那么 $|S_n| < \max\{C, |S_N|+1\}$ 故 序列 S_n 是有界 的

有界序列必然存在一个子序列有极限：总可以在有界范围内找到无穷多个数列的项，因而存在子序列 S_{n_k} 的极限为 A

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. $n_k>N$, $|S_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $m>N$, $|S_m-S_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$||S_m-A|-|S_{n_k}-A|| < |S_m-S_{n_k}| = |(S_m-A)-(S_{n_k}-A)| < \frac{\varepsilon}{2}$

故 $|S_m-A| \le |S_{n_k}-A| < \frac{\varepsilon}{2}$ 或 $|S_m-A| < \frac{\varepsilon}{2} + |S_{n_k}-A| < \varepsilon$

故 序列 S_n 收敛，其极限也为 A.

1.2 绝对收敛

由于复数级数的每一项为复数，不具有比较大小的意义，因而引入绝对收敛的概念，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛的级数称为绝对收敛.

这样一来，复数级数被我们变成了正项实数级数，我们可以直接引用高等数学中正项级数收敛的判据.

定理：正项级数有界则一定收敛.

由于各项均为正数，故其和序列单调递增，单调有界序列必然有极限

比较判别法：设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，若 $|u_n| \ge v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散；若 $|u_n| \le v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

$\sum_{k=1}^{n}|u_n| = S_n$，$\sum_{k=1}^{n} v_n = T_n$，若 $S_n \le T_n \le M$，则 S_n 有界，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

若 $S_n \ge T_n$，若 S_n 收敛，则 $T_n \le S_n \le M$ 也收敛，矛盾，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散

比较判别法依赖于一个已知收敛性的正项级数，但其对通项进行比较时仍可能存在困难，下面引入其极限情形.

比较判别法（极限情形）：对于两正项级数，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$

若 $0 \le h < +\infty$，则如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

若 $0 < h \le +\infty$，则如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散

若 $0<h<+\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性相同.

若 $0 \le h < +\infty$，$\exists N$，s.t. $n>N$ 时，$\frac{u_n}{v_n} < h+1$，$u_n < (h+1)v_n$，

若 $0 < h \le +\infty$，$\exists N$，s.t. $n>N$ 时，$\frac{v_n}{u_n} < \frac{1}{h}+1$　$v_n < (\frac{1}{h}+1)u_n$

例题：分析 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性

$p=1$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散：

利用柯西收敛准则，取 $\sum_{i=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$，故发散.

$p<1$ 时，$\frac{1}{n^p} / \frac{1}{n} = n^{1-p}$　$\lim_{n\to\infty} n^{1-p} = +\infty$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散

$p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p}+\frac{1}{(2^{k-1}+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^k)^p}\right)$

$< 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} = \frac{1}{1-2^{(1-p)}}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛

综上，$p\le 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散；$p>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛

注意：我们可以发现，并不能够通过 $|u_n|<\frac{1}{n}$ 就说明 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是收敛的，如上题中 $p>1$ 的情况，我们仍需借助其它方法来判别其敛散性，我们以后将会看到更多例子.

达朗贝尔判别法：若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = p<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = p>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$，则无法判断. 此外，若 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ 或 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$ 也无法判断.

说明：我们先来阐述取上下极限的必要性，若 $u_n = \begin{cases} 2^{-k} & n=2k \\ 2^{k} & n=2k+1 \end{cases}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{2k} > 1$ 或 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(k+1)}}{2^k} = \frac{1}{2^{2k+1}} < 1$，可以看到此时下极限是小于1，但函数值仍然不收敛.

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = p<1$，存在序列 $|V_n| \ge |u_n|$，使得 $\forall n>N$，都有 $\left|\frac{V_{n+1}}{V_n}\right| < p$，$|V_{N+k}| < |V_N|p^k$，由于 $p<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}p^k$ 收敛，又 $|V_N|$ 是一个固定常数，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

若 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = p>1$，存在序列 $|V_n| \le |u_n|$，使得 $\forall n>N$，都有 $\left|\frac{V_{n+1}}{V_n}\right| > p > 1$　$|V_{N+k}| = |V_N|p^k$，由于 $p>1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

若 $p=1$，可以发现 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 均满足条件，无法判断.

