



# 数学物理方法

2023. 02. 22

引言.

物理学: 实验科学 物质运动和结构

工具. 语言.

数学: 思维科学. 概念, 数形, 关系

数学物理  $\Rightarrow$

内容: 反常函数, 积分变换, 微分方程, 特殊函数

(I)

(II)

\量子. 电动力学. 统计. 固体的. 量子场\.

教材. 作业. 不进行期中 教材 wcs/ger. slff.

## §1. 复数的基本概念

### §1.1. 实数与复数

数:  $\begin{cases} "1" \\ "+" \end{cases}$  自然数  $\xrightarrow{0, -1}$  整数  $\xrightarrow{\frac{m}{n}}$  分数  $\xrightarrow{x^2=2}$  第一次数学危机  $\Rightarrow$  无理数.

$\Downarrow$   
实数.  $\Rightarrow$  与数轴对应

第二次数学危机  $\Rightarrow x^2 = -1$  虚数  $i \Rightarrow$  复数  $a+ib$ .  $i = \sqrt{-1}$  虚数.

数系: 复数  $a+ib$ .  $\begin{cases} b=0 \text{ 实} & \begin{cases} \text{有理} \begin{cases} \text{整数} \\ \text{分数} \end{cases} \\ \text{无理} \end{cases} \\ b \neq 0 \text{ 复} & \begin{cases} a=0 \text{ 虚数} \\ a \neq 0 \text{ } a+ib \end{cases} \end{cases}$

基本运算: 交换律  $\begin{cases} \alpha + \beta = \beta + \alpha \\ \alpha \beta = \beta \alpha \end{cases}$

结合律  $\begin{cases} (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \\ (\alpha \beta) \gamma = \alpha (\beta \gamma) \end{cases}$

分配律  $(\alpha + \beta) \gamma = \alpha \gamma + \beta \gamma$

---

## §2. 复数的定义与运算

定义: 一对有序实数  $(a, b)$ , 遵从以下规则:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

则称这对  $(a, b)$  定义了复数  $\alpha = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$

$a, b$  称为  $\alpha$  的实部和虚部.

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha.$$

则  $\begin{aligned} (a, b) + (0, 0) &= (a, b) \\ (0, 0) \times (a, b) &= (0, 0) \end{aligned} \Rightarrow \alpha = (0, 0) \text{ 简记为 } 0.$

而  $(1, 0)(a, b) = (a, b)$ , 简记为 1

$$\text{则}, \quad a = (1, 0)a = (a, 0)$$

$$(0, 1)(0, 1) = -1, \quad \text{定义 } i = (0, 1) = \sqrt{-1}. \quad (i^2 = -1)$$

$$\text{则}, \quad (0, 1)(b, 0) = ib.$$

即, 任意  $\alpha = (a, b) = a + ib$  复数的代数表示

复数相等: 实部相等.

共轭:

$$\alpha = a + ib \quad \text{与} \quad \alpha^* = a - ib \quad \text{互为共轭}$$

$$\alpha\alpha^* = a^2 + b^2 \quad \text{为实数},$$

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{为复数 } \alpha \text{ 的绝对值 (模长)}$$

⇒ 四则运算.

$$\text{除法} \quad \frac{a + ib}{c + id} = \frac{1}{c^2 + d^2} [(ac + bd) + i(bc - ad)]$$

共轭复数.

$$1. \quad (\alpha^*)^* = \alpha$$

$$2. \quad (\alpha \pm \beta)^* = \alpha^* \pm \beta^*$$

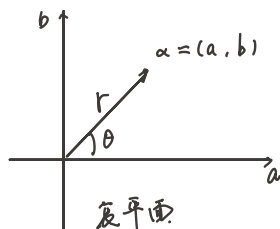
$$3. \quad (\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^* \quad ; \quad (\alpha/\beta)^* = \alpha^*/\beta^* \quad (\beta \neq 0)$$

$$4. \quad \frac{\alpha + \alpha^*}{2} = \operatorname{Re} \alpha \quad ; \quad \frac{\alpha - \alpha^*}{2i} = \operatorname{Im} \alpha.$$

$$5. \quad \alpha\alpha^* = (\operatorname{Re} \alpha)^2 + (\operatorname{Im} \alpha)^2 = |\alpha|^2$$



### §3. 复数的几何表示



复数与复平面上点一一对应.

极坐标,  $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  (三角表示)

$$r = |\alpha|$$

$\theta$ : 称为  $\alpha$  的幅角.  $\theta = \text{Arg } \alpha$  多值性  $\Rightarrow$  周期性.

$$\begin{cases} a = r\cos\theta, & b = r\sin\theta \\ r = \sqrt{a^2 + b^2}, & \tan\theta = \frac{b}{a} \end{cases}, \text{ 取 } (-\pi, \pi) \text{ 内的幅角, 称为幅角主值 } \underline{\arg\alpha}.$$

则,  $\text{Arg } \alpha = \arg\alpha + 2\pi k.$

模的不等式:

$$1. \quad |\text{Re } \alpha| \leq |\alpha|, \quad |\text{Im } \alpha| \leq |\alpha|$$

$$2. \quad |\alpha| \leq |\text{Re } \alpha| + |\text{Im } \alpha|$$

$$3. \quad |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

$$4. \quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta|$$

$$5. \quad |\alpha_1 + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|$$

欧拉公式:  $\alpha = re^{i\theta}$ . 指数表示

极数展开.  $\sin\theta, \cos\theta, e^{i\theta}$  即可知  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ . [  $e^{i\pi} + 1 = 0$  ]

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{i\theta} = \sum \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \underline{i\theta} - \frac{\theta^2}{2} - \underline{i\frac{\theta^3}{3!}} + \frac{\theta^4}{4!} + \underline{i\frac{\theta^5}{5!}} \\ = \cos\theta + i\sin\theta.$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

模长相乘  
幅角相加。

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

例. 求  $(1+i)^8$

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^8 = 16e^{i2\pi} = 16.$$

例. 求  $\sqrt[3]{-8}$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \left[ e^{i(\pi + 2k\pi)} \right]^{1/3} = \begin{cases} 1+i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1-i\sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{多值性}).$$

例. 2D平面直线的复数形式

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

$$\text{令 } z = x + iy, \quad (x = \frac{z+z^*}{2}, \quad y = \frac{z-z^*}{2i})$$

$$\text{则, } (a - ib)z + (a + ib)z^* + 2c = 0.$$

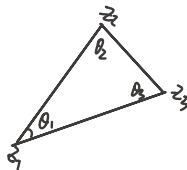
$$\text{令 } \beta = a + ib, \quad \beta^* z + \beta z^* + 2c = 0. \quad (\beta \neq 0, c \in \mathbb{R}).$$

例. 证明  $\Delta$  的内角和等于  $\pi$ .

$$\theta_1 = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

$$\theta_2 = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$$

$$\theta_3 = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \Rightarrow \text{相乘等于 } -1.$$



$$\text{故, } \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \arg(-1) + 2k\pi = \pi + 2k\pi.$$

$$\text{又, } \theta_i \in (0, \pi) \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$$

## §4 复数序列与极限

按某种规律，按一定顺序排列的无穷多个复数

$$z_n = x_n + iy_n$$

称为一个复数序列(数列)，记为  $z_n$

聚点：给定的序列  $z_n$ ，若存在复数  $z$ ，对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，恒有无穷多个  $z_n$ ，满足  $|z_n - z| < \varepsilon$ ，称  $z$  为序列  $z_n$  的一个聚点

[一个序列可以有多个聚点]

eg.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}$  有两聚点 0, 1.

实数序列：若干聚点中，最大聚点称为上极限，记为  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z_n$

最小聚点称为下极限，记为  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z_n$

复数极限：给定序列  $z_n$ ，若存在复数  $z$ ，对任意给定的  $\varepsilon > 0$ ，总能找到

$N(\varepsilon) > 0$ ，使  $n > N$  时， $|z_n - z| < \varepsilon$ ，称  $z$  为序列  $z_n$  的极限。

或称序列  $z_n$  收敛于  $z$   $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \{\rightarrow \text{唯一聚点}\}$

有界序列和无界序列

给定  $z_n$ ，若存在正数  $M$ ， $\forall z_n, |z_n| < M$ ，则序列  $z_n$  称为有界的，

否则称为无界的

Bolzano - Weierstrass 定理

一个有界无穷序列至少有一个聚点

Cauchy 必要条件

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ ，当  $n > N$  时， $\forall p$ ，有：

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

### §5. 无穷远点与复球面

无界序列  $z_n$ : 不存在  $N$ , 使  $n > N$  时,  $|z_n| < M$ .

总有无穷多个  $z_n$ , 满足  $|z_n| > M$ .

则, 无穷远点是无界序列的一个聚点

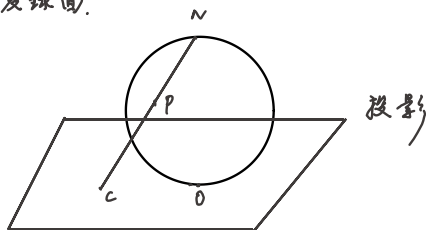
若一个无界序列在有限远处无聚点, 则无穷大是唯一聚点,

记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

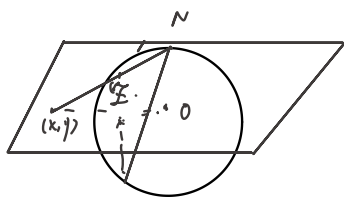
复数理论中, 无穷远点为复平面上的“一个点”, 模大于任意正实数,

幅角不定 (称为(扩充的)复平面)

引入复球面.



or. Riemann 球面.



以  $(0, 0)$  为球心, 半径为 1 的球面.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$(x, y, 0)$  为复平面

$(0, 0, 1)$  为极点  $N$

复平面  $z = (x, y)$  . 复球面  $\hat{z} = (x_1, y_1, z_1)$

---对应关系:

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$y_1 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$z_1 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\text{故, } z_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad y_1 = \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad z_1 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

$$(\text{or, } z = \frac{x_1 + iy_1}{1 - z_1})$$

另一个理解:  $z = \frac{1}{t}$ .

则  $t \rightarrow 0$  时  $z \rightarrow \infty$ .

$\{t \text{ 的零点即 } z \text{ 的无穷远点}\}$

## Chapter 2. 复变函数.

### §1. 复变函数和区域

实数  $\Rightarrow$  区间, 端点, 邻域  $\Rightarrow$  实变函数.

$\Rightarrow$  推广到复平面上:

区域, 边界, 邻域  $\Rightarrow$  复变函数

点集: 复平面或复球面上一些复数的集合, 称为点集, 记为  $E$ .

点集的内点: 若以某一点为圆心作一半径足够小的圆, 圆内所有的点均属于该点集, 则此点称为点集的内点.

区域: 满足下列两个条件的点集称为区域, 记作  $G$

1. 全由内点所构成

2. 具有连通性, 即点集中任意两点均可用一条折线连接, 且折线上点全属于该点集

边界点: 不属于该区域, 但以其为圆心的任意小的圆内, 总有属于该区域的点.

边界点的全体构成边界, 记为  $C$

方向: 沿边界走, 区域在左边, 称为边界的正向



闭区域: 区域  $G$  及其边界  $C$  所组成点集称为闭区域

记为  $\bar{G} = G + C$

单连通区域: 任意闭合围道内的点都属于该区域

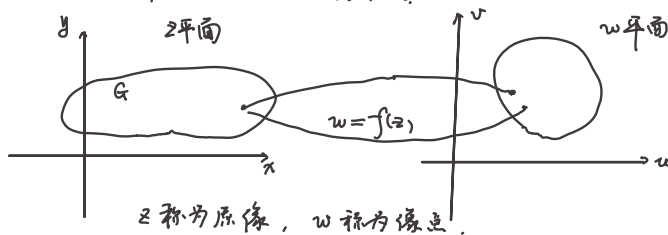
复连通: 反之

复变函数：设有  $G$ ，对于  $G$  内的每一个  $z$  值，都有一或多个  $w$  与  $z$  对应，

则  $w$  称为  $z$  的复变函数，记为  $w = f(z)$ ，定义域为  $G$

因  $z = x + iy$ ，故  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，

其中  $u, v$  为二元实函数。



## §2. 极限和连续.

邻域： $|z - z_0| < \rho$  所确定的点集

即以  $z_0$  为圆心， $\rho$  为半径的圆，称为  $z_0$  的邻域

函数的极限.

$f(z)$  在  $z_0$  的邻域内有定义，存在复数  $a$ ， $\forall \varepsilon > 0$ ，总找到  $\delta > 0$ ，

使得  $0 < |z - z_0| < \delta$  时，恒有  $|f(z) - a| < \varepsilon$ ，

称  $z \rightarrow z_0$  时， $f(z)$  有极限，表示为  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$

连续：设函数  $f(z)$  在  $z_0$  点及其邻域内有定义，且  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

就称  $f(z)$  在  $z_0$  点连续

函数在区域  $G$  内每一点处都连续，就称该函数在  $G$  内连续。

在闭域连续的函数具有两个性质

1.  $|f(z)|$  在  $\bar{G}$  中有界，并可达到它的上下界

2.  $f(z)$  在  $\bar{G}$  中一致连续，即  $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists$  与  $z$  无关的  $\delta(\varepsilon) > 0$ ，使

$\bar{G}$  中任意两点  $z_1$  和  $z_2$ ，只要  $|z_1 - z_2| < \delta$ ，就有  $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

连续函数的和、差、积仍然连续，商在分母不为 0 时连续

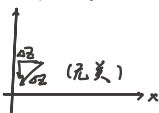
### §3 导数.

$w = f(z)$  是  $G$  内的单值函数, 若在  $G$  内某一点  $z$ ,

极限  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$  存在, 则称  $w = f(z)$  在  $z$  点可导.

此极限的值记为  $f'(z)$ , 称为  $f(z)$  在  $z$  点的导数.

此定义与  $\Delta z \rightarrow 0$  的方式无关



$\Delta z \rightarrow 0$  的两种方式

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0 & f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ \Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0 & f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad ||$$

故.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

函数可导的必要条件 Cauchy-Riemann 条件

可以证明, 满足 C-R 条件的连续函数极限存在,

则可导的充分条件.  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  存在且连续, 并且满足 C-R 方程.

简单证明:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{array} \right.$$

$$\text{则 } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \text{ 与 } \Delta z \rightarrow 0 \text{ 方式无关}$$

可导与连续:

某一点可导的函数必在该点连续, 但区域中连续函数不一定可导.

例如  $\operatorname{Re}(z)$  全平面连续, 但处处不可导.

形式上, 复变函数的运算规则可用于复变函数.

函数的运算法则:

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z) \\ (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ (f(z)/g(z))' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0) \\ f(g(z))' = f'(g)g'(z) \end{array} \right.$$

## §4. 解析函数 (analytical)

如果  $f(z)$  在点  $z_0$  及其邻域内处处可导, 称  $f(z)$  在  $z_0$  点解析

若  $f(z)$  在区域  $G$  内每点都可导, 则称  $f(z)$  在  $G$  内的解析函数

某点解析  $\Rightarrow$  可导  
★

例.  $f(z) = |z|$  在  $z=0$  可导不解析

某区域解析  $\Leftrightarrow$  可导

物理学量均解析.

解析函数的实虚部满足 C-R 方程.

性质:

1. 若  $f(z) = u + iv$  在  $G$  中解析, 则

$u(x, y) = \text{常数}$  及  $v(x, y) = \text{常数}$ . 曲线方向满足

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

< 互相垂直 >

2.  $u, v$  满足 2D 的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$



$$\text{证. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\} \nabla^2 u = 0.$$

$$\text{同理 } \nabla^2 v = 0$$

调和函数: harmonic.

定义在某区域上, 有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程的函数, 称为区域上的调和函数

解析函数实虚部都是调和函数

共轭调和函数: 如  $u, v$  是区域上的一对调和函数, 且满足 CR 方程, 则称  $v$  为  $u$  的共轭调和函数

函数的奇点:

函数在某一点  $z_0$  不是解析的 (无定义, 不可导, 可导不解析) 则称  $z_0$  为函数的奇点

例.  $z=0$  为  $w = \frac{1}{z}$  的奇点

讨论  $f(z)$  在  $z=\infty$  点的解析性: 令  $z = \frac{1}{t}$ , 研究  $t=0$  的解析性.

