复变函数
整理

produced by Xun-cheng.

北京大学
PEKING UNIVERSITY

第一章.

Def. 聚点、$\exists z\in C$, s.t. $\forall\varepsilon>0$. 恒有无穷多个 z_n 使 $|z_n-z|<\varepsilon$, 称 z 为 $\{z_n\}$ 的一个聚点.

一个有界无穷序列至少有一个聚点; 一个序列可有多个聚点.;

若该序列极限存在. 则必为其唯一聚点.

第二章

表示: $\begin{cases} z=x+iy \\ w=f(z) \\ w(x,y)=u(x,y)+iv(x,y). \end{cases}$

Def. 可导, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在, 记为 $f'(z)$.

显然 $f'(z)$ 值有唯一性 $\Rightarrow$ Δz 可以任何方式趋于0.

Thm. CR方程 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \quad (*) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \quad (\Delta) \end{cases}$ 可依此求解析函数的实虚部.

CR方程变形: $i\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$

记为 u'

Ex. # $(*)(\Delta)$式的线性组合, 若给定解析函数的 (k_1u+k_2v) $(k_1,k_2\in R)$

则 $\begin{cases} \dfrac{\partial(k_1u+k_2v)}{\partial x}=k_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+k_2\dfrac{\partial v}{\partial x}=k_1\dfrac{\partial v}{\partial y}-k_2\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(k_1u+k_2v)}{\partial y}=k_1\dfrac{\partial u}{\partial y}+k_2\dfrac{\partial v}{\partial y}=-k_1\dfrac{\partial v}{\partial x}+k_2\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 界定"广义虚部"为 (k_1v-k_2u) v'

由 u' 求出 v' 联立 $\begin{cases} u'=k_1u+k_2v \\ v'=-k_2u+k_1v \end{cases}$ 求解得 u,v.

Def. 初等函数: $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$;

由 Euler 公式反推三角函数: $e^{iz}=i\sin z+\cos z$ $\Rightarrow$

$$\sin z=\sin(x+iy)=\frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x$$

对 $$\cos z=\cos(x+iy)=\frac{e^{-y+ix}+e^{y-ix}}{2}=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x-i\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x$$

[考点]：往年题一般是出个相对复杂的含三角的函数，求实部、虚部，耐心细心便足矣

$S=\sum\left[\frac{z^{6k+1}}{6k+1}-\frac{z^{6k+5}}{6k+5}\right]$

$\mathrm{Res}\,(e^{i\theta})$

$S=S_1-S_5$

$S_\ell=-\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} w^{-\ell j}\ln(1-zw^j)$

Def. 多值函数：

称引起多值性的部分为宗量.

根式：定义 $|w|=\sqrt{|z-a|}$，$\arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$，称 $z-a$ 为宗量.

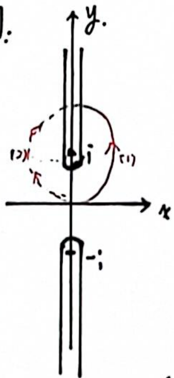
宗量是函数支点的候选点.

沿闭单闭合曲线绕函数单个支点一圈，函数值不还原.

对数：$\ln z=\ln|z|+i\arg z$，多值源于辐角.

例：已知 $\arctan z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$，规定 $\arctan z\big|_{z=0}=\pi$，求 $z=2i$ 处函数及其导数值.

割线如图.



解：$\arctan z=\frac{1}{2i}\left[\ln|1+iz|-\ln|1-iz|+i\arg(1+iz)-i\arg(1-iz)\right]$

$z=0$处 界定 $\arctan z=\pi \iff$ 规定 $z=0$时 $\arg(1+iz)-\arg(1-iz)=2\pi$

沿 (1)，$\arg'=3\pi$

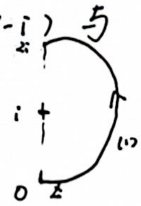
沿 (2)，$\arg'=\pi$ $\Rightarrow$ $\arctan z\big|_{z=2i}=\begin{cases}\frac{3}{2}\pi，沿(1)\\ \frac{\pi}{2}，沿(2)\end{cases}$

而 $(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}$ 单值 ∴导数值为 $-\frac{1}{3}$.