对于可直观判断的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n = \begin{cases} 2^{-k} & n=2k \\ 3^{-k} & n=2k+1 \end{cases}$，我们发现达朗贝尔判别法不能给出其敛散性判断，因而还需要其他方法.

柯西判别法：若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|} = l<1$，则 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|} = l>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n} = 1$，则无法判断级数的敛散性.

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|} = l<1$，存在序列 $V_{N+k} = V_N l^k$，使得 $\forall n>N$，均有 $|u_n|<V_n$，而 $l<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ 是收敛的，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|} = l>1$，$\exists N$，使得 $\forall n>N$，有 $|u_n| \ge l^n$，故 $\lim_{n\to\infty}|u_n|>1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的.

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|} = 1$，考虑 $u_n = \frac{1}{n^p}$，无论 p 是否大于1，均有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1$，

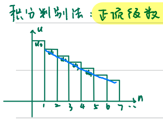
但是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性不确定

利用柯西判别法，我们可以解决上述困难. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$，故收敛

1.3 其它有用判别法

对于级数项中含有 $\ln n$ 的情形我们通常难以直接判断，此时积分判别法是有效的.

积分判别法：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是 $f(n)=u_n$，$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛



令 $\sigma_n = \int_1^n f(x)dx$

有 $\sum_{k=2}^{n}u_k < \sigma_n < \sum_{k=1}^{n}u_k$

充分性：已知 $\int_1^{\infty}f(x)dx$ 收敛，$\exists N$，$\forall n>N$，$\sigma_n \le M$

$\sum_{k=2}^{n}u_k < \sigma_n \le M$，故 正项级数 有界，则收敛

必要性：已知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\exists N$，$\forall n>N$，$\sum_{k=1}^{n}u_k \le M$

则有 $\sigma_n < \sum_{k=1}^{n}u_k \le M$，又 $f(x)>0$，故 σ_n 收敛

对于任意项级数，一类常见情形就是交错级数，对于交错级数，我们有专门的判别法.

莱布尼茨判别法：对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，如果满足以下条件则级数是收敛的：(1) $u_n \ge u_{n+1}$，(2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

$S_{2n} = (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$

$S_{2n+2} = (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})+(u_{2n+1}-u_{2n+2})$

$S_{2n+2}-S_{2n} = u_{2n+1}-u_{2n+2} \ge 0$，故 S_{2n} 单调递减.

$S_{2n} = u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})+u_{2n} \le u_1+u_{2n}$，故 S_{2n} 有界

S_{2n} 单调有界，则收敛，$\lim_{n\to\infty}S_{2n} = S$，

$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1} = S+0=S$，故 S_{2n+1} 收敛，

综上，S_n 收敛

阿贝尔变换：设有两列数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$；$\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_m$；记 B_m 为 β_m 的和序列，$B_m=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m$，则有 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})B_k+\alpha_nB_n$

$\beta_k = B_k-B_{k-1}$　$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = \alpha_1B_1+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k(B_k-B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_kB_k-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{k+1}B_k$

$= \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})B_k+\alpha_nB_n$

阿贝尔引理：若 α_k 是单调的，且和序列 $|B_n| \le M$，有 $\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k\right| \le M(|\alpha_1|+2|\alpha_m|)$

$\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})B_k+\alpha_mB_m\right| \le M\left(\sum_{k=1}^{m-1}|\alpha_k-\alpha_{k+1}|+|\alpha_m|\right)$

由于 α_k 单调，故 $\sum_{k=1}^{m-1}|\alpha_k-\alpha_{k+1}| = \left|\sum_{k=1}^{m-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\right| = |\alpha_1-\alpha_m| \le |\alpha_1|+|\alpha_m|$

故 $\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k\right| \le M(|\alpha_1|+2|\alpha_m|)$

狄利克雷判别法：若 α_k 是单调的，且 $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0$，$\beta_k$ 的和序列有界，那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k$ 收敛.