由  $u$  确定  $v$ :

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \end{aligned} \Rightarrow \text{即 } v = \int \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \Rightarrow \underline{v(x, y)} \quad (\text{差一个常数})$$

例. 已知  $u(x, y) = x^2 - y^2$ , 求  $f(z)$

$$\text{解: } dv = 2y dx - 2x dy = d(2xy) \Rightarrow v = 2xy + C$$

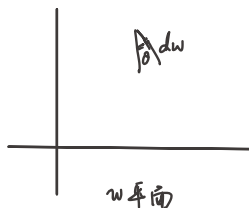
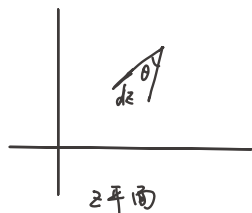
$$\therefore f(z) = z^2 + iC.$$

$$\text{(法 II) 在 } u \text{ 中代入 } x = \frac{z+z^*}{2}, y = \frac{z-z^*}{2i} \Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2}(z^2 + z^{*2}) = \frac{1}{2}(f(z) + f^*(z))$$

$$\text{故 } f(z) = z^2 + iC.$$

## §5. 解析函数的图像变换特性.

导数的几何意义:  $w = f(z)$  在  $z$  点可导, 则  $dw = f'(z) dz$   
(及区域)



伸缩率  $|\frac{dw}{dz}| = |f'(z)|$

夹角  $\theta$  不变.

整体旋转, 偏转角  $\arg f'(z)$

若  $|f'(z)| \neq 0 \Rightarrow$  保角变换

{ 解析函数的保角性. }

conformal transformation.

### 第3章. 初等函数

基本的解析函数: 幂. 指. 三. 双曲.  $\Rightarrow$  实数推广

#### §1 幂函数 $z^n$

当  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $z^n$  在全平面解析,

当  $n = 1, 2, \dots$  时,  $z = \infty$  为奇点

当  $n = -1, -2, \dots$ ,  $z^n$  在除  $z=0$  的全平面解析,  
 $z = \infty$  也解析.

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

多项式函数:  $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

多项式有理函数:  $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad (Q_m \neq 0)$

#### §2. 指数函数

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$e^z$  在全平面解析,  $(e^z)' = e^z$

在  $\infty$  点无定义,  $z = \infty$  为  $e^z$  的一个奇点.

周期性:  $i2\pi \quad (e^{i2\pi} = 1)$

$$\left[ e^{i2\pi + z} = e^z \right]$$

### §3. 三角函数.

$$\begin{cases} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases} \quad \text{在全平面解析}$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

$\sin z, \cos z$  为周期  $2\pi$  的周期函数.

$$i \sin i = \frac{e^{-1} - e^1}{2} = -1.17 \quad \left. \vphantom{\frac{e^{-1} - e^1}{2}} \right\} > 1. \quad \text{可以超过 1.}$$

$$\cos i = -1.51$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}. \quad \text{其余同理. (tan, cot, sec, cx).}$$

实数三角恒等式在复数意义上恒成立

\ 三角函数又来源于指数函数 \.

### §4. 双曲函数.

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{则 } \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \quad \text{其余同理}$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz$$

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} iz$$

$$\operatorname{th} z = -i \tan iz$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z$$

$$\operatorname{th} iz = i \tan z.$$

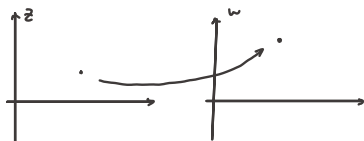
$$\text{导数 } (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$$

\ [与实数一致]

\ 实质上和三角函数关联

单值函数



§ 5. 多值函数: 根式函数.

$w = f(z)$  对 1 个  $z$  值有多个  $w$  与之对应

根式函数  $w = \sqrt{z-a}$ .  $z=a, w=0$   
 $z=\infty, w=\infty$ . 宗量  $z-a$ .

除了  $z=a$  和  $z=\infty$  以外,  $z$  对应两个  $w$  值.

$$\text{设 } z-a = re^{i\theta}$$

$$w = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + n\pi)}$$

对一个  $z$  值有两个  $w$  与之对应,  $w_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$w_2 = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

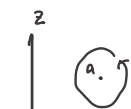
单值分支: 一个多值函数, 划分为若干个分支,

每个分支为一个单值函数, 称为多值函数的单值分支.

多值性来源: 幅角的多值性.

$$|w| = \sqrt{|z-a|}$$

$$\arg w = \frac{1}{2} \arg(z-a)$$



绕  $a$  转一周:  $w$  不复原

绕  $a$  转二周:  $w$  复原



绕其点转,  $w$  复原

枝点: 当  $w = f(z)$  绕某点  $z=a$  转一周, 函数值不复原,

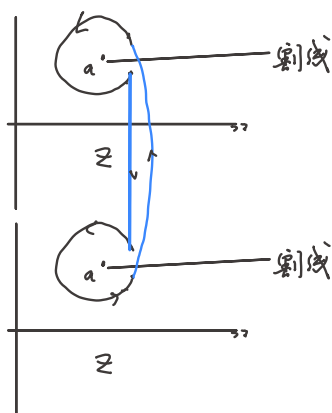
则  $z=a$  称为  $w=f(z)$  的一个枝点

则  $z=a$  和  $z=\infty$  为  $w=f(z)$  的枝点

割线：割线起以下作用：当  $z$  连续变化时，不得跨越割线，  
 从而使  $w$  值只能在一个单值分支内变化。

(往往连接枝点和无穷远点)。

Riemann 面 (支点不是重点)



相互粘连  $\Rightarrow$  Riemann 面。

与割线方式有关

§6. 对数函数  $w = \ln z$

$w = \ln z$  定义为  $e^w = z$  为指数函数的反函数。

令  $w = u + iv$ ,  $z = re^{i\theta}$ .

$$e^u e^{iv} = r e^{i\theta} \Rightarrow u = \ln r = \ln |z|$$

$$v = \theta + 2n\pi$$

$$w = \ln z = \ln |z| + i(\theta + 2n\pi)$$

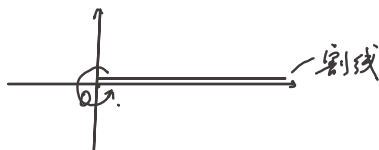
$= \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ . 为多值函数 (幅角多值性)

枝点  $z=0$  和  $z=\infty$

无穷多个单值分支。

(Riemann 面无穷多页)

导数  $w' = \frac{1}{z}$



§3.7 函数  $z^\alpha$  ( $\alpha$  为任意实数)

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

$\alpha = n$  (整数):  $w = z^n$  幂函数

$$\alpha = \frac{p}{q} \text{ 有理数 } \quad z^\alpha = e^{\frac{p}{q} \ln z + i 2\pi k}$$

$$= e^{\frac{p}{q} \ln z} e^{i \frac{2\pi p}{q} k} \quad \text{转 } q \text{ 圈回到初始}$$

$\alpha = \text{无理数/实数}$

导数:  $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$

§8. 反三角函数.

$$w = \arcsin z, \quad \text{即 } z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$\Rightarrow e^{iw} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$$

$$w = -i \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2})$$

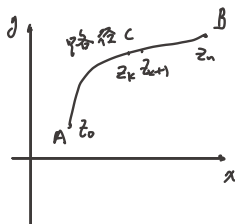
考虑到  $\sqrt{\quad}$  的多值性,

$$w = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$$

同理, 
$$\begin{cases} \arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \\ \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2-1}) \\ \arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \end{cases}$$

## 第四章. 复变积分.

### 复平面的线积分



分为  $n$  段.  $z_0 = A, z_n = B$ .

$\xi_k$  为  $[z_{k-1}, z_k]$  上一点.

求和

$$\sum_{k=0}^n f(\xi_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=0}^n f(\xi_k) dz_k$$

$n \rightarrow \infty, \max |dz_k| \rightarrow 0. (n!)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(\xi_k) dz_k = \int_A^B f(z) dz = \int_C f(z) dz$$

$$= \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

若  $C$  分段光滑,  $f(z)$  为  $C$  上连续函数, 则复变积分一定存在一些性质:

1. 如积分  $\int_C f_1 dz, \int_C f_2 dz, \dots, \int_C f_n dz$  存在.

$$\text{则 } \int_C (f_1 + \dots + f_n) dz = \int_C f_1 dz + \dots + \int_C f_n dz$$

2.  $C = C_1 + \dots + C_n$

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \dots + \int_{C_n} f dz$$



$$3. \int_C f dz = - \int_C f dz$$

$$4. \int_C a f(z) dz = a \int_C f(z) dz, \quad a \text{ 为常数}$$

$$5. \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

$$6. \left| \int_C f(z) dz \right| \leq M l, \quad M \text{ 为 } |f(z)| \text{ 在 } C \text{ 上上界, } l \text{ 为 } C \text{ 的长度} = \int_C |dz|$$

## §2. 柯西定理

### §2.1 单连通区域

$$\bar{G} \text{ 中的解析函数 } \oint_C f(z) dz = 0$$

证: Stoke 公式  $\iint_{\sigma} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$$2D \text{ 下, } \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\lambda} (F_x dx + F_y dy) \quad (\text{Green 公式})$$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \\ &= - \iint_{\lambda} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &\stackrel{CR}{=} 0. \end{aligned}$$

成立条件:  $f(z)$  在  $G$  中解析,  $\bar{G} = G + C$  中连续

推论.  $f(z)$  在单连通  $\bar{G}$  内解析, 则  $\int_C f(z) dz$  与路径无关.

$$\Rightarrow \int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) \text{ 为 } G \text{ 内单值. 不定积分}$$

定理. 设  $f(z)$  在单连通  $G$  内解析, 则  $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$  也在  $G$  内解析,  
且  $F'(z) = f(z)$

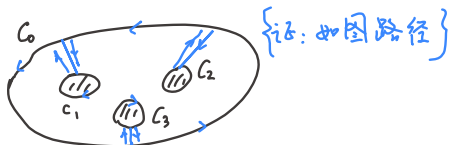
原函数: 若  $\phi'(z) = f(z)$ ,  $\phi(z)$  为  $f(z)$  的原函数.  $\int_{z_0}^z f dz = \phi(z) - \phi(z_0)$

## §2.2. 复连通区域的柯西定理

若  $f(z)$  在  $\bar{G}$  内单值解析, 则

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \sum_i \oint_{C_i} f(z) dz,$$

$C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  为构成  $\bar{G}$  的边界的分段光滑曲线,  
且路径方向相同

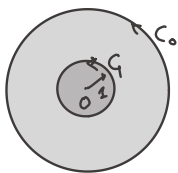


例. 计算  $\oint_C z^n dz$ .  $n$  为整数,  $C$  为逆时针

解: ①  $n \geq 0$ ,  $z^n$  连续, 故  $\oint_C z^n dz = 0$ .

②  $n < 0$ ,  $C$  内不含  $z=0$  的区域连续.  $\oint_C z^n dz = 0$

若  $C$  内含有  $z=0$ .



$$\oint_C f dz = \oint_{|z|=1} dz = \int_0^{2\pi} e^{i\theta n} i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} i d\theta.$$

$$= \begin{cases} 2i\pi, & n=-1 \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

综上

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \text{ 且 } C \text{ 内包含 } z=0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

核心

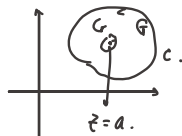
# §4.3. 柯西积分公式

有界区域内的柯西积分:

$f(z)$  为  $\bar{G}$  中单值解析函数.  $\bar{G}$  的边界为  $C$  光滑曲线.

$a$  为  $G$  的内点.

则 
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz, \text{ 沿 } C \text{ 为正.}$$



证:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} &= \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz, \text{ 令 } z = a + re^{i\theta} \\ &= \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \cdot \frac{1}{re^{i\theta}} \cdot ri e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \quad \text{令 } r \rightarrow 0 \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a) \end{aligned}$$

无界区域的柯西积分: 如果  $f(z)$  在简单闭围道  $C$  上及  $C$  外解析且  $z \rightarrow \infty$  时,  $f(z)$  一致地趋于 0. 则 Cauchy 积分:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \text{ 仍成立,}$$

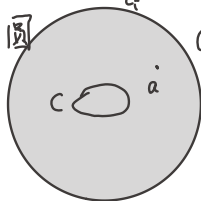


$a$  为  $C$  外一点,  $C$  为顺时针方向.

① 证明. 换元  $z = \frac{1}{t}$

$$\text{右} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right) dt = f(a) - f(\infty) = f(a)$$

② 另法: 大圆



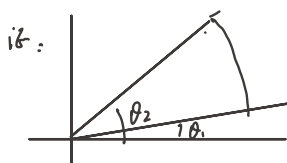
引入  $C_R$  包含围道  $C$  和  $a$  点

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-a} dz = a$$



大圆引理:  $f(z)$  在  $\infty$  的邻域内连续, 当  $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ ,  $z \rightarrow \infty$  时,  $f(z)$  一致  $\rightarrow k$ ,

则  $R \rightarrow \infty$  时 
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z} dz = i k (\theta_2 - \theta_1)$$



因  $\int_{C_R} \frac{dz}{z} = i(\theta_2 - \theta_1)$   
 则,

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z} dz - ik(\theta_2 - \theta_1) \right| = \left| \int_{C_R} (f(z) - k) \frac{dz}{z} \right|$$

$$\leq \int_{C_R} |f(z) - k| \left| \frac{dz}{z} \right|$$

$\varepsilon$ - $M$ 语言:  $|k| = R > M$  时,  $|f(z) - k| < \varepsilon \Rightarrow \leq \varepsilon \int \left| \frac{dz}{z} \right| = \varepsilon(\theta_2 - \theta_1)$

故  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z} dz = ik(\theta_2 - \theta_1)$

由此, 现  $k = 0$ .

故, 有:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$

#### §4. 解析函数的高阶导数

如果  $f(z)$  在  $\bar{G}$  中解析, 则在  $G$  内  $f(z)$  任意阶导数存在,

且  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$

此处  $C$  是  $\bar{G}$  正向边界,  $z$  为任意一点.

证:  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi$

两边求导  $(n)$  次  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$

$\Rightarrow d$  与  $\oint$  可交换性?

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{h} \oint \left( \frac{f(\xi)}{\xi - z - h} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R1], \quad \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \left| h \cdot \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |h \cdot M \cdot l|\end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ , 故

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Cauchy 型积分,

在一段分段光滑曲线  $C$  上连续的函数  $\phi(\xi)$  构成的积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

为不在曲线上点  $z$  的解析函数, 称为 Cauchy 型积分

其导数

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

### §5. 柯西积分公式的推论

Morera 定理. 设  $f(z)$  在闭区域  $\bar{G}$  连续, 对于  $\bar{G}$  中的任何闭合围道, 都有  $\oint_C f(z) dz = 0$

则  $f(z)$  在  $G$  内解析 (Cauchy 定理的逆定理)

证: 对任何围道  $\oint_C f(z) dz = 0$

$\therefore F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$  与路径无关

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \right| \cdot \varepsilon |\Delta z| \rightarrow 0$$

故有:  $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$

$\therefore F(z)$  解析, 导数为  $f(z)$  也解析 (由 §4).

Cauchy 不等式: 设  $f(z)$  在闭区域  $\bar{G}$  中解析, 则  $|f(z)|$  在  $\bar{G}$  边界上连续, 故  $|f(z)|$  必有且达到上界  $M$ .

$$\text{则, } |f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M l}{d^{n+1}}$$

式中  $l$  为  $C$  长度,  $d$  为  $z$  到边界的最短距离

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{R^n} \quad \text{若边界为圆且 } z \text{ 为圆心.}$$

最大模定理:  $f(z)$  为  $\bar{G}$  内解析函数, 则  $|f(z)|$  最大值必在  $\bar{G}$  边界上.

证: 设  $M$  为  $|f(z)|$  在边界的上界.

考虑  $(f(z))^m$ .  $m$  为任意值

$$|f(z)|^m \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M^m}{d} \Rightarrow |f(z)| \leq M \left( \frac{1}{2\pi d} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{令 } m \rightarrow \infty, \quad |f(z)| \leq M.$$

---

刘维尔定理 Liouville.

如果  $f(z)$  在全平面解析, 且  $z \rightarrow \infty$  时  $|f(z)|$  有界, 则  $f(z)$  为常数

证: 以任意有限远点为圆心, 作圆  $C_R$

则由 Cauchy 不等式

$$|f'(z)| \leq \frac{M_R}{R}, \quad M_R \text{ 为 } |f(z)| \text{ 在 } C_R \text{ 上界}$$

$R \rightarrow \infty$  时  $M_R$  有界 故

$$|f'(z)| \leq \frac{M_R}{R} \rightarrow 0 \quad \therefore |f'(z)| = 0$$

$\therefore f(z)$  为常数

---

均值定理: 函数  $f(z)$  在解析区域  $G$  内任意点  $a$  的函数值  $f(a)$  等于以  $a$  为圆心, 完全位于  $G$  内任一圆周上  $f(z)$  的平均.