（划1支单值分支仅为了能求导数）.

一个概念的判定：

$\arg(z-i)$ 与 $\arg(1-z)$ 的辐角变化？

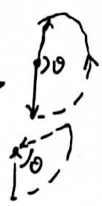


看起来沿 (1) 曲线，

两者均增加 π

故"不用管正负号"？

具体在题中看，画图 $\begin{cases} z-i \to \\ i-z \to \end{cases}$



第三章 复变积分.

Def. 复变积分：$\int_c f(z)dz \triangleq \int_c (u+iv)(dx+idy)=\int_c(udx-vdy)+i\int_c(vdx+udy)$.

复变函数

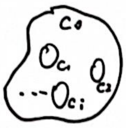
整理.

produced by Xun-cheng

Cauchy 定理, 设有界区域 G, 边界 C 为可求长曲线

若 $f(z)$ 在 G 内解析, $\oint_C f(z)dz = 0$

多连通区域:



$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_i \oint_{C_i(-)} f(z)dz.$$

变形定理、 $\oint_C f(z)dz = \oint_{C'} f(z)dz$.

称 $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z)$. 为 $f(z)$ 的不定积分.

// 小证明 (书 P36). 证 实系数多项式 (除常数式) 必有零点.

证: 记 $P_n(z) = a_n z^n \cdots + a_0$, $(a_n \neq 0)$

则 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(2\cos\theta)} \neq 0 \Rightarrow$ 令 $z = e^{i\theta} \Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{1}{P(z+z^{-1})} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{Q_{2n}(z)} \neq 0$

而 $Q_{2n}(z)$ 如而 $Q_{2n}(0) = a_n \neq 0$. 则 $\frac{z^{n-1}}{Q_{2n}(z)}$ 解析, 由 Cauchy 定理 上式 $=0$ 矛盾!

小圆弧引理:

设 $f(z)$ 在 $z=a$ 空心邻域内连续, 在 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$ 时, $|z-a| \to 0$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致趋于 k

则 $\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z)dz = ik(\theta_2 - \theta_1)$.

大圆弧引理,

$|z| \to \infty$ $\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)dz = iK(\theta_2 - \theta_1)$

Cauchy 积分公式 (计算某点复变函数值).

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})d\theta \quad \text{(均值定理)}$$

/无界区域: 若 $z \to \infty$, $f(z) \to 0$, 则 $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$ 仍成立.

解析函数高阶导数:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

/ Cauchy 型积分 $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(\xi)}{\xi - z}d\xi$ 也有解析性, $f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}}d\xi$.

含参积分的解析性：

$f(t,z)$，$t\in[a,b]$，$z\in\bar{G}$，f 为单值解析函数。

则 $F(z)=\int_a^b f(t,z)\,dt$ 解析，$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}\,dt$.

恶心的典例：

$(\,|dz|=|z|d\theta\,)$

(1) $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i$; $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}=\oint_{|z|=1}dz=0$; $\oint_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|=\oint_{|z|=1}|dz|=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$

$\oint_{|z|=1}\frac{|dz|}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{e^{i\theta}}=0$

(2) $\oint_{|z|=r}\operatorname{Re}z\,dz=$

$\oint_{|z|=r}\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right)dz=\frac{r^2}{2}\oint_{|z|=r}\frac{1}{z}dz=i\pi r^2$

$\int_0^{2\pi} r\cos\theta\cdot ie^{i\theta}d\theta=ir^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\, e^{i\theta}d\theta=i\pi r^2$

(3) $\int_{1-i}^{1+i}\frac{dz}{\sqrt{z-1}}$，$\frac{1}{\sqrt{z-1}}$ 多值，故取单值分支，令割线上岸 $\arg(z-1)=0$

原式 $=2\sqrt{z-1}\Big|_{1-i}^{1+i}$ 故有，$0\le\arg(z-1)\le 2\pi \Rightarrow \arg(z-1)\big|_{1-i}=\frac{3\pi}{2}$，$\arg(z-1)\big|_{1+i}=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore I=2(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{i\frac{3\pi}{4}})=2\sqrt{2}$

(4)：求 $I=\oint_{|z|=100.5}\frac{dz}{(z-1)(z-2)\cdots(z-100)(z-101)}$.

