，$z=re^{i\varphi}$，$z^*=\frac{\rho^2}{r}e^{i\varphi}$

$u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)}{\rho e^{i\theta}-re^{i\varphi}}i\rho e^{i\theta}d\theta$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)}{1-\frac{r}{\rho}e^{i(\varphi-\theta)}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)](1-\frac{r}{\rho}e^{-i(\varphi-\theta)})}{1+\frac{r^2}{\rho^2}-2\frac{r}{\rho}\cos(\varphi-\theta)}d\theta$

$=\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)](\rho-r\cos(\varphi-\theta)+ir\sin(\varphi-\theta))}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}d\theta$

$=\frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[(\rho-r\cos(\varphi-\theta))u-r\sin(\varphi-\theta)v]+i[v(\rho-r\cos(\varphi-\theta))+ur\sin(\varphi-\theta)]}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}d\theta$

$0=\int_0^{2\pi}\frac{u+iv}{1-\frac{\rho}{r}e^{i(\varphi-\theta)}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{(u+iv)(1-\frac{\rho}{r}\cos(\varphi-\theta)+\frac{i\rho}{r}\sin(\varphi-\theta))}{1+\frac{\rho^2}{r^2}-2\frac{\rho}{r}\cos(\varphi-\theta)}d\theta$

$=r\int_0^{2\pi}\frac{[u(r-\rho\cos(\varphi-\theta))-\rho\sin(\varphi-\theta)v]+i[v(r-\rho\cos(\varphi-\theta))+u\rho\sin(\varphi-\theta)]}{r^2+\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}d\theta$

$\Rightarrow\frac{r}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{u\,d\theta}{r^2+\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}=\int_0^{2\pi}\frac{u\cos(\varphi-\theta)+v\sin(\varphi-\theta)}{r^2+\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}d\theta$

$\frac{r}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{v\,d\theta}{r^2+\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}=\int_0^{2\pi}\frac{v\cos(\varphi-\theta)-u\sin(\varphi-\theta)}{r^2+\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}d\theta$

$\Rightarrow u(r,\varphi)=\frac{\rho^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\,d\theta}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}$ $\quad v(r,\varphi)=\frac{\rho^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{v\,d\theta}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)}$

第五章 无穷级数（部分内容为高数内容的延伸，可作复习参考。）

如果仅将复变函数当作一种数学工具使用，本章节其实可以跳过，其中最有用的结论已附在章末。此外，本章节内容多为证明，过程繁琐，权且当作一种数学上的"热情"即可。

§1 条件收敛与绝对收敛

1.1 级数收敛

与实数级数类似，我们定义复数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，可以看作两个实数级数的组合。我们同样定义和数 $S_n=\sum_{k=1}^{n}z_n$，有柯西收敛准则。

定理：序列 $S_n$ 收敛的充要条件为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得只要 $n>N$，$m>N$，均有 $|S_n-S_m|<\varepsilon$

必要性：$S_n$ 的极限为 $A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $n>N$，$|S_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

同理，$m>N$，$|S_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|S_n-S_m|=|(S_n-A)-(S_m-A)|<|S_n-A|+|S_m-A|=\varepsilon$

充分性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $\forall n>N$，$m>N$，$|S_n-S_m|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$，$S_m=S_N$，则有 $|S_n|-|S_N|<1$，$|S_n|<|S_N|+1$

此时 $N$ 为一个有限的数，令 $C=\max\{|S_1|,|S_2|,\cdots|S_N|\}$