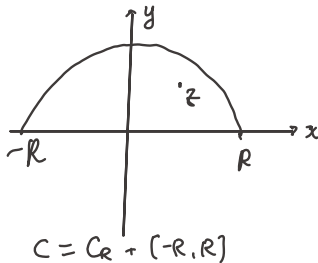
$$\text{即 } f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta$$

## §6. Poisson 公式

解析函数: 实-虚部满足 CR 方程

$$\text{证. } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0, \quad \text{且已知 } u(x,0) \text{ 或 } v(x,0)$$

得由上半平面积分



$z$  为上半面一点

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$z^*$  在围道外.

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi$$

令  $z = x + iy$ ,  $\xi = \rho + i\eta$ ,  $R \rightarrow \infty$

$$\left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(\rho)}{\rho - z^*} d\rho + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi \end{aligned} \right. \quad (R \rightarrow \infty)$$

故相减.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\rho)}{\rho - z^*} d\rho$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\rho|_{\eta=0})}{(\rho - x)^2 + y^2} d\rho$$

$$\text{即 } u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\rho, 0)}{(\rho - x)^2 + y^2} d\rho$$

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\rho, 0)}{(\rho - x)^2 + y^2} d\rho$$

泊松公式

或相加:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(\rho - x) f(\rho|_{\eta=0})}{(\rho - x)^2 + y^2} d\rho$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho - x) u(\rho, 0)}{(\rho - x)^2 + y^2} d\rho \\ v = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho - x) \cdot u(\rho, 0)}{(\rho - x)^2 + y^2} d\rho \end{cases}$$



## 第五章. 无穷级数

序列  $\{a_n\}$   $f(z) = \sum a_n(z)$

### §1. 复数级数

#### §1.1 级数的收敛及其判据

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  复数级数.

其部分和  $S_n = u_1 + \dots + u_n$  构成了一个序列  $\{S_n\}$

若  $S_n$  收敛, 则称级数收敛. 否则称为级数发散

收敛判据: 对任意一个  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N(\varepsilon) > 0$ , 当  $n > N$  时,  
对任意正整数  $p$ , 有:

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

当  $p=1$  时得到必要条件  $n \rightarrow \infty$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

if  $u_n = \alpha_n + i\beta_n$ , then  $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$ .

#### §1.2. 绝对收敛

若  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  绝对收敛.

则绝对收敛的级数必定收敛.

若  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  收敛, 但  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  发散, 则称之为条件收敛.

$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ : 实数正项级数  $\Rightarrow$  判别法运用

比较判别法: 设  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  为正项级数.

若  $|u_n| \leq v_n$ , 且  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  收敛, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  收敛

反之, 若  $|u_n| \geq v_n$ , 且  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  发散, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  发散.

(不能判断  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  条件收敛或发散)

比值(达朗贝尔)判别法

if  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l < 1$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  绝对收敛.

if  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l > 1$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  发散

$\{l=1: \text{不能确定收敛性}\}$

根式判别法(柯西)

如果  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  绝对收敛.

$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |u_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  发散.

---

绝对收敛级数的性质

① 可交换性: 级数各项先后性质可以改变.

② 重组: 一个绝对收敛级数可重组为若干个绝对收敛的级数之和

③ 可乘性: 绝对收敛级数之积必定绝对收敛

$$\sum_k u_k \sum_x v_x = \sum_{k,x} u_k v_x = \sum_n w_n$$

放宽: ①  $\sum u_k, \sum v_k$  收敛, 且其一绝对收敛 } 即可得  $w_n$  绝对收敛  
②  $\sum u_k, \sum v_k, \sum w_n$  都收敛

## §2. 函数级数

某点收敛:  $u_k(z)$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) 在某区域中有定义,

且对于  $z_0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)$  收敛, 则称  $\sum u_k(z)$  在  $z_0$  点收敛.

else, 则称在  $z_0$  点发散

某区域收敛:  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  在  $G$  内每一点都收敛, 则称  $\sum u_k(z)$  在  $G$  内收敛, 其和函数  $S(z)$  为  $G$  内单值函数.

一致收敛. 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在一个与  $z$  无关的  $N(\varepsilon)$ , 使  $n > N(\varepsilon)$

时,  $|S(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z)| < \varepsilon$ , 称  $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  在  $G$  内

一致收敛

一致收敛的判别法 (Weierstrass 判别法)

若  $|u_k(z)| < a_k$ ,  $a_k$  与  $z$  无关, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$  收敛.

则  $\sum u_k(z)$  在  $G$  内绝对且一致收敛.

一致收敛级数的性质:

1. 连续性. 若  $u_k(z)$ ,  $\forall k$  在  $G$  内连续, 且  $\sum u_k(z)$  在  $G$  内一致收敛, 则

$S = \sum u_k(z)$  也是  $G$  内的连续函数.

证.  $z_0 \in G$ .  $z$  为  $z_0$  邻域内一点. 则  $|S(z) - S(z_0)| = |S(z) - S_n(z) + S_n(z) - S_n(z_0) + S_n(z_0) - S(z_0)|$

$$\leq |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S(z_0) - S_n(z_0)|$$

$S(z)$  一致收敛 对任意  $\varepsilon > 0$ , 只要  $n > N(\frac{\varepsilon}{3})$ ,

$$|S(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又,  $S_n(z) = \sum u_k(z)$  为  $G$  内连续函数.

$\forall \varepsilon$ , 存在  $\delta > 0$ , s.t. 当  $|z - z_0| < \delta$  时,  $|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore$  对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $|z - z_0| < \delta$ ,

$$\text{就有 } |S(z) - S(z_0)| < \varepsilon$$

$\therefore S(z)$  连续

则,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum u_k(z) = \sum \lim_{z \rightarrow z_0} u_k(z)$  逐项求极限.

2. 逐项积分 设  $C$  为  $G$  内一段分段光滑曲线, 如果  $u_k(z)$  是  $C$  上的连续函数,  $\sum u_k(z)$  一致收敛, 则可以逐项积分

$$\int_C \sum u_k dz = \sum \int_C u_k dz$$

$$\text{证: } \int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k dz = \int_C \sum_{k=1}^n u_k dz + \int_C R_n dz \quad R_n: \text{余项}$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_C u_k dz + \int_C R_n dz \quad (R_n = S(z) - S_n(z))$$

对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N(\varepsilon) > 0$ ,  $n > N$  时,

$$R_n(z) = |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

$$\therefore \left| \int_C R_n dz \right| \leq \int_C |R_n| |dz| \leq \varepsilon L, \quad L \text{ 为 } C \text{ 的全长}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C R_n dz = 0. \quad \text{故 } \int_C \sum u_k dz = \sum \int_C u_k dz$$

3. 逐项微分 (Weierstrass 定理)

设  $u_k(z)$  在  $\bar{G}$  中单值解析,  $\sum u_k(z)$  在  $\bar{G}$  中一致收敛  
则此级数  $f(z)$  是  $G$  内解析函数,

$$f'(z) = \sum u'_k(z), \quad \text{且求导后的级数在 } G \text{ 内仍然一致收敛}$$

证: ① 先证明  $f(z)$  在  $G$  内解析.

$$\because u_k(z) \text{ 解析, Cauchy 公式 } u_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u_k(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (z \text{ in } G)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(z) &= \sum u_k(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum \oint_C \frac{u_k(\xi)}{\xi - z} d\xi \end{aligned}$$

$$\text{故 } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sum u_k(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$\therefore f(z)$  为  $G$  内解析函数

另证: 对  $\bar{G}$  中围道 Cauchy 定理,  $\oint_C u_k(z) dz = 0$

又  $\sum u_k(z)$  一致收敛

$$\text{故 } \sum \oint_C u_k(z) dz = \oint_C [\sum u_k(z)] dz = 0.$$

由 Morera 定理  $\therefore f(z)$  为  $G$  中解析函数.

②. 证明可逐项求导.

$\bar{G}$  为  $G$  内的任意闭区域,  $\partial \bar{G}' = C'$ .

则  $f(z)$  在  $\bar{G}'$  解析, 有:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z) &= \frac{p!}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi \\ &= \frac{p!}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{\sum u_k(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi \\ &= \sum \frac{p!}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{u_k(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}} d\xi = \sum u_k^{(p)}(z). \end{aligned}$$

③. 证明导数在  $G$  中一致收敛

$\therefore \sum u_k$  在  $C$  上一致收敛

$\therefore \forall \varepsilon > 0$ , 只要  $N > N(\varepsilon)$ , 总有  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} u_k(z) \right| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{n+1}^{n+q} u_k^{(p)}(z) \right| = \left| \sum_{n+1}^{n+q} \frac{p!}{2\pi i} \oint_C \frac{u_k(z)}{(z-\xi)^{p+1}} d\xi \right|$$

$$\leq \frac{p!}{2\pi} \oint_C \frac{\left| \sum_{n+1}^{n+q} u_k(z) \right|}{|z-\xi|^{p+1}} |d\xi|$$

$$< \frac{p! \varepsilon l}{2\pi d^{p+1}} \quad d \text{ 为 } C-C' \text{ 的最小距离, } l \text{ 为 } C' \text{ 周长}$$

( $\sim \varepsilon \rightarrow 0$ )

$\therefore \sum u_k^{(p)}(z)$  一致收敛.

### §3. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + \dots + C_n(z-a)^n \quad \text{正幂次项}$$

1. 阿贝尔第一定理. 如果  $\sum C_n(z-a)^n$  在  $z_0$  收敛, 则它在以  $a$  为圆心, 半径  $|z_0-a|$  的圆内绝对收敛, 而且在略小于  $z_0$  的圆  $|z-a| \leq r < |z_0-a|$  中一致收敛

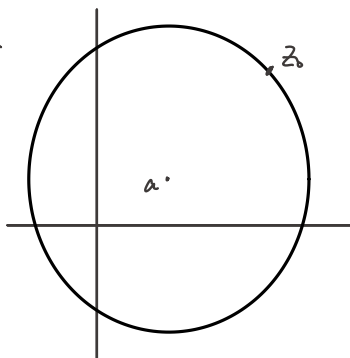
证: 收敛.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(z-a)^n = 0, \text{ 故 } \exists q > 0,$$

$$\text{使 } |C_n(z-a)^n| < \delta$$

$$|C_n(z-a)^n| = |C_n(z_0-a)^n| \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n$$

$$< q \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n$$



当  $|\frac{z-a}{z_0-a}| < 1$ , 即  $|z-a| < |z_0-a|$  时,

级数是收敛的, 且  $|\frac{z-a}{z_0-a}|^n$  收敛

由M判别法,  $|z-a| \leq r < |z_0-a|$  时,

$\sum C_n(z-a)^n$  绝对且一致收敛.

---

推论: 若  $\sum C_n(z-a)^n$  在  $z_0$  发散, 则级数在圆  $|z-a| = |z_0-a|$  之外处处发散  
证. 反证即可

---

收敛圆: 存在一个以  $a$  为圆心,  $R$  为半径的圆

幂级数  $\sum C_n(z-a)^n$  在圆的内部绝对收敛, 在圆外发散.

此圆称为幂级数的收敛圆.  $R$  称为收敛半径

求  $R$  的方法.

比值 (D'Alembert)

$\lim \left| \frac{C_{n+1}(z-a)^{n+1}}{C_n(z-a)^n} \right| < 1$  时, 级数绝对收敛

$\lim \left| \frac{C_{n+1}(z-a)^{n+1}}{C_n(z-a)^n} \right| > 1$  时, 级数发散.

$$\text{故 } R = \lim \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

根式 (Cauchy)

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |C_n(z-a)^n|^{\frac{1}{n}} < 1$  时, 级数绝对收敛

$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |C_n(z-a)^n|^{\frac{1}{n}} > 1$  时, 级数发散.

$$R = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{C_n} \right|^{\frac{1}{n}} \quad (\text{or. } \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|C_n|^{\frac{1}{n}}} \right)^{-1})$$

收敛圆内  $\sum C_n(z-a)^n$  一致收敛的解析函数.

可以逐项求导、积分, 收敛半径不变

但收敛圆上的点性质可能改变

例: 几何级数  $1 + z + z^2 + \dots + z^n$ , ( $C_n = 1$ )

引入令  $S_n = 1 + z + \dots + z^n$

$$\text{则 } zS_n = z + \dots + z^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

$$\text{收敛半径 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$(\text{or } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1)$$

圆上处处发散 ( $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \rightarrow 1$ )

再考虑

$$1 + \frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n} \quad (\text{几何级数的积分})$$

此处  $|z|=1$  上收敛 (除  $z=1$ ), 但在  $z=1$  发散.

再积分:

$$z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n(n+1)} \quad \text{在 } |z|=1 \text{ 处处收敛.}$$

---



## 第6章. 解析函数的级数展开

幂级数  $\sum C_n z^n$

§1. 解析函数的 Taylor 展开.

放宽:  $C$  内

Taylor 定理:  $f(z)$  在以  $a$  为圆心的圆  $C$  内和  $C$  上解析, 则

对于圆内任何  $z$  点,  $f(z)$  可以展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n a_n.$$

其中

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

( $C$  取逆时针)

证:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi.$$

由于  $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, |t| < 1$

则

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi-z} &= \frac{1}{(\xi-a) - (z-a)} = \frac{1}{\xi-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \\ &= \frac{1}{\xi-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} f(\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} f(\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \cdot (z-a)^n \end{aligned}$$

$C_n$ .

Mackurin

当  $a=0$  时, 称麦克劳林级数

收敛半径：离  $a$  最近的奇点，到  $a$  的距离。

唯一性：

给定一个圆内的解析函数，其 Taylor 级数是唯一的

$$\begin{aligned} \text{证：设 } f(z) &= a_0 + a_1(z-a) + \dots \\ &= a'_0 + a'_1(z-a) + \dots \end{aligned}$$

取极限  $z \rightarrow a$ .

$$\text{则 } a_0 = a'_0$$

求导，再取极限， $a_1 = a'_1, \dots$

————— 系数可用任意方式表示

(只有同一点展开有唯一性)，不同点的 Taylor 展开不同 ————— 解析延拓

## §2 Taylor 级数举例

1.  $e^z$  全平面解析.  $(e^z)^{(n)} = e^z$

$$z=0 \text{ 时, } e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

收敛半径  $R \rightarrow \infty$ .

2. 三角  $\sin z, \cos z, (z=0)$

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} \end{aligned}$$

收敛半径  $R \rightarrow \infty$ .

3.  $\frac{1}{1-z}$  在  $z=0$  邻域

$$z=0, \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)} = n!$$

$$\therefore \frac{1}{1-z} = 1 + z + \dots + z^n, \text{ 收敛半径 } R=1.$$

$\Rightarrow$  利用:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1 \quad (\text{同理, } -z \sim z^2).$$

同理

$$\frac{1}{1-3z+z^2} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1.$$

待定系数法.

$\tan z$ , 在  $z=0$ .

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{奇函数.}$$

$$\text{故, } \tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$\sin z = \cos z \cdot \sum a_{2k+1} z^{2k+1}$$

$$\text{即. } \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum (-1)^l \frac{z^{2l}}{(2l)!} \cdot \sum a_{2k+1} z^{2k+1}.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{[2(n-k)]!} a_{2k+1} \right) z^{2n+1}$$

比较,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!} a_{2k+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$n=0, \quad a_1=1$$

$$n=1, \quad \frac{1}{2}a_1 - a_3 = \frac{1}{6} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$n=2, \quad \frac{1}{24}a_1 - \frac{1}{2}a_3 + a_5 = \frac{1}{120} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{15}$$

$\Rightarrow$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad \text{收敛半径 } R = \frac{\pi}{2}.$$

多值函数的 Taylor、规定单值分支，用和单值一样的方式

例. 求  $(1+z)^\alpha$  在  $z=0$  的 Taylor, 规定  $z=0$  时  $(1+z)^\alpha = 1$ .

$$\text{解: } [(1+z)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

$$\text{故 } (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

$$\text{且 } \binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{二项式展开系数}$$

收敛半径  $R=1$  ( $z=0$  到割线的距离).

例.  $\ln(1+z)$ ,  $z=0$ , 规定  $\ln(1+z)|_{z=0} = 0$ .