考虑无界区域：作 $|z|=R$ $(R>101)$ 和 $|z-101|=r$ $(r<0.5)$. 记 $f(z)=\frac{1}{(z-1)\cdots(z-100)}$.

$I=\oint_{|z|=R}\frac{f(z)\,dz}{z-101}-\oint_{|z-101|=r}\frac{f(z)\,dz}{z-101}$.

令 $R\to\infty$. $\lim_{z\to\infty}\frac{zf(z)}{z-101}=0$. $\Rightarrow I=-\oint_{|z-101|=r}\frac{f(z)dz}{z-101}=\frac{-2\pi i}{100!}$

(5). 计算 $\oint_{|z|=R}\frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}dz$.

$z=Re^{i\theta}\Rightarrow z^2=R^2e^{2i\theta}$, $\therefore$ 原式 $=\oint_{|\zeta|=R^2}\frac{1}{e^{2\pi i\zeta}-1}$

北京大学
PEKING UNIVERSITY

接上页 — 第三章习题

$$\oint_{|\zeta|=R^2} \frac{1}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{2n} \oint_{\gamma_k} \frac{1}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta$$

考察 $\oint_{\gamma_k} \frac{1}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta = \oint_{\gamma_k} \frac{1}{\zeta-k_i}\cdot\frac{\zeta-k_i}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta = 2\pi i \left.\frac{\zeta-k_i}{e^{2\pi i\zeta}-1}\right|_{\zeta=k_i} \overset{\text{L'Hôpital}}{=\!=} \left.\frac{1}{e^{2\pi i\zeta}}\right|_{\zeta=k_i} = 1$

$\therefore$ 上式 $= 2n+1$

Δ 本题要点在于代换 $\zeta = z^2$ 得，$z = Re^{i\theta}$ 则 $\zeta = R^2 e^{i2\theta} \Rightarrow \phi \in [0, 4\pi]$ 转两圈有：$\oint_{|z|=R} \frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}\,dz = \oint_{|\zeta|=R^2} \frac{1}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta$.

例：分 $a=1$ / $a=2$ 计算 $\oint_{|z|=a} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$

(1) $a=1$ 时，仅 $z=0$ 一个奇点，利用高阶导数公式

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} = \frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z^{10}-2}\right)\Bigg|_{z=0} = 0$$

(2) $a=2$ 时，作大圆 $|z|=R$，由变形定理 $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)}\,dz = \oint_{|z|=R} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)}\,dz$

令 $R\to\infty$ 由大圆弧引理 $\lim_{R\to\infty} z\cdot\frac{1}{z^3(z^{10}-2)} = 0$ 则上式 $=0$!

第四章 — 无穷级数.

/性质：绝对收敛的二重级数具有可交换性，即任意改变求和次序后，级数仍收敛，且与原级数有相同的和

(Q：那收敛域会变吗？/).

/常用.
$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} a_{n-l,l}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{n-l,l} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{l=-n}^{\infty} a_{n-l,l}$$

幂级数收敛圆半径 $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{c_n}\right|^{\frac{1}{n}}$; $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Theorem: Simpson's dissection（解剖定理）.

设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，则 $\sum_{h=0}^{\infty}a_{kn+m}x^{kn+m}=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}w^{-mj}f(w^j x)$.

