$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，$\forall k>0$，$u_1^*, u_2^*, \cdots u_k^*$ 为重排，

则 $\exists N$，使得 $\sum_{n=1}^{k} u_n^* \le \sum_{n=1}^{N} u_n \le S$，又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_k^*$ 为正项序列，

故重排后和序列单调有界，收敛于原先和数

命题：绝对收敛级数经重排之后和为绝对收敛级数，和与之前相同

将绝对收敛级数分为正项和负项两部分；利用上述两个命题得证

命题：对于绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有 $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n)$ 绝对收敛于 $(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|)\cdot(\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|)$

$$\begin{matrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

按照图示顺序取前 m 项，有 $S_m \le (\sum_{n=1}^{m}|u_n|)(\sum_{n=1}^{m}|v_n|) = A\cdot B$

又 $|u_iv_j| \ge 0$，故 S_m 单调递增，S_m 单调有界，故收敛

$$\begin{matrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

按照如图方式取，则有 $S_m = (\sum_{n=1}^{m}|u_n|)(\sum_{n=1}^{m}|v_n|)$

故 $\lim_{m\to\infty} S_m = A\cdot B$，综上，$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n)$ 绝对收敛于 $(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|)\cdot(\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|)$

1.5 经典反例

例题：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定收敛吗？

$\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 0$，此题的谬误在于试图通过与发散级数作比

较得到级数收敛的结论，这是不可能实现的。

取 $a_n = \frac{1}{n\ln n}$，$\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$，由积分判别法

$\int_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} dn$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

例题：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，若 $a_{2n} < a_{2n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定发散吗？

此题为达朗贝尔判别法的误用，要求 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ 才可以得到发散的结论

由此我们可以看到取上下极限的必要性。

$a_{2n} = 3^{-n}$，$a_{2n+1} = 2^{-n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，满足 $a_{2n} < a_{2n+1}$

例题：若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$ 一定发散吗？

此题为一个柯西不等式的误用，$(\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n})^2 \le (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$，此不等号

方向不正确因而无法证得，事实上我们只需交错使 a_n、b_n 中一项大一项小

即可得到反例。

$a_{2n} = \frac{1}{n}$，$b_{2n+1} = \frac{1}{n^3}$，$a_{2n+1} = \frac{1}{n^3}$，$b_{2n+1} = \frac{1}{n}$，

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

§2 函数级数

2.1 一致收敛的引入

前面我们研究了级数项中每一项为一个数的情形，接下来研究级数项中每一项为函数的情形，称为函数级数。

由于无穷项求和的特性，使得我们所熟悉的一些数学认知出现了问题。

考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$，$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$，我们发现对于级数项中的每一项而言，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而对于和函数 $S(x)$ 而言，仅在 $-1<x<1$ 时有良好定义。一些函数的和的定义域将会为各定义域的交集，而对于函数级数则不然，这是特异点之一。

看另一个例子，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1}-x^n)$，每一项的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而级数的收敛域为 $(-1,1]$，和函数 $S_n(x) = x^{n+1}-1$，并且和函数有 $S(x) = \begin{cases} -1 & -1<x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

它甚至在收敛域中是不连续的，而级数的每一项却是连续的。连续函数的和变成了非连续函数，随之造成的是否可导、可积问题更加严重。

以上例子说明了一般的函数项级数在运算使用时会出现各种问题，而当函数项级数满足某种特定条件时，这些问题便不再存在，这与前文中引入绝对收敛的初衷是类似的，而这种特殊性质为一致收敛。

2.2 一致收敛的理解

首先我们需要认识到函数级数收敛的目标对象是一个函数，而非一个数，而该收敛目标对象是与自变量 x 相关的，如此一来便能够理解收敛的速度是与自变量 x 相关的。

一致收敛：对于函数序列 $f_n(x)$，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$，若对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 与 x 无关的 N，使得 $\forall n>N$，均有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，则称序列 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$

我们来看两个具体的例子进行理解。

考虑函数序列 $f_n(x) = x^n\ (-1<x<1)$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$，要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，

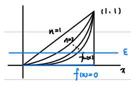
即 $x^n < \varepsilon$，$n\ln x < \ln\varepsilon$，则 $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$，$N = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}] + 1$，与 x 相关。

事实上，只要 $1 > x > \varepsilon^{\frac{1}{n}}$，收敛条件则无法满足，故该函数序列不一致收敛。

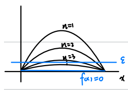
考虑函数序列 $f_n(x) = x^n(1-x)^n$，$(0<x<1)$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$，$f_n(x)_{max} = (\frac{1}{4})^n$，

故只要 $N = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{4}}] + 1$，则当 $n \ge N$ 时，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，故该序列一致收敛

从图象上来看，可以更直观地理解：



对于任意的 ε，无论 n 有多大，$f_n(x)$ 总会在 $(0,1)$ 上穿出 ε 到达 $(1,1)$，不可能使函数图象限制在蓝色区域内。



对于任意的 ε，只要 n 足够大，总能使 $f_n(x)$ 保持在 $f(x)=0$ 与 $y=\varepsilon$ 之内，故一致收敛

通常而言，我们只要在点集 X 上便可定义一致收敛，因而不论在开闭区间上我们都可定义一致收敛，事实上这主要取决于极限函数，例如 $f(x) = x^n$ 在 $x=1$ 处不连续，我们说 $f_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上一致收敛；而 $f(x) = x^n(1-x)^n$ 在 $x=1$ 处也有 $f(1)=0$，我们则可以说 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛

此外，我们可以发现似乎对于函数序列的收敛区间而言，仅有可能在边界处发生不一致收敛的情况，但事实上对于一些复杂函数，函数序列在其收敛区间的闭子区间内仍有可能不一致连续，我们以后将看到例子。

函数序列一致收敛的充分条件较为简单，如果能找到收敛序列 a_n，使得 $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ 则 $f_n(x)$ 一致收敛，或者如果有 $|f_n(x) - f(x)| \ge l$，则 $f_n(x)$ 不一致收敛。

级数的一致收敛则相应定义为和函数序列 $S_n(x)$ 一致收敛。

2.3 函数项级数一致收敛的判别法

一致收敛的必要条件：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛的必要条件为 $u_n(x)$ 在 X 上一致趋于0。

和函数 $S_n(x)$，极限 $S(x)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $n>N$ 时，$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) = (S_n(x) - S(x)) - (S_{n-1}(x) - S(x))$

故 $|u_n(x)| = |(S_n(x) - S(x)) - (S_{n-1}(x) - S(x))| \le |S_n(x) - S(x)| + |S_{n-1}(x) - S(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，故 $u_n(x)$ 一致收敛于0

我们通常用此性质来说明一个函数项级数不一致收敛

柯西收敛准则：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛的充分必要条件为，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 只与 ε 有关的 N，$p>0$，使得 $|\sum_{k=n}^{k=n+p} u_k(x)| < \varepsilon$ 对所有 x 均成立。

必要性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $n>N$ 时，$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|\sum_{k=n}^{k=n+p} u_k(x)| = |S_{n+p}(x) - S_{n-1}(x)| = |(S_{n+p}(x) - S(x)) - (S_{n-1}(x) - S(x))|$

$\le |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_{n-1}(x) - S(x)| < \varepsilon$

充分性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $n>N$ 时，$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ 对任意 $x\in X$，$p>0$ 成立，

令 $p\to\infty$，则有 $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$，故一致收敛。

此做法通常依赖于能够求出和函数 $S_n(x)$，但这并不便于使用，判别函数级数的一致收敛性时会使用以下判别法。

M判别法：若对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足 $|u_n(x)| \le a_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛。

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，s.t. $\sum_{k=n}^{k=n+p} a_k < \varepsilon$，

故 $|\sum_{k=n}^{k=n+p} u_k(x)| \le \sum_{k=n}^{k=n+p}|u_k(x)| \le \sum_{k=n}^{k=n+p} a_k < \varepsilon$

狄利克雷判别法：对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$，若对于 X 中的任何 x，$a_n(x)$ 单调递减且一致收敛于0，且 $b_n(x)$ 的和序列 $B_n(x)$ 在 X 上一致有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛。

证明与数项级数相似，现主要考虑其应用。

例题：证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ $(p>0)$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛。

$\frac{1}{n^p}$ 单调递减且趋于0，$B_N(x) = |\sum_{n=1}^{N}\sin nx| = |\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=1}^{N}\sin nx\sin\frac{x}{2}|$

$= |\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=1}^{N}[\cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x]| = |\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}(\cos\frac{1}{2}x - \cos(N+\frac{1}{2})x)| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$

利用狄利克雷判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 一致收敛

阿贝尔判别法：对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$，若对于 X 中的任意 x，$a_n(x)$ 单调，且 $a_n(x)$ 一致有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致有界。

证明与数项级数相似，现主要考虑其应用。

例题：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

$\frac{1}{n^x}$ 单调递减，且 $\frac{1}{n^x} \le 1$ 故 $\frac{1}{n^x}$ 单调且一致有界

利用阿贝尔判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

2.4 一致收敛的性质

连续性：$u_n(z)$ 在 G 内连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 G 内一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 G 内也连续。

和函数 $S_n(z)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $n>N$ 时，$|S_n(z) - S(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$|S_n(z_0) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$，对于有限项求和 $S_n(z)$ 是连续函数，

$\exists\delta>0$，s.t. $|z-z_0| < \delta$ 时，$|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

综上，$|S(z) - S(z_0)| = |(S(z) - S_n(z)) + (S_n(z) - S_n(z_0)) + (S_n(z_0) - S(z_0))|$

$\le |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - S(z_0)| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

这说明对于一致收敛级数，求和与求极限可以交换位置 $\lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{z\to z_0} u_n(z)$

逐项求积分：C 为区域 G 内分段光滑曲线，如果 $u_n(z)$ 在 C 上连续，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 C 上一致连续，则 $\int_C\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C u_n(z)dz$

$\int_C\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)dz = \int_C(\sum_{n=1}^{N} u_n(z)dz + \sum_{n=N}^{\infty} u_n(z)dz) \le \sum_{n=1}^{N}\int_C u_n(z)dz + \varepsilon l$

其中第一项利用了有限项连续函数逐项可积，第二项利用了一致连续性

$|\int_C\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)dz - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_C u_n(z)dz| \le \varepsilon l$

$\Rightarrow \int_C\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C u_n(z)dz$

逐项求导数（实变函数版）：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 内点点收敛，$u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，则 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

令 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$，由逐项可积知，$\int_a^x\varphi(x)dx = \int_a^x\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)dx$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x) - u_n(a)) = S(x) - S(a)$

由连续性可知，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对上式左右两边求导

$S'(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

逐项可积分（复变函数）：$u_n(z)$ 在 G 内单值解析，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 G 内一致收敛，则 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 G 中解析，且可逐项求导，$f^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(z)$，且 $f^{(p)}(z)$ 在 G 中一致收敛。

I) 证明 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 G 中解析