单值分支下,

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+z} dz$$

$$= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} \quad \left( = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \right)$$

收敛半径  $R=1$

无穷远点的 Taylor.  $f(z)$  在  $z=\infty$  解析.

变换  $z = \frac{1}{t}$ . 将  $f(\frac{1}{t})$  在  $t=0$  展开

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots, |t| < r.$$

$$\text{即 } f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots, |z| > \frac{1}{r}.$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 a_n z^n. \quad (\text{负幂次项})$$

§3. 不同点的 Taylor 展开 解析延拓

$$f_1(z) = 1 + z + \cdots + z^n \quad (a=0 \text{ 为圆心的单位圆 } K_1)$$

$|z| > 1$  时, 级数发散.

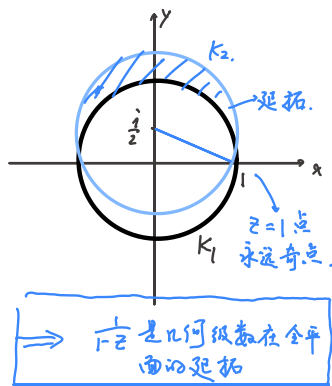
$$\text{取 } a = \frac{i}{2}. \quad f_1\left(\frac{i}{2}\right) = \cdots = \frac{1}{1 - \frac{i}{2}}$$

$$f_1'\left(\frac{i}{2}\right) = \cdots = \frac{1}{(1 - \frac{i}{2})^2}$$

$$\cdots \quad f_1^{(n)}\left(\frac{i}{2}\right) = \cdots = \frac{n!}{(1 - \frac{i}{2})^{n+1}}$$

$\Rightarrow$  在  $\frac{i}{2}$  展开.

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - \frac{i}{2})^{n+1}} (z - \frac{i}{2})^n \quad \text{收敛半径 } R = \left|1 - \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} (>1)$$



#### §4. 洛朗展开

奇点附近.

#### Laurant 定理

设  $f(z)$  在以  $b$  为圆心的环形区域  $R_1 \leq |z-b| \leq R_2$

单值解析, 对环内任一点  $z$ , 可以展开为

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n, \quad R_1 \leq |z-b| \leq R_2$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(z-b)^{n+1}} d\xi, \quad C \text{ 为环内逆时针回路.}$$

证: 由复连通区域的 Cauchy 积分公式,



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \right]$$

$C_2$  上,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (z-b)^n a_n, \quad |z-b| < R_2$$

$$\text{且 } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi$$

$C_1$  上, 利用

$$-\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(z-b) - (\xi-b)} = \frac{1}{z-b} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\xi-b}{z-b} \right)^k$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)^k \cdot \frac{f(\xi)}{z-b} d\xi \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (z-b)^{-k-1} \cdot \oint_{C_1} f(\xi) (\xi-b)^k d\xi \cdot \frac{1}{2\pi i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{令 } -k &= n+1, \quad \text{则} \\
 &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (z-b)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi \\
 &= \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-b)^n.
 \end{aligned}$$

$$\text{且 } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi$$

$$C_1, C_2 \rightarrow C.$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n, \quad R_1 \leq |z-b| \leq R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi.$$

讨论:

- 1) 条件可放宽为  $f(z)$  在  $R_1 \leq |z-b| \leq R_2$  内单值解析
- 2)  $f(z)$  在  $C_1$  以内可以不解析,  $b$  点可以是奇点, 也可以是解析点.

$$3) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \quad \begin{array}{l} 4) \text{ } b \text{ 是 } C_1 \text{ 内唯一奇点, 则 } C_1 \text{ 可以} \\ \text{无限缩小, } f(z) \text{ 在孤立奇点的 Laurent 展开} \end{array}$$

定义.

洛朗展开分为两个部分

1) 解析部分 (分析/正则部分)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$  (正幂次).

在  $G$  以内绝对收敛.

2) 主要部分 (主部)  $\sum_{n=1}^{-\infty} a_n (z-b)^n$  (负幂次)

在  $G$  以外绝对收敛.

唯一性:

假设有两个 Laurant 展开  $\sum a_n (z-b)^n$  和  $\sum a'_n (z-b)^n$

同乘  $(z-b)^{-k-1}$ , 沿环域中绕内圆一周的  $C$  作积分.

$$\oint (z-b)^{n-k-1} dz = 2\pi i \delta_{nk} \Rightarrow a_k = a'_k$$

### §5 Laurant 展开举例

1).  $\frac{1}{z(z-1)}$  在  $0 < |z| < 1$  和  $1 < |z| < \infty$  中的 Laurant

$z=0, 1$  为奇点.

①.  $0 < |z| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} & 0 < |z| < 1 \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n & 0 < |z| < 1 \end{aligned}$$

主部为  $-\frac{1}{z}$

②.  $1 < |z| < \infty$  内圆内两个奇点.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} z^n \quad 1 < |z| < \infty$$

主部为  $\sum_{n=2}^{\infty} z^n$ .



例.  $\frac{1}{z^2-1}$  在  $0 < |z| < \infty$ .

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

中心点  $z=0$  不为奇点, 但  $z=\pm 1$  为奇点.

待定系数法

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad \text{奇函数.}$$

$$\cot z = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} z^{2n-1}$$

$$\cos z = \cot z \cdot \sin z$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l-1} z^{2(k+l)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l}}{(2n-2l+1)!} b_{2l-1} \right) z^{2n} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l}}{(2n-2l+1)!} b_{2l-1} = \frac{1}{(2n)!}$$

$$n=0, \quad b_{-1} = 1 \quad ; \quad n=1, \quad \frac{1}{3!} b_{-1} - \frac{1}{1!} b_1 = \frac{1}{2!}, \quad b_1 = -\frac{1}{3}.$$

$$n=2, \dots, \quad b_3 = -\frac{1}{45}; \quad n=3, \quad b_5 = -\frac{2}{945} \dots$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \frac{2}{945} z^5 + \dots$$

{ 收敛半径  $0 < |z| < \pi$ . }

求  $e^{\frac{z}{2}(t+\frac{1}{t})}$  在  $0 < |z| < \infty$  的洛朗展开

$$\begin{aligned} \textcircled{+} \quad e^{\frac{zt}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k \frac{t^k}{k!} \\ e^{\frac{z}{2t}} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^l \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{1}{t}\right)^l \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^{\infty}} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k! l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+l} t^{k-l}.$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l! (l+n)!} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} t^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! (l+n)!} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} t^n. \end{aligned}$$

(对  $t$  展开)

$$\Rightarrow = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_n(z) t^n$$

其中  $J_n(z) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}, & n \geq 0 \\ \sum_{l=-n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}, & n < 0 \end{cases}$  —  $n$  阶 Bessel 函数 (柱函数)

$\Rightarrow e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$  : Bessel 函数的生成函数

无穷远点的 Laurent 展开  $z = \frac{1}{t}$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ 在 } t=0 \text{ 的展开}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n \quad (0 < |t| < r) \quad \xrightarrow{t=0} \begin{array}{l} \text{正幂项: 解析部分} \\ \text{负幂项: 主要部分} \end{array}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \left( \frac{1}{r} < |z| < \infty \right)$$

$z = \infty$    
 $z$  的高幂次: 解析部分   
 $z$  的低幂次: 主要部分

### §6. 单值函数的孤立奇点

孤立奇点: 设  $f(z)$  为单值函数或单值分支,  $z_0$  为  $f(z)$  的奇点.

若  $z$  的邻域内  $f(z)$  处处可导, 则称  $z$  为  $f(z)$  的孤立奇点.

eg.  $\frac{\sin z}{z}$ ,  $z=0$  为奇点, 且为孤立奇点.

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}, z=0 \text{ 为奇点, 但不是孤立奇点}$$

如果  $z=b$  为孤立奇点, 存在一个环域  $0<|z-b|<R$ .

(iii)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$  为 Laurent 展开

- ① 展开式不含负幂项,  $b$  点称为可去奇点
- ② 展开式只含有限负幂项,  $b$  点称为  $f(z)$  的极点
- ③ 展开式含有无穷多负幂项,  $b$  点称为  $f(z)$  的本性奇点.

0. 可去奇点.

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \quad z=0 \text{ 为可去奇点.}$$

$$\lim_{z \rightarrow b} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n = a_0. \quad \text{有限值.}$$

$$\text{引入定义 } f(z) = \begin{cases} f(z) & , z \neq b \\ \lim_{z \rightarrow b} f(z) & , z = b \end{cases} \quad \text{在 } b \text{ 点解析.}$$

("可去")

{ 则  $f(z)$  可 Taylor 展开 }

如  $z=b$  为  $f(z)$  孤立奇点, 且邻域内有界, 则  $z=b$  为可去奇点.

证: 将  $f(z)$  在  $z=b$  的邻域内  $|z-b| \leq \rho$  做 Laurent 展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-b)^n, \quad 0 < |z-b| \leq \rho.$$

$$\text{圆 } C \quad |z-b| = \rho \quad \text{上 } |f(z)| < M \text{ (有界)}$$

$$\begin{aligned} \therefore |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint \frac{|f(z)|}{|z-b|^{n+1}} d\tau \\ &\leq \left| \frac{M}{\rho^n} \right|. \end{aligned}$$

令  $\rho \rightarrow 0$ , 在  $n < 0$  时  $a_n = 0$ .

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n.$$

可去奇点  $\longleftrightarrow$  有界性.

### ② 极点

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

$$= (z-b)^{-m} \phi(z)$$

$\phi(z)$  在  $z=b$  附近解析,  $a_m \neq 0$ . 则  $b$  称为  $m$  阶极点

若  $|z-b|$  足够小, 则  $|f(z)| \rightarrow \infty$ , 即  $\lim_{z \rightarrow b} f(z) = \infty$ . 函数值无界反过来.

若  $b$  为  $f(z)$  的孤立奇点, 且  $\lim_{z \rightarrow b} f(z) = \infty$ , 则  $b$  为  $f(z)$  的极点

证:  $\because \lim_{z \rightarrow b} f(z) = \infty$ , 故当  $|z-b| < \delta$  时,

$$|f(z)| > M, \quad \text{即} \quad \frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{M} = \varepsilon, \quad \lim_{z \rightarrow b} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

令  $\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m g(z)$  在  $z=b$  邻域内解析,

$$\text{且} \quad \lim_{z \rightarrow b} g(z) \neq 0$$

$$\text{则} \quad f(z) = (z-b)^{-m} \frac{1}{g(z)} = (z-b)^{-m} \phi(z)$$

( $\frac{1}{f(z)}$  为  $m$  阶零点).

例  $\frac{1}{\sin z} \quad z = n\pi$  为 1 阶极点

### ③ 本性奇点

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

当  $z \rightarrow b$  时  $f(z)$  极限不存在 (可以趋于任意复数)

例  $z=0$  为  $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$  的本性奇点.

$$z \rightarrow 0 \quad \text{正实轴: } |e^{\frac{1}{z}}| \rightarrow \infty$$

$$\quad \quad \quad \text{负实轴: } |e^{\frac{1}{z}}| \rightarrow 0.$$

$$\quad \quad \quad \text{虚轴: } |e^{\frac{1}{z}}| \text{ 无定值.}$$

总可以找到一个序列,  $\{z_n\} \rightarrow b$ ,  
使得  $f(z_n) \rightarrow A$

证:

引入  $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$  , 只要证存在  $\{z_n\} \rightarrow b$  , 使  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty$

反证法: 假设不存在这样的序列, 则  $g(z)$  有界.

$z = b$  为  $g(z)$  的可去奇点.

$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow b} g(z) = G$  ,  $G$  为有限值

如果  $G \neq 0$  .  $\lim_{z \rightarrow b} f(z) = A + \frac{1}{G}$  ,  $b$  为  $f(z)$  的可去奇点.

$G = 0$   $\lim_{z \rightarrow b} f(z) \rightarrow \infty$  .  $b$  为  $f(z)$  的极点 矛盾.

$\therefore$  必存在  $\{z_n\} \rightarrow b$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$  .

无穷远点:  $t = \frac{1}{z}$

若  $t = 0$  为可去奇点, 则  $z = \infty$  为可去奇点.

若  $t = 0$  为极点, 则  $z = \infty$  为极点.

若  $t = 0$  为本性奇点, 则  $z = \infty$  为本性奇点.

## 第七章. 留数定理及应用

### §7.1 零点, 极点和留数

零点: 解析函数.  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$

$$\text{其中 } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

若  $z=a$  处,  $a_0 = 0 = f(z)$

则  $a$  点称为  $f(z)$  的零点.

$$\text{若 } a_0 = \dots = a_{m-1} = 0, a_m \neq 0, \text{ 即 } f(z) = a_m (z-a)^m + \dots \\ = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$\text{即 } f(z) = (z-a)^m g(z) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z-a)^n, g(a) \neq 0.$$

则称  $z=a$  为  $f(z)$  的  $m$  阶零点,

$m=1$  称为单零点.

$$\text{即 } f(a) = 0 \text{ 且 } f'(a) \neq 0$$

极点:  $f(z)$  除去其孤立奇点  $z=b$  的去心区域内可展为洛朗级数.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}} d\xi.$$

主要部分只有有限的  $m$  项  $\sum_{n=-m}^{-1} a_n (z-b)^n, (a_{-m} \neq 0).$

$$\text{得到 } f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^n = (z-b)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-b)^n \\ = (z-b)^{-m} g(z), \quad g(z) \text{ 解析且 } g(b) \neq 0.$$

则  $z=b$  称为  $m$  阶极点,

$m=1$  时称为单极点.

$$f(z) \text{ } m \text{ 阶零点} \iff \frac{1}{f(z)} \text{ } m \text{ 阶极点}$$

留数：当  $n=-1$  时，由洛朗展开公式，有：

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

$C$  为环绕孤立奇点  $z=b$  逆时针闭合同道。

$$\text{则 } \oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

称  $a_{-1}$  为  $f(z)$  在  $b$  点的留数 (Residue)

$$\text{记为 } \operatorname{Res} f(b) = a_{-1}.$$

无穷远处的留数。

去心区域  $R < |z-b| < \infty$

有洛朗展开：
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n.$$

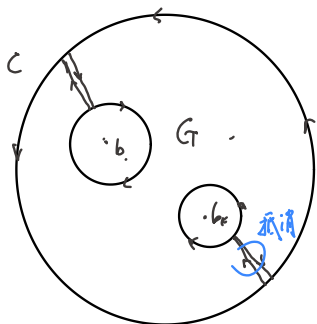
$$\oint_C z^n dz = -2\pi i \delta_{-1,n} \quad ("-" \text{, 回路方向相反}).$$

故， $-a_{-1}$  为  $f(z)$  在  $z=\infty$  的留数。  $\operatorname{Res} f(\infty) = -a_{-1}$

§2. 留数定理。

假设区域  $G$  的边界  $C$  为分段光滑的简单闭曲线，除了有限的孤立奇点  $b_k (k=1, 2, \dots, n)$  外， $f(z)$  在  $G$  中单值解析，在  $G$  中连续，在  $C$  上没有奇点，则 
$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k)$$

证：



故，

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \sum \oint_{C_k} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k) \end{aligned}$$

$G$  排除孤立奇点  $\Rightarrow$  多连通 (构造圆道)

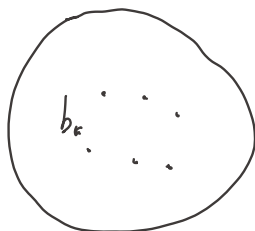
全平面留数定理: 考虑  $z = \infty$ .

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0.$$

注意:  $f(z) = \sum_{n=2-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n.$

$\infty$  处的解析部分

注意:  $\infty$  是解析点也可以有留数.



### §3. 留数的计算.

要求  $\operatorname{Res} f(b)$ ,  $\Rightarrow$  洛朗展开, 并给出  $z^{-1}$  系数.

当  $b$  为极点, 有快捷计算:

单极点 ( $m=1$ ). 设  $b$  为  $f(z)$  单极点

$$f(z) = a_{-1} (z-b)^{-1} + a_0 + \dots$$

$$(z-b) f(z) = \underbrace{a_{-1}}_{\operatorname{Res} f(b)} + a_0 (z-b)^1 + a_1 (z-b)^2 + \dots$$

$$\therefore \operatorname{Res} f(b) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow b} (z-b) f(z).$$

若  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P, Q$  都在  $z=b$  及其邻域内解析, 且  $P(b) \neq 0$ .