其中 $w=e^{2\pi i/k}$，$0\le m<k$

例：求 $\cos\theta-\frac{\cos 5\theta}{5}+\frac{\cos 7\theta}{7}-\frac{\cos 11\theta}{11}\cdots\cdots$ (*)

证：考虑 $S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^{6k+1}}{6k+1}-\frac{z^{6k+5}}{6k+5}\right)$. 收敛区域 $|z|<1$

若 $S(z)$ 在 $e^{i\theta}$ 时收敛，而 $(*)=Re(S(z))$ 也收敛.

记 $S_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{6k+i}}{6k+i}$ 利用 $\ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}\cdots\cdots-\frac{z^n}{n}\cdots$

$\therefore S_i(z)=-\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}w^{-ij}\ln(1-zw^j)$ 而 $w=e^{\frac{\pi i}{3}}$ 即得：

$S_1(z)=-\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}e^{-i\pi j/3}\ln(1-ze^{i\pi j/3})$，$S_5(z)=-\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}e^{i\pi j/3}\ln(1-ze^{i\pi j/3})$

$$\therefore S(z)=\frac{i}{3}\sum_{j=1}^{6}\sin\left(\frac{\pi j}{3}\right)\ln(1-ze^{i\pi j/3})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}i}\ln\left(\frac{(1+e^{i(\frac{\pi}{3}+\theta)})(1-e^{-i(\frac{\pi}{3}-\theta)})}{(1-e^{i(\frac{\pi}{3}+\theta)})(1+e^{-i(\frac{\pi}{3}-\theta)})}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}i}\left[\ln\frac{\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2})}+i\pi\right]$$

$Res\, S(z)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 即为所求.

含参无穷积分：若 $\exists\,\phi(t)$ 使 $|f(t,z)|<\phi(t)$，$z\in\bar{G}$. $\int_a^{\infty}\phi(t)\,dt$ 收敛，则 $\int_a^{\infty}f(t,z)\,dt$ 在 $\bar{G}$ 上绝对、一致收敛

例：$F(z)=\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos 2zt\,dz$

先判断：$|\cos 2zt|=\sqrt{\cosh^2 2yt-\sin^2 2xt}\le\cosh 2|yt|\le e^{2|yt|}$

$\therefore |e^{-t^2}\cos 2zt|<\underbrace{e^{-t^2+2y_m t}}_{\phi(t)}$ $\Rightarrow$ 而 $\int_0^{\infty}\phi(t)\,dt$ 收敛

$\therefore F(z)$ 解析 $\Rightarrow F'(z)=-2zF(z)\Rightarrow F(z)=Ce^{-z^2}$. 记 $C=F(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ 得之.

例：求 $\zeta(z,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^z}$ 的收敛区域：

用 Gauss 判别法：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{n+1+a}{n+a}\right)^z=\left(1+\frac{1+a}{n}\right)^z\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-z}=1+\frac{z}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdots$$

$\Rightarrow Re\,z>1$ 时 绝对收敛.

复变函数整理：

第五章. 局域性展开

Taylor 展开：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

收敛范围 $|z-a| < |b-a|$. b是最近的奇点.

Laurent 展开：

$R_1 \le |z-b| \le R_2$，则环域内点作展开：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n, \quad R_1 < |z-b| < R_2.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi.$$

求级数需灵活掌握：级数乘/除法，待定系数法及求导、积分变换等.

孤立奇点. $f(z)$ 在 b点空心邻域内处处可导，则 b 为孤立奇点.

分类依据看 Laurent 级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$.

可去~： $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$， $\lim_{z\to b} f(z) = a_0$.

极点： $\lim_{z\to b} f(z) = \infty$， $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^n$.

$g(z)$ 的 m 阶零点 $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{g(z)}$ 的 m 阶~~零~~极点.

本性~： $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$， $\lim_{z\to b} f(z)$ 不存在.

例：求 $g(z) = \frac{1}{1-pz+qz^2}$ 的 $z=0$ 点邻域内展开式.