利用柯西收敛准则，我们只需说明 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $\forall n>N$，$\forall p>0$，$\left|\sum_{k=n}^{k=n+p}\alpha_k\beta_k\right|<\varepsilon$

利用阿贝尔引理，$B_k \le M$，$\left|\sum_{k=n}^{k=n+q}\beta_k\right| = |B_{n+q}-B_n| \le 2M$

$\left|\sum_{k=n}^{k=n+p}\alpha_k\beta_k\right| \le 2M(|\alpha_n|+2|\alpha_{n+p}|)$，又由于 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t.，$\forall n>N$，有 $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{6M}$，则 $\left|\sum_{k=n}^{k=n+p}\alpha_k\beta_k\right| \le 2M\cdot 3\cdot\frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon$，故 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k$ 收敛.

我们发现取 $\beta_k = (-1)^{k-1}$，则为莱布尼茨判别法

阿贝尔判别法：若 α_k 是单调有界序列，$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$ 收敛，那么 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k$ 收敛

$\lim_{k\to\infty}\alpha_k = a$，令 $\gamma_k = \alpha_k - a$，$\lim_{k\to\infty}\gamma_k = 0$，且 γ_k 单调，利用狄利克雷判别法

有 $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\beta_k$ 收敛，又 $\sum_{k=1}^{\infty}a\beta_k$ 收敛，故 $\sum_{k=1}^{\infty}a\beta_k+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\beta_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a+\gamma_k)\beta_k = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k$ 收敛

利用上述两个判别法，可以从级数项的构成角度出发分析敛散性.

1.4 条件收敛与绝对收敛

命题：绝对收敛的级数一定收敛，而收敛级数不一定绝对收敛，称为条件收敛.

$\left|\sum_{k=1}^{\infty}u_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|u_k| \le M$，故绝对收敛级数一定收敛；

利用交错级数 $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故条件收敛

如果我们把收敛序列分成正项与负项两组，绝对收敛序列是正项与负项均收敛的序列，条件收敛序列是正项与负项都发散的序列，注意不可能出现一个发散一个收敛的情形，这样原级数就不再收敛了.

初学时我们可能会疑惑为何要引入条件收敛与绝对收敛的概念，这实际上是因为一些我们下意识认可的定律（如加法交换律）对于条件收敛序列不满足但绝对收敛序列仍然能够满足这些性质.

黎曼重排定理：条件收敛级数经过重排之后可以收敛于任何数.

我们做一个形式上的证明，首先我们有 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$，否则不收敛

我们将级数分为正项与负项两组，对于目标值 B，如果当前值小于 B，则一直堆积正项直到超过 B 时停止，此时正项级数是发散的，我们知道这一点一定能够做到；一旦超过 B 之后开始堆积负项，直到和小于 B 值；我们知道每次堆积完成后与 B 值的相差量总小于等于 $|a_n|$，又 $|a_n|$ 的极限为0，故该级数收敛于 B.

例题：给出 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 的一种重排并求其值.

$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$，$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots) = \frac{1}{2}\ln 2$

由此我们可以看出，无穷多项的加法重排之后的求和不同寻常，问题本质类似于“自然数与偶数一样多”；一般来说重排之后正项与负项的个数比改变了.

但对于绝对收敛级数并不会造成此类困扰，以下我们着重探讨绝对收敛级数的性质.

命题：绝对收敛级数的和数等于其正项与负项的和数之和.

需要注意的是单独计算正项与负项的和数是一种重排，故条件收敛级数不具有此性质.

取 $v_n = \frac{1}{2}(|u_n|+u_n) \begin{cases} u_n & u_n \ge 0 \\ 0 & u_n<0 \end{cases}$，$w_n = \frac{1}{2}(|u_n|-u_n) = \begin{cases} 0, & u_n \ge 0 \\ |u_n|, & u_n<0. \end{cases}$

有正项级数 v_n，$w_n \le |u_n|$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 包含了所有正项的和与0；$-\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 包含了所有负项的和与0.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n-\sum_{n=1}^{\infty}w_n = \sum_{n=1}^{\infty}u_n$，其中的三项级数均收敛故可相加减

命题：收敛的正项级数重排后和不变.