$b$  为  $Q(z)$  的单零点.  $Q(b) = 0 \neq Q'(b)$

$$\text{则 } \boxed{\operatorname{Res} f(b) = \lim_{z \rightarrow b} (z-b) f(z) = \frac{P(b)}{Q'(b)}}$$

例  $\frac{1}{z^2+1}$ ,  $z = \pm i$  单极点,  $\operatorname{Res} f(\pm i) = \frac{1}{2z} \Big|_{\pm i} = \mp \frac{1}{2}$

例  $\frac{1}{\sin z}$ ,  $z=0$ .  $\operatorname{Res} f(0) = \frac{z}{\sin z} = 1$   
 $\left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{\cos z} = 1 \end{aligned} \right.$



$m$  阶极点

$b$  为  $f(z)$  的  $m$  阶极点, Laurent 展开:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n (z-b)^n + (a_0 + a_1(z-b) + \dots)$$

$$(z-b)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \dots + a_{-1}(z-b)^{m-1} + \dots$$

Rat

则,  $\text{Res}(b) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-b)^m f(z) \Big|_{z=b}$

例  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$  在  $z = \pm i$  留数.

$\pm i \rightarrow$  三阶极点.

$$\text{Res} f(\pm i) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z \mp i)^3 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^3} \right] \Big|_{z=\pm i}$$
$$= \mp \frac{3}{16} i$$

本性奇点没有好的求留数方法.

无穷远点的留数计算

$$\text{Res} f(\infty) = \begin{cases} -a_{-1}[f(z)] & , f(z) \text{ 在 } z=\infty, z^{-1} \text{ 系数} \\ -a_1[f(\frac{1}{z})] & f(\frac{1}{z}) \text{ 在 } t=0, t^1 \text{ 系数} \end{cases}$$

例: 设  $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$  ( $z=\infty$ )

求  $f^2(z)$  在  $z=\infty$  的留数  $\text{Res} f^2(z)$

解:  $\text{Res} f^2(z) = -2 \text{Res} f$

积分计算.  $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 \sin^2 z}{(1-e^z)^5} dz$

$|z|=1$  内,  $z=0$  为极点

$$\frac{z^2 \sin^2 z}{(1-e^z)^5} = \frac{z^2 (z - \frac{z^3}{3!} + \dots)^2}{(-1)^5 (z + \frac{z^2}{2!} + \dots)^5} = -\frac{1}{z} \frac{(\dots)^2}{(\dots)^5} = -\frac{1}{z} (1 + \dots)$$

$$\therefore \operatorname{Res} f(0) = -1$$

$$\therefore \oint_{|z|=1} \frac{z^2 \sin^2 z}{(1-e^z)^5} dz = -2\pi i$$

部分分式

例  $\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$  展成  $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$

证:  $A, B, C$  为  $z=1, 2, 3$  处的留数.

$$\begin{cases} A = \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \\ B = \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=2} = -1 \\ C = \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

例  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}$  展成部分分式.

$$f(z) = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} + \frac{D}{z-3}$$

$$(z-1)f(z) = \frac{A}{z-1} + B + \frac{C(z-1)}{z-2} + \frac{D(z-1)}{z-3}$$

$$A = \operatorname{Res}[(z-1)f(z)]_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=2} = -1$$

$$B = \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

$$D = \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=3} = \frac{1}{4}$$

### 3.4. 有理三角函数的积分

计算定积分 有理函数

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta.$$

$$\text{引入 } z = e^{i\theta}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) \cdot \frac{1}{iz} dz$$

$$= 2\pi \sum_{|z|=1} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{z} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) dz \right\}$$

/ 要求  $|z|=1$  上无奇点!

例. 计算  $(\varepsilon < 1)$ ,  $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{z^2+1}{z}} \cdot \frac{1}{iz} dz.$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \frac{dz}{i} = 2\pi \sum_{|z|=1} \operatorname{Res} \left( \frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \right).$$

两个单极点

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \quad \text{负根 } |z| > 1.$$

单位圆内只有一个单极点  $z = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$ ,

$$\operatorname{Res} \left\{ \frac{2}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

故,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

§5. 无穷积分  $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  积分主值.

无穷远点的积分主值.

$$\text{无穷积分 } I = \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx$$

极限可能不存在.

注意到, (以  $x$  为例)

$$\lim_{\substack{R_2 \rightarrow \infty \\ R_1 \rightarrow \infty}} \int_{-R_1}^{R_2} x dx \text{ 不存在}$$

$$\text{但 } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx \text{ 存在}$$

$\Rightarrow$  称为积分主值 p.v.  
(或 v.p.).

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

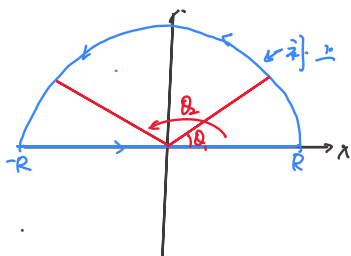
无穷远点的圆弧积分 (大圆弧引理).

设  $f(z)$  在  $\infty$  点的邻域内连续.

当  $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ ,  $z \rightarrow \infty$  时  $f(z)$  一致趋于  $K$ .

$$\text{则 } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1).$$

$C_R$  为大圆弧  $\begin{cases} \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2 \\ |z| = R. \end{cases}$



设  $f(z)$  满足:

①  $f(z)$  在上半平面除了有限个孤立奇点外处处解析, 在实轴上无奇点.

②  $0 \leq \arg z \leq \pi$  内, 当  $|z| \rightarrow \infty$  时,  $zf(z)$  一致趋于 0.

$$\text{则 } \oint f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx$$

故.

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res} f(z).$$

说明: ② 保证了  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x f(x) = 0$ , 实积分收敛.

$$\text{也保证了 } \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

引  $\lambda R \rightarrow \infty$ .

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{上半面}} \text{Res} f(z).$$

例 
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

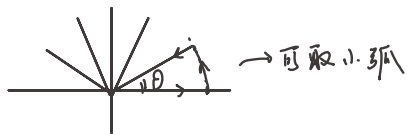
$$= 2\pi i \text{Res} f(z) \Big|_{z=i} = \frac{3}{8} \pi.$$

变形:

$$\text{若 } f(x) \text{ 为偶函数, 则 } \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

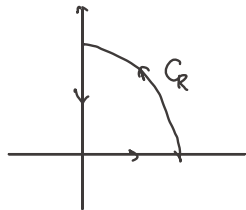
$$= \pi i \sum_{\text{上半}} \text{Res} f(z).$$

推广: 若  $f(z) = f(ze^{i\theta})$ .



例 计算定积分  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

$$x^4: \theta = \frac{\pi}{2} \quad f(z) = f(ze^{i\frac{\pi}{2}})$$



$$\oint_C \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} + \int_R^0 \frac{id y}{1+y^4}$$

$$= (1-i) \int_0^R \frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} \quad \parallel_{R \rightarrow \infty} 0$$

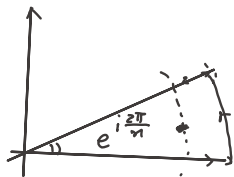
$$2\pi i \operatorname{Res} \frac{1}{1+z^4} \Big|_{z=i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{2} \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore R \rightarrow \infty \text{ 时 } \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

例  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \geq 2.$

<上问推广>  $f(z) = f(ze^{i\frac{2\pi}{n}})$

孤立奇点  $ze^{i\frac{\pi}{n}}$



$$\oint_C \frac{dx}{1+z^n} = \int_0^R \frac{dx}{1+z^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_R^0 \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}} dx}{1+x^n}$$

$$= (1 + e^{i\frac{2\pi}{n}}) \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$2\pi i \operatorname{Res} \frac{1}{1+z^n} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

$$\parallel \frac{2\pi i}{n} e^{-i\frac{n-1}{n}\pi} \approx \frac{2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} dx = -\frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

# §6. 含三角函数的无穷积分

$$I = \int_0^{\infty} f(x) \cos px \, dx \quad \text{or} \quad I = \int_0^{\infty} f(x) \sin px \, dx. \quad (p > 0).$$

$\cos pz, \sin pz$ :  $z \rightarrow \infty$  为本性奇点, \quad \backslash \text{Fourier 变换} \backslash

讨论  $\int_{C_R}$  时大圆弧引理失效

考虑  $f(z)e^{ipz}$ , 在上半平面只有有限的奇点.

$$\oint_C f(z)e^{ipz} dz = \int_{-R}^R f(x)e^{ipx} dx + \int_{C_R} f(z)e^{ipz} dz \quad \Rightarrow \text{成立条件?}$$

$\downarrow R \rightarrow \infty$

$$2\pi i \sum_{\text{上半}} \text{Res}(f(z)e^{ipz}) = \int_{-R}^R f(x)(\cos px + i \sin px) dx + 0.$$

比较实虚部  $\Rightarrow \cos x$  和  $\sin x$  积分.

Jordan 引理.

设在  $0 \leq \arg z \leq \pi$  内, 当  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $Q(z)$  一致趋于零, 则

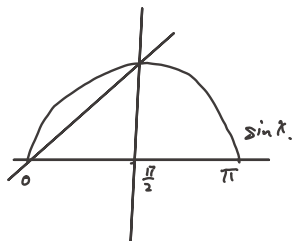
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z)e^{ipz} dz = 0 \quad (p > 0). \quad C_R \text{ 为以原点为圆心, } R \text{ 的上半圆.}$$

证明: 当  $z$  在  $C_R$  上时,  $z = Re^{i\theta}$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z)e^{ipz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi R e^{i\theta} e^{ipR(\cos\theta + i\sin\theta)} R e^{i\theta} i d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi |Q e^{i\theta}| R e^{-pR\sin\theta} R d\theta \\ &< \varepsilon R \int_0^\pi e^{-pR\sin\theta} d\theta = \varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-pR\sin\theta} d\theta. \end{aligned}$$

则, 当  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  时,

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad (2)$$



$$\left| \int_{C_R} Q e^{ipz} dz \right| < 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-pR \frac{2\theta}{\pi}} d\theta.$$

$$= 2\epsilon R \cdot \frac{\pi}{2pR} (1 - e^{-pR}) = \frac{\epsilon \pi}{p} (1 - e^{-pR}).$$

$$\therefore \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0 \quad \text{--- Jordan 引理}$$

在满足约当引理的条件下,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ipx} dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \text{upper}}} \text{Res} \{ f(z) e^{ipz} \}$

故,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx = \text{Re} \left( 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \text{upper}}} \text{Res} f(z) e^{ipz} \right).$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx = \text{Im} \left( 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \text{upper}}} \text{Res} f(z) e^{ipz} \right).$$

!!

例: 计算  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$ ,  $a > 0$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \cdot x}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{iz} \Big|_{z=ia} = i\pi e^{-a}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-a}$$

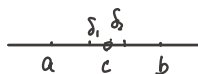
如果  $f(x)$  为偶,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos px dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos px dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ipx} dx$

如果  $f(x)$  为奇,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin px dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin px dx = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ipx} dx$ .



37 积分路径上有奇点的情形:

$$\text{瑕积分 } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) dx.$$

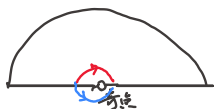


主值 v.p.  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$

单极点的圆弧积分引理

如果  $f(z)$  在  $z=a$  点邻域内连续,  $\theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$  时, 若  $|z-a| \rightarrow 0$  时,  $(z-a)f(z)$  一致趋于  $k$ , 则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1) \quad C_\delta \text{ 为以 } a \text{ 为圆心, } \delta \text{ 为半径, 夹角为 } \theta_2 - \theta_1 \text{ 的圆弧}$$



把奇点放在圆道内.

$$\oint_C f(z) dz + \pi i a_{-1} = 2\pi i a_{-1}$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \pi i a_{-1}.$$

把奇点放在圆道外

(“圆道上的单极点算半个”)

$$\oint_C f(z) dz - \pi i a_{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \pi i a_{-1}$$

例  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx.$

$z \rightarrow 0, \frac{1}{z} \rightarrow 0$  Jordan

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} \rightarrow 0.$$

$$= \frac{1}{2i} \pi i \operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{z} \Big|_{z=0} = \frac{\pi}{2}.$$

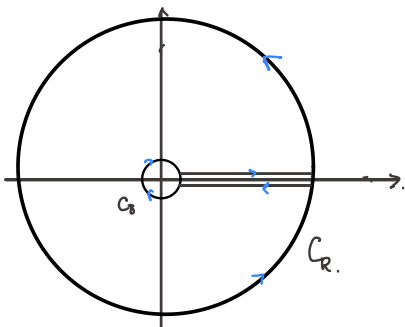
即  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

### 3.3. 多值函数的积分

$$I = \int_0^{\infty} x^{s-1} Q(x) dx \quad \text{Mellin 变换} \quad s \text{ 不是整数.}$$

$Q(z)$  为单值函数，正实轴无奇点。

$z \rightarrow 0$  和  $z \rightarrow \infty$  时， $|z^s Q(z)|$  一致趋于 0



$$\begin{aligned} \oint_C z^{s-1} Q(z) dz &= \int_{\delta}^R x^{s-1} Q(x) dx \\ &+ \int_{C_R} z^{s-1} Q(z) dz \\ &+ \int_R^{\delta} (x e^{i2\pi})^{s-1} Q(x) \cdot e^{i2\pi} dx \\ &+ \int_{C_\delta} z^{s-1} Q(z) dz. \end{aligned}$$

整理:

$$\oint_C z^{s-1} Q(z) dz = (1 - e^{i2\pi s}) \int_{\delta}^R x^{s-1} Q(x) dx + \underbrace{\int_{C_R} z^{s-1} Q(z) dz + \int_{C_\delta} z^{s-1} Q(z) dz}_{\rightarrow 0}.$$

$C_R$  上 令  $z = R e^{i\theta}$ ,  $R$  足够大,  $|z^s Q(z)| < \epsilon$ ,

$$\left| \int_{C_R} z^{s-1} Q(z) dz \right| \leq \left| \int_0^{2\pi} R^{s-1} |Q(R e^{i\theta})| R d\theta \right| < 2\pi \epsilon \rightarrow 0$$

$C_\delta$  上 令  $z = \delta e^{i\theta}$ . 同理,  $\rightarrow 0$ .

因此, 令  $R \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} Q(x) dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\delta}^R x^{s-1} Q(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi s}} \sum_{\substack{\text{在 } C \text{ 内} \\ \text{极点}}} \text{Res} \{ z^{s-1} Q(z) \}$$

例. Euler 积分  $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad 0 < \alpha < 1.$

取  $z = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$  单极点  $z = -1$ .

$$\operatorname{Res} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \Big|_{z=e^{i\pi}} = (-1)^{\alpha-1} = e^{i(\alpha-1)\pi} = -e^{i\alpha\pi}.$$

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \cdot (-e^{i\alpha\pi}) = -\frac{2\pi i e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

例. 计算  $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx \quad (0 < \alpha < 1)$  极点  $z = 1$

$$\begin{cases} \operatorname{Res} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} \Big|_1 = -1 \\ \operatorname{Res} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} \Big|_{\infty} = -e^{i2\pi\alpha}. \end{cases}$$

$$\therefore I = \frac{\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum \operatorname{Res} \left\{ \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} \right\} = -\frac{\pi i (1 + e^{i2\pi\alpha})}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \pi \cot \alpha\pi$$

含对数的积分  $\int_0^{\infty} Q(x) \ln x dx$ .

$Q(z)$  为单值函数, 在实轴上无奇点,

在  $z \rightarrow 0$  and  $z \rightarrow \infty$  处,  $z(\ln z)^2 Q(z)$  一致趋于 0.

$$\oint_c Q(z) \ln z dz = \int_0^R Q(x) \ln x dx + \int_{C_R} Q(z) \ln z dz + \int_R^0 Q(x) (\ln x + 2\pi i) dx + \int_0^R Q(z) \ln z dz$$

故,

$$\oint_C Q(z) \ln z \, dz = -2\pi i \int_0^R Q(x) \, dx + \left( \int_{C_R} + \int_{C_S} \right) \quad \underline{\underline{0?}}$$

$$\begin{aligned} \oint_C Q(z) (\ln z)^2 \, dz &= \int_0^R Q(x) (\ln x)^2 \, dx + \dots \\ &= -4\pi i \int_0^R Q(x) \ln x \, dx + 4\pi^2 \int_0^R Q(x) \, dx + \underbrace{\int_{C_R} + \int_{C_S}}_0 \end{aligned}$$

得到

$$\int_0^\infty Q(x) \ln x \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{\text{全平面}} \text{Res} \{ Q(z) (\ln z)^2 \} - \pi i \int_0^\infty Q(x) \, dx$$

§9. 留数定理在物理中的应用.