令 $\xi = \sqrt{q}\cdot z$， $\alpha = \arccos\frac{p}{2\sqrt{q}}$ 则 $g(z) \triangleq \frac{1}{1-2\cos\alpha\cdot\xi+\xi^2}$

$t^2-(x+\frac{1}{x})t+1 = (\frac{1}{x}t-1)(xt-1)$.

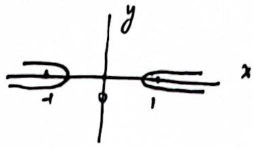
$$\frac{1}{1-\xi\cos\alpha+\xi^2} = \frac{1}{1-\xi(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+\xi^2} \underset{(\xi=z)}{=} \frac{1}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1-ze^{i\alpha}} - \frac{e^{-i\alpha}}{1-ze^{-i\alpha}}\right)$$

$$= \frac{1}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{i(n+1)\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-i(n+1)\alpha}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} \xi^n$$

多值函数：

$f(z)=\operatorname{arctanh} z$，$z=0$ 附近 Taylor 展开.

首先明晰 $\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+z}{1-z}$，分支点 ±1. 规定



规定 $\left.\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}\right|_{z=0}=k\pi i$.

而 $f(z)=\operatorname{arctanh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,z^n$

记 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=a_n$

而 $a_n=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{1+z}\right)+\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]\Bigg|_{z=0}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2k)!\cdot 2=\frac{1}{2k+1}, & n=2k+1\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

$\therefore f(z)=k\pi i+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$

/或分别对 $\ln(1+z)$、$\ln(1-z)$ 展开后相加.

/或也可逐项积分

// 几种技巧：

待定系数法：（Bornoulli 数）

$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n \quad\Rightarrow\quad z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$

$\Leftrightarrow\quad 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}z^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\frac{1}{(k+1)!}z^k$

$1\overset{l=n+k}{=}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{B_k}{k!\,(l-k+1)!}z^l$

$\therefore \sum_{k=0}^{l}\frac{B_k}{k!(l-k+1)!}=\begin{cases}1, & l=0\\ 0, & l\neq 0\end{cases}$

注意到 $\frac{z}{e^z-1}=\frac{z}{2}\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}-1\right)=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}-\frac{z}{2}$ 为 z 的偶函数.

$\therefore\quad \frac{z}{e^z-1}=1-\frac{1}{2}z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$

(#?) 而后得 $\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{B_{2k}}{(2k)!\,(n-2k+1)!}=\frac{1}{2\cdot n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n-1}{2(n+1)!}$

// 几个在推演中发现的式子：$(1+t)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{k!\,(2n-k+1)!}t^k$

$\Rightarrow\quad 2^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{k!\,(2n-k+1)!}$ // $0=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\cdot\frac{(2n+1)!}{k!\,(2n-k+1)!}$

$\Rightarrow\quad \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!\,(2n-2k)!}$

第五章、习题等

笔者踩过的坑：求 $\sin z\cos z$ 在 $z=0$ 的展开.

[法一]. 级数相乘. $\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$， $\cos z=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l z^{2l}}{(2l)!}$

$$\therefore\quad \sin z\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}z^{2(k+l)+1}}{(2k+1)!\,(2l)!}$$

$$\overset{n=k+l}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k)!}\ \underline{\underline{\text{联想二项式}}}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot 2^{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[法2] 原式 $=\frac{1}{2}\sin 2z=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot(2z)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

注意：别老想着技巧！先看函数本身！

笔者踩过的坑：求 $\frac{\sin z}{1-z}$ 在 $z=0$ 的级数展开

$$\text{上式}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}z^{2l}(1+z)$$

$$=(1+z)\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\quad a_n=\begin{cases}0, & n=0\\ \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & 2\nmid n\\ \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}-1]}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & 2\mid n \text{ 且 } n\neq 0.\end{cases}$$

坑：求 $\sec z$ 的展开.

设 $\sec z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{2n}\Rightarrow \cos z\sec z=1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\sum_{l=0}^{\infty}a_l z^{2l}=1\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!}=0\ \text{求解之！}$$

奇之类型具体见习题.