菲涅尔 Fresnel.  $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$   $\int_0^\infty \cos x^2 \, dx$

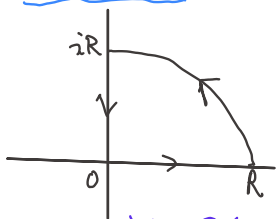
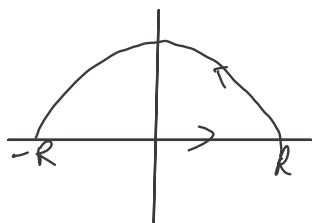
$\oint_C e^{iz^2} \, dz$  先检查  $\int_{C_R} e^{iz^2} \, dz$ .

$$\int_{C_R} e^{iz^2} \, dz = \int_0^\pi e^{iR^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} R e^{i\theta} i d\theta.$$

$$= \int_0^\pi e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} \cdot R e^{i\theta} i d\theta. \quad \underline{\underline{\rightarrow \text{不合}}}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} R e^{i\theta} i d\theta = 0.$$

$$\underbrace{\int_0^R e^{-ix^2} \, dx} + \underbrace{\int_{C_R} e^{iz^2} \, dz} + \underbrace{\int_0^R i e^{-iy^2} \, dy}_{=0 \text{ (无奇点)}} = \oint_C e^{iz^2} \, dz$$



积分围道的选取.

得:

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx.$$

仍求不出具体值.

⇒ 继续 cut.  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$   $\int_{\Gamma} = 0$  仍成立. / 不断试探.

$$\int_0^R e^{-ir^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^R e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-r^2} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-r^2} dr$$

取,

$$\int_0^{\infty} e^{i\pi^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\text{由此, } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

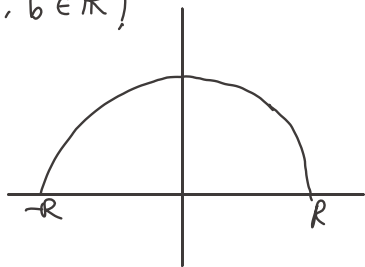
泊松积分 Poisson.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx. \quad (a > 0, b \in \mathbb{R})$$

$$e^{-ax^2} \longrightarrow e^{-az^2}$$

在  $z = iy$  处,  $e^{-az^2} \rightarrow \infty$ .

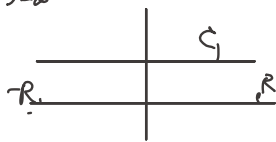
不适用大圆引理.



$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} dx.$$

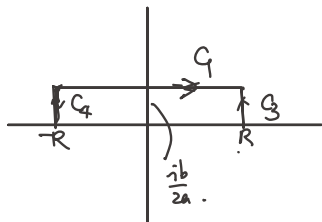
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ibx} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x + \frac{ib}{2a})^2} dx.$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{\Gamma} e^{-az^2} dz$$



⇒ 构造回路如下,

$$\oint_C e^{-az^2} dz = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \left( \int_{C_3} - \int_{C_1} + \int_{C_4} \right) e^{-az^2} dz.$$



$$C_3: z = R \rightarrow z = R + \frac{ib}{2a}$$

$$C_4: z = -R + \frac{ib}{2a} \rightarrow z = -R.$$

$$\left| \int_{C_3} e^{-az^2} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{b}{2a}} e^{-a(R+iy)^2} i dy \right|$$

$$\leq e^{-aR^2} \int_0^{\frac{b}{2a}} e^{ay^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \text{ 同理 } \int_{C_4} = 0.$$

故  $R \rightarrow \infty$  时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx - \int_{C_1} e^{-az^2} dz = 0 \quad \text{无奇点.}$$

得到:  $R \rightarrow \infty$ .

$$\int_{C_1} e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

$$= \sqrt{\pi/a}$$

∴

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

色散关系 (Hilbert 关系)

上半平面处处解析的函数  $f(z)$ ,  $z \rightarrow \infty$  时,  $f(z)$

一致趋于 0.  $a$  为一个实数.

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \pi i \operatorname{Res} \left. \frac{f(z)}{z-a} \right|_{z=a}$$
$$= \pi i f(a).$$

$$\operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-a} dx$$

$$\operatorname{Im} f(a) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x-a} dx$$

---

§10. 无穷级数求和.  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$

$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$   $f(z) = \frac{1}{z^2}$ : 除了有限个非整数的极点外,  
在全平面解析,  $z=0$  为极点

引入  $G(z)$ , 使  $z=0, \pm 1, \dots, \pm n$ , 为其仅有的  $1$ -阶极点,  
且留数均为 1

$$\text{取. } G(z) = \pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}.$$

$$\oint_{C_N} G(z) f(z) dz = 2\pi i \left\{ \sum_{n=-N}^N f(n) + \sum_{\substack{f(z) \\ \text{的极点}}} \operatorname{Res}(G(z)f(z)) \right\}$$

↓  
再考虑  $\oint_{C_N} = 0$  的条件.

定理：设  $f(z)$  除了有限个孤立奇点外处处解析，若存在常数  $M, R$ ，

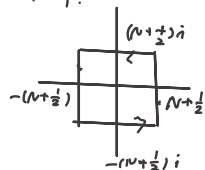
使得  $|z| > R$  时， $|zf(z)| \leq M$ 。则当  $N \rightarrow \infty$  时，

$$\oint_{C_N} \pi \cot \pi z f(z) dz = 0.$$

证明： $|zf(z)|$  有界， $f(z)$  在  $|z| > R$  外无奇点，在  $z = \infty$  处解析。

$$zf(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots, |z| > R.$$

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots, |z| = R.$$



$$\oint_{C_N} \frac{\pi \cot \pi z}{z} dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \frac{\pi \cot \pi z}{z} \right\}_{z=0} + 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res} \frac{\pi \cot \pi z}{z} \Big|_{z=\pm n}.$$

$\frac{\pi \cot \pi z}{z}$  为偶函数，故  $\operatorname{Res} \frac{\pi \cot \pi z}{z} = 0$ 。

$$\operatorname{Res} \frac{\pi \cot \pi z}{z} \Big|_{z=n} = \operatorname{Res} \left\{ \frac{\pi \cos \pi z}{z \sin \pi z} \right\}_{z=n} = \frac{1}{n} \text{ 正负抵消 } \Rightarrow \Sigma = 0.$$

$$\therefore \oint_{C_N} \pi \cot \pi z f(z) dz = \oint_{C_N} \pi \cot \pi z \left( f(z) - \frac{a_0}{z} \right) dz$$

$$f(z) - \frac{a_0}{z} = \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots, |z| > R \text{ 解析.}$$

$$|f(z) - \frac{a_0}{z}| \leq \frac{M'}{|z|^2}, |z| > R.$$

$$\begin{aligned} \text{则} \left| \oint_{C_N} \pi \cot \pi z \left( f(z) - \frac{a_0}{z} \right) dz \right| &\leq \left| \frac{\pi M' (N+\frac{1}{2})}{(N+\frac{1}{2})^2} \cdot \underbrace{(\cot \pi z \text{ 在 } C_N \text{ 上界})}_{\text{有限 } (\leq 2)} \right| = 0. \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \sim \frac{1}{N} \Rightarrow 0 \end{aligned}$$

故，
$$\sum_{-N}^N f(n) + \sum_{\text{else}} \operatorname{Res}(\pi \cot \pi z f(n)) = 0.$$



例. 计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \quad \text{极点 } z=0$$

$$\oint_C \frac{\pi \cot \pi z}{z^2} dz = 2\pi i \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res} \left\{ \frac{\pi \cot \pi z}{z^2} \right\}_{z=n}.$$

$z=0$  时.

$$\left. \frac{\pi \cot \pi z}{z^2} \right|_{z=0} = \pi \cot \pi z \Big|_{z=0, z^1 \text{ 项系数}} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

$z \neq 0$  时,  $n^2$ .

$$\text{故 } \oint_C \frac{\pi \cot \pi z}{z^2} dz = 2\pi i \left\{ -\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\} = 0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \#.$$

## 第八章 解析延拓. $\Gamma$ 函数

### §1. 解析函数的零点孤立性和唯一性

零点:  $f(z)$  在  $a$  点及其邻域内解析, 且  $f(a) = 0$ . 则称  $a$  为  $f(z)$  零点.

$f(z)$  在  $a$  点及其邻域解析, 当  $|z-a|$  充分小, 可以 Taylor 展开,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

若  $z=a$  为零点,  $a_0 = 0$ . 设  $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$ ,  $a_m \neq 0$ .

定理: 若  $f(z)$  不恒为 0, 且包含  $z=a$  在内的区域中解析, 则必能找到圆  $|z-a| = \rho$ , 其内只有  $z=a$  一个零点.

证: 设  $a$  为  $f(z)$  的  $m$  阶零点,  $f(z) = (z-a)^m \phi(z)$

$\phi(z)$  在  $|z-a| < R$  内解析,  $\phi(a) \neq 0$

$\because \phi(z)$  在  $z=a$  连续, 对任意给定  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \rho > 0$ , 使得  $|z-a| < \rho$  时, 恒有  $|\phi(z) - \phi(a)| < \varepsilon$ .

不妨取  $\varepsilon = \frac{|\phi(a)|}{2}$ . 则  $|\phi(a)| - |\phi(z)| < |\phi(z) - \phi(a)| < \frac{|\phi(a)|}{2}$

$$\therefore |\phi(z)| > \frac{|\phi(a)|}{2} > 0.$$

故  $f(z)$  在  $|z-a| < \rho$  内无其他零点

—— 零点孤立性

推论:  $f(z)$  在  $|z-a| < R$  内解析, 若在  $G$  内存在  $f(z)$  的无穷多个零点  $\{z_n\}$

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \rightarrow a$ ; 当  $z_n \neq a$  时, 则  $f(z)$  在  $G$  内恒为零.

证: 若取  $z \rightarrow a$  的特殊序列  $z_n$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0$ .

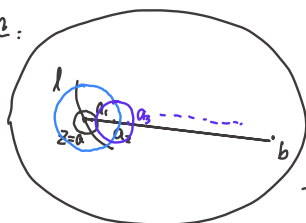
$\therefore f(a) = 0$ , 即  $z=a$  为  $f(z)$  非孤立零点,  $z=a$  邻域内总有无穷多零点, 故  $f(z) \equiv 0$

推论2.  $f(z)$  在  $G: |z-a| < R$  内解析, 若  $G$  内存在过  $a$  点的一段弧  $L$  或含有  $a$  点的子区域  $g$ , 在  $L$  上或  $g$  内  $f(z)$  恒等于 0.

则在  $G$  内  $f(z) = 0$ .

推论3. 设  $f(z)$  在  $G$  内解析, 若在  $G$  内存在一点  $z=a$  及过  $a$  点的一段  $l$  或含  $a$  点的子区域  $g$ , 若在  $l$  上或  $g$  内  $f(z)$  恒等于 0  
则  $G$  内,  $f(z) = 0$ .

证:



逐段作小圆, 从  $z=a$  出发

$$f(a_1) = 0, \dots \Rightarrow f(a_2) = 0, \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow f(b) = 0.$$

一般性区域  $G$  内, 零点孤立性定理仍成立

解析函数的唯一性.

设在区域  $G$  中有两个解析函数  $f_1(z)$  和  $f_2(z)$ , 且存在序列  $\{z_n\}$ , 使得  $f_1(z_n) = f_2(z_n)$ , 若  $\{z_n\}$  的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ,  $z_n \neq a$ ,  $a$  也在  $G$  内, 则  $G$  内恒有  $f_1(z) = f_2(z)$ .

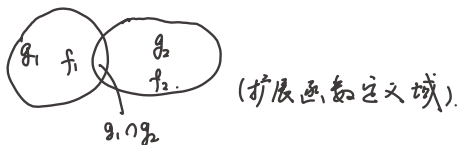
证: 引入  $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$ . 则由前述定理,  $g(z)$  恒等于 0.

推论4: 设  $f_1(z)$  和  $f_2(z)$  都在  $G$  内解析, 且在子区域  $g$  或一段弧  $l$  内  $f_1(z) = f_2(z)$   
则  $G$  内  $f_1(z) = f_2(z)$

推论5. 在实轴上成立的恒等式在复平面上仍成立, 只要等式两端的表达式在  $z$  平面上都解析.

## §2. 解析延拓

定义: 设  $f_1(z)$  在区域  $g_1$  内解析,  $f_2(z)$  在区域  $g_2$  内解析. 在  $g_1 \cap g_2$  内,  $f_1(z) \equiv f_2(z)$ , 则称  $f_2(z)$  为  $f_1(z)$  在  $g_2$  内的解析延拓.



例. 几何级数.

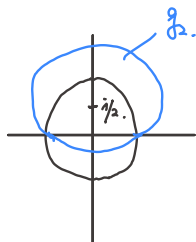
$$z=0, \quad f_1(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n. \quad |z| < 1. \rightarrow g_1$$

$$\text{而, } f_1\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}, \dots, f_1^{(n)}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{n!}{(1-\frac{z}{2})^{n+1}}$$

则可得  $f_2$ :

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\frac{z}{2})^{n+1}} \left(z - \frac{z}{2}\right)^n, \quad \left|z - \frac{z}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}. \rightarrow g_2$$

$\dots \Rightarrow$  延拓到除奇点的全平面,  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ .



由解析函数的唯一性, 解析延拓也是唯一的.

① 若  $f_2^I(z)$  和  $f_2^{II}(z)$  都是  $f_1(z)$  在  $g_2$  中的解析延拓, 则在  $g_2$  中,  $f_2^I(z) = f_2^{II}(z)$ .

证: 在  $g_1 \cap g_2$  中,  $f_2^I(z), f_2^{II}(z)$  为  $f_1$  的解析延拓.

$$f_2^I(z) = f_1(z) = f_2^{II}(z) \quad \text{故, } g_2 \text{ 内 } f_2^I(z) \equiv f_2^{II}(z).$$

② 若  $f_2(z)$  和  $f_3(z)$  为  $f_1(z)$  在  $g_2, g_3$  中的延拓, 且  $g_2 \cap g_3 \neq \emptyset$ .

则在  $g_2 \cap g_3$  中  $f_2(z) \equiv f_3(z)$

证.



$G_{123} = g_1 \cup g_2 \cup g_3$  上, 构造

$$F_1(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in g_1 \\ f_2(z), & z \in g_2 \text{ 且 } z \notin g_3 \\ f_3(z), & z \in g_3 \text{ 且 } z \notin g_2 \\ f_2(z), & z \in g_{23} \end{cases}$$

则  $F_1 = F_2$ . 得证.

$$F_2(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in g_1 \\ f_2(z), & z \in g_2 \text{ 且 } z \notin g_3 \\ f_3(z), & z \in g_3 \text{ 且 } z \notin g_2 \\ f_3(z), & z \in g_{23} \end{cases}$$

补: 常微分方程.

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z) \frac{dw}{dz} + q(z) w = 0.$$

解  $w(z)$  为一定区域  $G$  内的解析函数.

但解出的表达式可能只在  $g \in G$  内成立, 需利用  
解析延拓  $g \Rightarrow G$

设  $w_1$  为方程的解, 在  $G_1$  内解析;  $\tilde{w}_1$  是  $w_1$  在  $G_2$  中延拓,  
即  $w_1 \equiv \tilde{w}_1$ ,  $z \in G_1 \cap G_2$ , 证明  $\tilde{w}_1$  是方程的解:

设.  $\frac{d^2 \tilde{w}_1}{dz^2} + p(z) \frac{d\tilde{w}_1}{dz} + q(z) \tilde{w}_1 = g(z)$ . 在  $G_2$  中解析.

$w_1$  为方程在  $G_1$  中的解. 在  $G_1 \cap G_2$  中,  $w_1 = \tilde{w}_1$   
 $\frac{d^2 \tilde{w}_1}{dz^2} + p(z) \frac{d\tilde{w}_1}{dz} + q(z) \tilde{w}_1 = 0$ . 成立

故  $g(z) \equiv 0$ .  $z \in G_1 \cap G_2$ .

据零点孤立性,  $g(z) \equiv 0$ .  $z \in G_2$ .

$\therefore \tilde{w}_1$  在  $G_2$  中满足方程.

---

设  $w_1, w_2$  为  $G_1$  内方程的两个线性无关解, 若  $\tilde{w}_1$  和  $\tilde{w}_2$  分别为  $w_1, w_2$  在  $G_2$  内的解析延拓, 即  $\tilde{w}_1 \equiv w_1$ ,  $\tilde{w}_2 \equiv w_2$ ,  $z \in G_1 \cap G_2$ ,  
试证:  $\tilde{w}_1$  和  $\tilde{w}_2$  依然线性无关

证明: 由前,  $\tilde{w}_1$  和  $\tilde{w}_2$  是方程在  $G_2$  中的解.

由于  $w_1, w_2$  线性无关,

$$\Delta(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \neq 0, \quad z \in G_1$$

$$\Delta(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \tilde{w}_1' & \tilde{w}_2' \end{vmatrix} = g(z), \quad g(z) \text{ 在 } G_2 \text{ 中解析.}$$

$$\text{则 } z \in G_1 \cap G_2 \text{ 时, } \Delta(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = \Delta(w_1, w_2) \neq 0.$$

由解析函数的唯一性,  $g(z) \neq 0, \quad z \in G_2.$

故  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$  线性无关.

### §3. 含参积分

定理1. 设.

①  $f(t, z)$  是  $t$  和  $z$  的连续函数,

$$t \in [a, b], z \in \bar{G}.$$

② 对于  $[a, b]$  中的任何  $t$  值,  $f(t, z)$  是  $z$  的单值解析函数.

定义  $F(z) = \int_a^b f(t, z) dt$  为  $\bar{G}$  中的解析函数.

$$\text{且, } \frac{d}{dz} F(z) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} f(t, z) dt.$$

证:  $\because f(t, z)$  在  $\bar{G}$  中解析.

$\therefore$  对于  $\bar{G}$  内任一点, Cauchy 积分公式

$$f(t, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t, \zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

则

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b dt \oint_c \frac{f(t, \zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{d\zeta}{\zeta - z} \int_a^b f(t, \zeta) dt.$$

构成了柯西型积分, 且  $\int_a^b f(t, \zeta) dt$  连续,

设  $F(z) = \int_a^b f(t, z) dt$  为解析函数.

$$\begin{aligned} \text{且 } \frac{d}{dz} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{(z-\zeta)^2} \left\{ \int_a^b f(t, \zeta) dt \right\} d\zeta \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\pi i} \left( \oint \frac{f(t, \zeta)}{(z-\zeta)^2} d\zeta \right) dt = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt. \end{aligned}$$

→ 推广: 瑕积分

定理中  $t$  可推广为复数

定理 2 设.

①  $f(t, z)$  是  $t, z$  的连续函数,  $t > a, z \in \bar{G}$ .

② 对任何  $t > a$ ,  $f(t, z)$  是  $\bar{G}$  中  $z$  的单值解析函数

③ 要求  $\int_a^\infty f(t, z) dt$  在  $\bar{G}$  中一致收敛, 即对于任意给定的  $\varepsilon$ ,

$\exists T(\varepsilon)$ , 当  $T_2 > T_1 > T(\varepsilon)$  时,  $\left| \int_{T_1}^{T_2} f(t, z) dt \right| < \varepsilon$ .

则  $F(z) = \int_a^\infty f(t, z) dt$  在  $G$  中解析, 且  $\frac{dF}{dz} = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial z} dt$ .

证: 任取一个无界序列  $a_n$ ,  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n < \dots \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

令  $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t, z) dt$ . 满足定理 1,  $u_n$  为  $G$  内解析函数.

则  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$  级数一致收敛.

$\therefore F(z) = \int_a^\infty f(t, z) dt$  在  $G$  内解析且  $F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(z) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial z} dt = \checkmark$

判据: 比较判别法.

存在  $\phi(t)$ , 使得  $|f(t, z)| < \phi(t)$ ,  $z \in \bar{G}$ ,  $\phi$  是实函数,

且  $\int_a^\infty \phi(t) dt$  一致收敛, 则  $\int_a^\infty f(t, z) dt$  在  $\bar{G}$  中一致绝对收敛.



例]. 积分 
$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos zt \, dt$$

$$|\cos zt| = \frac{1}{2} |e^{i \cdot zt} + e^{-i \cdot zt}|, \quad z = x + iy.$$

$$\leq e^{2|y|t}.$$

则],  $|e^{-t^2} \cos zt| < e^{-t^2 + 2y_0 t}, \quad y_0 > |2\operatorname{Im} z|.$

$$\text{且 } \int_0^{\infty} e^{-t^2 + 2y_0 t} \, dt \text{ 收敛}$$

故积分满足条件 ① ~ ③.

$$F'(z) = - \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot 2t \sin zt \, dt.$$

$$= \underbrace{e^{-t^2} \sin zt \Big|_0^{\infty}}_0 - 2z \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos zt \, dt$$

$$\therefore F'(z) = -2z F(z) \Rightarrow F(z) = C e^{-z^2}$$

$$z=0 \text{ 代 } \lambda \Rightarrow C = F(0) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore f(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z^2}.$$

对  $t$  分部积分

## §4. $\Gamma$ 函数.

### §4.1 $\Gamma$ 函数定义

最基本的特殊函数  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re} z > 0$ .

—— 第二类 Euler 积分.

—— 勒让德表达式.

—— Mellin 变换形式  
 $\int_0^{\infty} f(t) t^{z-1} dt$ .

考虑 
$$\int_0^1 (\ln x)^n dx = (\ln x)^n x \Big|_0^1 - n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx$$

$$= \dots = (-1)^n n!$$

故, 
$$n! = \int_0^1 (\ln \frac{1}{x})^n dx.$$

令  $x = e^{-t}, \quad x=0 \quad t=\infty,$   
 $x=1 \quad t=0.$

得 
$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^n dt$$

即 
$$\Gamma(n+1) = n!$$

故, 
$$\Gamma(z) = \int_0^1 (\ln \frac{1}{x})^{z-1} dx$$

分析  $\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  (原因:  $t=0$  处性质不明).

第二项考虑定理 2:  $t > 1$  时  $e^{-t} t^{z-1}$  为  $t, z$  的连续函数且为  $z$  的解析函数.

比较判别法

$$e^t = \sum \frac{t^n}{n!} > \frac{t^N}{N!} \quad \therefore e^{-t} < \frac{N!}{t^N}$$

设  $\bar{G}$  为闭区域,  $z = x + iy, x_0$  为  $(\operatorname{Re} z)_{\max}$ . 取  $N > 1 + x_0$ .

$$|e^{-t} t^{z-1}| = |e^{-t} t^{x-1} e^{iy \ln t}| \leq e^{-t} \cdot t^{x_0-1}$$

$$< \frac{N!}{t^N} t^{x_0-1} < \frac{N!}{t^2}.$$

又  $\int_1^{\infty} \frac{N!}{t^2} dt$  收敛.

$\therefore \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  一致收敛.

再考虑.  $\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt.$   $\operatorname{Re} z > 0$

$$t=0: t=\delta, \delta \rightarrow 0. \quad \operatorname{Re} z = x > 0$$

$$t \in [\delta, 1]$$

$$u) |e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} \cdot t^{x-1} \leq t^{x-1}.$$

$$\text{而 } \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{x}. \text{ 在给定的 } \delta \text{ 下有界, 满足定理 1.}$$

$$\Rightarrow \text{在右半平面解析}$$

$\Gamma$  函数的解析延拓.

$$\int_0^1 e^t t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} (z \neq -n) \quad \left\{ \text{不要求 } \operatorname{Re} z > 0 \right\}$$

在  $z \neq 0, -1, \dots$  全平面解析

得到:

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}. \quad (z \neq 0, -1, \dots).$$

$\Gamma$  函数在统计中的应用.

①. Maxwell 速度分布.  $e^{-\varepsilon/kT}$ .

$$dN = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv.$$

$$\langle v^n \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v^n dN = \int_0^{\infty} 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^{n+2} dv, \quad \text{令 } x = \frac{mv^2}{2kT}.$$

$$= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{\frac{n+3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{n+1}{2}} dx.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

②. 伽马分布

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0. \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx = \alpha \beta \\ \sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\alpha} \cdot \beta \quad (\langle x^2 \rangle = \beta^2 \alpha (\alpha + 1)) \end{array} \right.$$

## §4.2. $\Gamma$ 函数的性质

⑦.  $\Gamma(1) = 1$ .

② 递推关系.  $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$

证法:  $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt$

$$11) \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \Rightarrow \text{解析延拓.}$$

$$z=0 \text{ 为一阶极点, } \operatorname{Res} \Gamma(0) = \Gamma(1) = 1.$$

两次递推.  $\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)} \Gamma(z+2) \quad \operatorname{Re} z > -2.$

$$\therefore \text{Res } f(-1) = -f(0) = -1$$

同理.  $\text{Res } \Gamma(n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

且,  $r_{(n+1)} = n!$

性质3 余元/反射/互余宗量公式

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

推论: ①  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

②  $\Gamma(z)$  在全平面上无零点.

证:  $\because \frac{\pi}{\sin \pi z} \neq 0$ .

若  $z = z_0$  使  $\Gamma(z_0) = 0$ , 则  $\Gamma(1-z_0) = \infty$ ,  $1-z_0$  必为奇点.

故  $z_0 = n+1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

又已知  $\Gamma(n+1) = n! \neq 0$  矛盾

$\therefore \Gamma(z)$  在全平面无零点.

性质4. 倍乘公式

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma(z+\frac{1}{2})$$

性质5. 渐近展开 (Stirling 公式)

$$|z| \rightarrow \infty, \arg z < \pi.$$

$$\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi} \left( 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \dots \right)$$

取对数:

$$\ln \Gamma(z) \sim (z - \frac{1}{2}) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \dots$$

§5. B函数 (第一类 Euler 积分)

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (\operatorname{Re} p, q > 0)$$

$$\text{令 } t = \sin^2 \theta$$

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Gamma: \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \stackrel{t=x^2}{=} 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx$$

$$\therefore \Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy.$$

$$\text{令 } x = r \sin \theta, y = r \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \Gamma(p) \Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} (r \sin \theta)^{2p-1} (r \cos \theta)^{2q-1} r dr d\theta. \\ &= \left( 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left( 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta \right). \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

$$\text{推论: } B(p, q) = B(q, p)$$

证明余元公式:

$$B(z, 1-z) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \Gamma(z) \Gamma(1-z).$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \Gamma(z) \Gamma(1-z) &= B(z, 1-z) \\ &= \int_0^1 t^{z-1} \cdot (1-t)^{-z} dt. \end{aligned}$$

$$\text{令 } x = \frac{t}{1-t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} B(z, 1-z) &= \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x} dx \quad \text{Euler 积分} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (0 < \operatorname{Re} z < 1) \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{\sin \pi z}$  可视为  $B(z, 1-z)$  的解析延拓...

$$\begin{aligned} \text{倍乘: } \int_{-1}^1 (1-x^2)^{z-1} dx &\stackrel{x^2=t}{=} \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(z, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} \\ &\quad \left\| \begin{array}{l} 1+x=2t \\ 1-x=2(1-t) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$2^{2z-1} \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z-1} dt = B(z, z) \cdot 2^{2z-1}$$

$$\text{故 } B(z, \frac{1}{2}) = B(z, z) \cdot 2^{2z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(z) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z + \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(z) \Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

$$\Rightarrow \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2})$$

§6.  $\psi$  函数

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

性质:

$$\ln \Gamma(z) + \ln \Gamma(1-z) = \ln \pi - \ln(\sin \pi z)$$

$$\Rightarrow \psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \cot \pi z$$

①  $z = 0, -1, -2, \dots$  都是  $\psi(z)$  的一阶极点,

$$\text{且 } \operatorname{Res} \psi(0) = \operatorname{Res} \psi(1) = \dots = \operatorname{Res} \psi(-n) = -1$$

$\psi(z)$  在除这些点外全平面解析.

$$\textcircled{2} \quad \psi(z+n) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \psi(1-z) = \psi(z) + \pi \cot \pi z$$

$$\textcircled{4} \quad \psi(z) - \psi(1-z) = -\frac{1}{z} - \pi \cot \pi z$$

$$\textcircled{5} \quad \psi(2z) = \frac{1}{2} \psi(z) + \frac{1}{2} \psi(z + \frac{1}{2}) + \ln 2$$

$$\textcircled{6} \text{ 渐近公式 } \psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6} \quad (|z| \rightarrow \infty, (\arg z) < \pi)$$

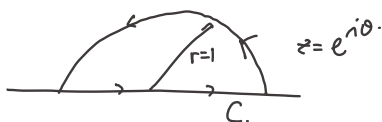
$$\textcircled{7} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(n+z) - \ln n] = 0$$

$$\triangleq \gamma = -\psi(1) = 0.577215664 \quad \text{Euler 常数}$$

$$\text{则 } \psi(\frac{1}{2}) = -\gamma - 2 \ln 2, \quad \psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \psi(-\frac{1}{2}) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2$$

例子.

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} d\theta.$$



$$\oint_C \frac{z^{2n}-1}{z^2-1} dz = \int_0^\pi \frac{e^{i2n\theta}-1}{e^{i2\theta}-1} e^{i\theta} d\theta + \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}-1}{x^2-1} dx = 0$$

无奇点

$$\therefore \int_0^\pi \frac{e^{i2n\theta}-1}{e^{i2\theta}-1} e^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta - 1 + i \sin(2n\theta)}{2 \sin \theta} d\theta.$$

$$= - \int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} d\theta + \frac{i}{2} \int_0^\pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} d\theta.$$

$\hookrightarrow 0$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}-1}{x^2-1} dx = \int_{-1}^1 (x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + 1) dx$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \dots + \frac{1}{3} + 1 \right) = \psi(n+\frac{1}{2}) - \psi(\frac{1}{2})$$

$$\therefore \int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} d\theta = \psi(n+\frac{1}{2}) - \psi(\frac{1}{2}).$$

[ $\psi(z+1) - \psi(z)$  公式]

$$\left\{ \int_0^\pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} d\theta = 0 \right.$$

无穷级数的求和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{d(n)}$$

,  $P(n)$ ,  $d(n)$  为  $n$  的多项式,

$d(n)$  为  $n$  的  $m$  次多项式, 且均为 1 阶零点.

$$\text{即 } d(n) = (n+\alpha_1)(n+\alpha_2) \dots (n+\alpha_m).$$

$$\text{则 } U_n = \frac{P(n)}{d(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n+\alpha_k}$$

要求收敛:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0, \text{ 即 } \sum_{k=1}^m a_k = 0.$$



因此,  $N \rightarrow \infty$  时,  $N$  足够大, 可略.

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_n = \sum_{k=1}^m a_k \left( \psi(N + \alpha_k) - \psi(\alpha_k) \right) - \ln N \sum_{k=1}^m a_k$$

即有:

$$= \sum_{k=1}^m a_k \left( \underbrace{\psi(\alpha_k + N) - \ln N - \psi(\alpha_k)}_{\downarrow}$$

$N \rightarrow \infty, \rightarrow 0.$

$\approx 0$  故随  $N$  加模

故

$$= - \sum_{k=1}^m a_k \psi(\alpha_k).$$

eg. 求  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{1}{6} \frac{1}{n+\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \frac{1}{n+\frac{2}{3}} + \frac{1}{6} \frac{1}{n+1} \quad (\sum a_k = 0)$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{1}{6} \left[ \psi\left(\frac{1}{3}\right) - 2\psi\left(\frac{2}{3}\right) + \psi(1) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3 \right)$$

例2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+ia} + \frac{-1}{n-ia}$

$$= \frac{-i}{2a} \left[ \psi(ia) - \psi(-ia) \right]$$

$$= -\frac{i}{2a} \cdot \left( -\frac{1}{ia} - \pi \cot i\pi a \right)$$

$$= \frac{1}{2a^2} (1 + \pi a \coth \pi a)$$

如果  $d(n) = (n + \alpha_1)(n + \alpha_2) \cdots (n + \alpha_m) \cdot \underbrace{(n + \beta_1)^2 (n + \beta_2)^2 \cdots (n + \beta_r)^2}_{\text{2个零点}}$

$$u_n = \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{n + \alpha_k} + \sum_{k=1}^r \left[ \frac{b_{1k}}{n + \beta_k} + \frac{b_{2k}}{(n + \beta_k)^2} \right], \quad \sum a_k + \sum b_{rk} = 0.$$

那么,

$$\sum u_n = -\sum_{k=1}^m a_k \psi(a_k) - \sum_{k=1}^l \left( b_{1k} \psi(\beta_k) - b_{2k} \psi'(\beta_k) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{ip]} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2} &= \left[ \frac{4}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right] - \left[ \frac{4}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} \right] \\ &= -\left( 4\psi(1) - \psi'(1) \right) + \left( 4\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi'\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{2\pi^2}{8} - 8\ln 2 \end{aligned}$$

## 第9章 线性常微分方程的级数解法

理论基础：解析函数论，级数展开，解析延拓

### §9.1 二阶线性常微分方程的常点和奇点

一般形式：
$$\alpha(z) \frac{d^2 w}{dz^2} + \beta(z) \frac{dw}{dz} + \gamma(z) w = f(z)$$

齐次标准形式：
$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z) \frac{dw}{dz} + q(z) w = 0$$
 
$$\left\{ \begin{array}{l} w \text{ 为待求函数} \\ p, q \text{ 为已知函数} \end{array} \right.$$

初值： $w(z_0) = C_0, w'(z_0) = C_1$

$p(z), q(z)$  解析性  $\Rightarrow$  决定了级数。

在一定区域内，除了有限个孤立奇点外为  $z$  的单值解析。

常点： $p, q$  在  $z_0$  及其邻域内解析，则  $z_0$  称为方程的常点。

奇点： $p, q$  至少一个在  $z_0$  不解析，则  $z_0$  称为方程的奇点。

例. 勒让德方程 Legendre

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + l(l+1)w = 0$$

$$p(z) = -\frac{2z}{1-z^2}, \quad q(z) = \frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

奇点  $z = \pm 1$

无穷远点： $z \rightarrow \frac{1}{t} \quad \frac{dw}{dz} \rightarrow -t^2 \frac{dw}{dt} \quad \frac{d^2 w}{dz^2} \rightarrow t^4 \frac{d^2 w}{dt^2} + 2t^3 \frac{dw}{dt}$

代入：

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \left[ \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right) \right] \frac{dw}{dt} + \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) w = 0$$

方程常点： $p\left(\frac{1}{t}\right) = 2t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$  (不能有  $t^{-1}$  项)

$$q\left(\frac{1}{t}\right) = b_4 t^4 + b_5 t^5 + \dots$$

$\rightarrow$  Legendre 方程  $q(z)$  不满足条件， $\infty$  点为奇点

方程常点的解.

基本定理:

如  $p, q$  在  $|z - z_0| < R$  内单值解析,

则  $w'' + pw' + qw = 0$  在圆内有唯一解使  $w(z)$  满足初值条件.

并且  $w(z)$  在此圆内单值解析.

$w(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内表示成泰勒级数  $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$

其中  $c_0, c_1$  即有初值条件给出.  $c_k$  可用  $c_0, c_1$  表示.

例: 求解 Legendre 方程, 在  $z=0$  邻域.  $l$  为已知参数.

解:  $w'' - \frac{2z}{1-z^2} w' + \frac{l(l+1)}{1-z^2} w = 0$ .  $z=0$  为常点, 令  $w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ . ( $|z| < 1$ )

代入:

$$(1-z^2) \sum c_k (k+1)k z^{k-2} - 2z \sum c_k \cdot k z^{k-1} + l(l+1) \sum c_k z^k = 0$$

整理:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k+2)(k+1) c_{k+2} - [k(k+1) - l(l+1)] c_k \right\} z^k = 0$$

$$\therefore (k+2)(k+1) c_{k+2} - [k(k+1) - l(l+1)] c_k = 0.$$

$$\therefore c_{k+2} = \frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)} c_k \quad \text{系数递推关系.}$$

$$c_{2n} = \frac{(2n-l-2)(2n-l-1)}{(2n)(2n-1)} c_{2n-2}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{c_0}{(2n)!} [(2n-l-2)(2n-l-4) \cdots (-1)] [(2n+l-1)(2n+l-3) \cdots (l+1)]$$

同理:

$$c_{2n+1} = \frac{c_1}{(2n+1)!} [(2n-l-1)(2n-l-3) \cdots (-l+1)] [(2n+l)(2n+l-2) \cdots (l+2)]$$

利用  $\Gamma$  函数:

$$C_{2n} = \frac{\Gamma(n - \frac{l}{2}) \Gamma(n + \frac{l+1}{2})}{\Gamma(-\frac{l}{2}) \Gamma(\frac{l+1}{2})} \frac{2^{2n}}{(2n)!} C_0$$

$$C_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n - \frac{l-1}{2}) \cdot \Gamma(n+1 + \frac{l}{2})}{\Gamma(-\frac{l-1}{2}) \Gamma(1 + \frac{l}{2})} C_1$$

$$\therefore w(z) = C_0 w_1(z) + C_1 w_2(z)$$

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \frac{l}{2}) \Gamma(n + \frac{l+1}{2})}{\Gamma(-\frac{l}{2}) \Gamma(\frac{l+1}{2})} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

$$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n - \frac{l-1}{2}) \cdot \Gamma(n+1 + \frac{l}{2})}{\Gamma(-\frac{l-1}{2}) \Gamma(1 + \frac{l}{2})} z^{2n+1}$$

若  $l$  为整数  $\Rightarrow$  Legendre 多项式.

奇点邻域的解.

极点: 可能是解的任意类奇点.  $w'' + pw' + q = 0$

定理1. 如果  $z_0$  为方程的奇点, 则在  $p(z)$  和  $q(z)$  解析的环形区域  $0 < |z - z_0| < R$  内, 方程的两个线性无关解为

$$w_1(z) = (z - z_0)^{p_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (p_1 \text{ 可不为整数})$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{p_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

或者

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{p_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

其中,  $p_1, p_2, g$  为常数.

在一定条件下方程的解为  $w_1 = (z - z_0)^{p_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$

称为正则解 ( $G \neq 0$  或  $d_0 \neq 0$ )  $w_2 = g w_1 \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{p_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$

定理2. 方程  $w'' + pw' + q = 0$  在奇点  $z_0$  邻域  $0 < |z - z_0| < R$  内有两正解  $w_1, w_2$  的充要条件为

$(z - z_0)p(z)$  和  $(z - z_0)^2 q(z)$  都在  $z_0$  解析.

即  $z_0$  最多为  $p$ -阶极点,  $q$ -二阶极点.

此时的  $z_0$  称为正则奇点,

$p_1, p_2$  称为方程在正则奇点的指标 / 正则解的指标.

设  $z_0 = 0$  为正则奇点

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-1} \quad q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{k-2} \quad w = z^p \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

代入:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+p)(k+p-1) z^{k+p-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+p) z^{k+p-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{k-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+p} = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k+p)(k+p-1) c_k + \sum_{l=0}^{\infty} [a_{k-l}(l+p) + b_{k-l}] c_l \right\} z^k = 0.$$

$k=0 \quad \therefore p(p-1) + pa_0 + b_0$  — 指标方程, 规定,  $\operatorname{Re} p_1 \geq \operatorname{Re} p_2$ .

则  $z^n$  项:

$$[(n+p)(n+p-1) + a_0(n+p) + b_0] c_n + \sum_{l=0}^{n-1} [a_{n-l}(l+p) + b_{n-l}] c_l = 0$$

$$\Rightarrow c_n \Rightarrow w_1, w_2$$

若  $p_1 - p_2 \notin \mathbb{Z}$ ,  $w_1, w_2$  线性无关.

若  $p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $p_1 - p_2 = m$ . 则

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{若 } m=0 \quad w_2 = g w_1 \ln(z-z_0) + z^p \sum d_k (z-z_0)^k \\ \text{若 } m \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1(z), w_2(z) \text{ 独立} \rightarrow \checkmark \\ w_1(z), w_2(z) \text{ 不独立: 放入 } \ln \text{ 项} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

由方程的一个解求另一个:

已知  $w_1(z)$ ;

$$w_2(z) = A w_1(z) \int^z \frac{\exp \int -p(z) dz}{[w_1(z)]^2} dz.$$

$$\text{记: } w_1'' + p w_1' + q w_1 = 0$$

$$w_2'' + p w_2' + q w_2 = 0$$

$$\Rightarrow w_1 w_2'' - w_2 w_1'' + p(w_1 w_2' - w_2 w_1') = 0$$

$$\Rightarrow -p = \frac{w_1 w_2'' - w_2 w_1''}{w_1 w_2' - w_2 w_1'} \Rightarrow \ln(w_1 w_2' - w_2 w_1') = - \int p dz$$

$$\therefore w_1 w_2' - w_2 w_1' = \exp \int -p dz.$$

$$\Rightarrow \frac{w_1 w_2' - w_2 w_1'}{w_1^2} = \exp \int -p dz / w_1^2$$

$$\Rightarrow w_2 = A w_1 \int \frac{\exp \int -p dz}{w_1^2} dz$$

线性相关性:

$$W = \begin{vmatrix} w_1 & w_1' \\ w_2 & w_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 无关}$$

Bessel 方程: 柱函数  $z \rightarrow$  分离变量.

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = 0 \quad (\text{设 } \nu \geq 0)$$

$z=0$  为正则奇点,  $z=\infty$  非正则奇点

$\nu > 0$  正则解:

设解为  $w = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k, \quad C_0 \neq 0.$

代入得:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+\rho)(k+\rho-1) z^{k+\rho-2} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+\rho) z^{k+\rho-2}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{k+\rho} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{k+\rho-2} = 0.$$

$\Rightarrow$

(约去  $z^{\rho-2}$ )

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left[ (k+\rho)^2 - \nu^2 \right] z^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{k+2} = 0.$$

指标方程:  $\rho^2 - \nu^2 = 0$

若  $\rho_1 = \nu, \quad \rho_2 = -\nu$

$\rho_1 - \rho_2 = 2\nu \notin \mathbb{Z}$

则

$$y_1(z) = z^\nu \sum C_k z^k$$

$$y_2(z) = z^{-\nu} \sum d_k z^k$$



先考虑  $y_1(z)$

$$z^1: C_1 \left[ (p+1)^2 - \nu^2 \right] = 0 \Rightarrow C_1 \overset{0}{\neq} (2\nu+1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$z^k$ : 递推关系  $\Rightarrow$

$$C_n = - \frac{C_{n-2}}{n(n+2\nu)}$$

现  $p_1 = \nu$ .

$$C_n = - \frac{C_{n-2}}{n(n+2\nu)} \quad (n \geq 2)$$

$$C_{2k+1} = 0 \quad (\text{由 } C_1 = 0)$$

得:

$$\begin{aligned} C_{2k} &= (-1)^k \frac{1}{2^{2k} k! (k+\nu)(k+\nu-1)\cdots(1+\nu)} C_0 \\ &= (-1)^k \frac{\Gamma(1+\nu)}{2^{2k} k! \Gamma(k+1+\nu)} C_0 \end{aligned}$$

即

$$y_1(z) = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \cdot C_0$$

同理,

$$y_2(z) = z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \cdot d_0$$

$$\hat{z} \quad C_0 = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)2^\nu} \quad d_0 = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)2^{-\nu}}$$

得  $\pm\nu$  级的 Bessel 函数

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{1}{\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

规定

$$|\arg z| < \pi, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

在奇点  $z_0 = 0$ ,  $J_\nu(0) = 0$   $J_{-\nu} \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$  割线: 0 点,  $\infty$  点  $\Rightarrow$  为负实轴.

此时 Bessel 函数单值解析

②.  $p_1 - p_2 = 2\nu$  为非负整数.

第一解

$$y_1 = J_\nu(z) \text{ 不变.}$$

第二解.

$$y_2 = g y_1 \ln z + z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

$$g \ln z \left( z y_1' + z y_1' + (z^2 - \nu^2) y_1 \right) \stackrel{=0}{=} + 2g z y_1' + \sum_{k=0}^{\infty} d_k [(k-\nu)^2 - \nu^2] z^{k-\nu} \\ + \sum d_k z^{k-\nu+2} = 0$$

因此,

$$2g \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k}(2k+1) z^{2k+2\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k [(k-\nu)^2 - \nu^2] z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{k+2} = 0.$$

另法: 用  $w_1$  求  $w_2$

$$\text{行列式 } \Delta(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{vmatrix} \stackrel{\text{欲}}{=} \frac{A}{z}$$

得

$$A = - \frac{2}{\Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu)}$$

$$= - \frac{2}{\pi} \sin \pi \nu$$

$$\text{即 } \Delta = - \frac{2}{\pi z} \sin \pi \nu. \quad \text{若 } \nu \text{ 为整数, 线性相关}$$

改设第二解为

$$w_2(z) = \alpha_1 J_\nu(z) + \alpha_2 J_{-\nu}(z)$$

$$\text{选择 } w_2 = \frac{c J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}$$

$$\text{则 } \Delta(J_\nu, w_2) = \frac{2}{\pi z} \quad \text{线性无关.}$$

因此,  $J_\nu(z)$  为第一解,  $w_2$  为第二解

$$\text{取 } c = \cos \pi \nu,$$

$$N_\nu = \frac{\cos \pi \nu J_\nu - J_{-\nu}}{\sin \pi \nu} \quad \text{--- 诺伊曼函数}$$

$\nu = n$  时,

$$N_n = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos \nu \pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu \pi}$$

$$\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

$$= -\frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}, \quad |\arg z| < \pi.$$

Bessel 方程的解:

$$J_\nu(z) \begin{cases} J_{-\nu} & , \nu \notin \mathbb{Z} \\ N_\nu & , \nu \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (J_n, N_n)$$

# 第十章. 拉普拉斯变换

## §10.1. 积分变换

$$F(k) = \int_a^b f(t) K(t, k) dt \quad \text{称为积分变换.}$$

$\downarrow$  像函数                       $\downarrow$  原函数                       $\uparrow$  积分变换的核 Kernel

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \longrightarrow & F(k) \\
 \downarrow \text{总称} & & \downarrow \text{简法} \\
 f'(t) & \xleftarrow{\text{反变换}} & F'(k)
 \end{array}$$

### 积分变换

Mellin 变换  $K(t, k) = t^{k-1}$ ,  $a=0, b=\infty$ .

Laplace 变换  $K(t, k) = e^{-kt}$ ,  $a=0, b=\infty$   $\rightarrow$  经典控制理论.

Fourier 变换  $K(t, k) = e^{-ikt}$ ,  $a=-\infty, b=+\infty$ ,  $\rightarrow$  图像分析. 场论

正弦变换  $K(t, k) = \sin kt$ ,  $a=0, b=\infty$

余弦变换  $K(t, k) = \cos kt$ ,  $a=0, b=\infty$

## §2. Laplace 变换

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p) \quad t \text{ 为实数, } p \text{ 为复数, } p=s+io$$

变换核  $e^{-pt}$

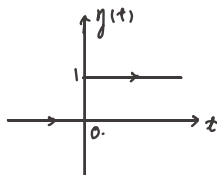
记号: 记为  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , 或  $F(p) \doteq f(t)$ .

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ , 或  $f(t) \doteq F(p)$

引入函数：阶跃函数 (step function)

Heaviside

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



则 
$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t) \eta(t) e^{-st}}_{\text{视为 Fourier 变换}} e^{-i\omega t} dt.$$

$$0 \rightarrow -\infty, \quad \eta = 0$$

$$0 \rightarrow +\infty, \quad e^{-st} (s > 0) \text{ 衰减. } \left\{ \begin{array}{l} \text{Fourier 等权重} \\ \text{Laplace 考虑近距离的当前“现实主义的”} \end{array} \right.$$

Laplace 变换的存在条件.

① 在  $0 \leq t < \infty$  中,  $f(t)$  除了有限的第一类间断点外,  $f(t)$  及  $f'(t)$  处处连续

②  $f(t)$  可以为有限增长函数, 即  $\exists M > 0, s' > 0$ , 使得  $\forall t \in (0, +\infty), |f(t)| < Me^{s't}$

$s'$  的下界称为收敛横标, 记为  $s_0$ . ( $s' \geq s_0$ ).

例. 求  $f(t) = 1$  的拉氏变换

$$1 \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

求  $\mathcal{L}(e^{\alpha t})$

$$e^{\alpha t} \doteq \int_0^{\infty} e^{\alpha t - pt} dt = \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha)$$

### §3. Laplace 变换的基本性质

①. 线性定理:

$$f_1(t) \doteq F_1(p)$$

$$f_2(t) \doteq F_2(p)$$

$$\text{则 } \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \doteq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p).$$

结合前例.

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{1}{2i} [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] \doteq \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right] \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

同理.

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

② 解析性.  $F(p)$  在  $\text{Re } p = s > s_0$  半平面上的解析函数.

证. 如果  $f(t)$  满足 Laplace 变换存在的充分条件.

$$|e^{-pt} f(t)| < M^{-(s-s_0)t} \quad (s = \text{Re } p).$$

$$\text{当 } s - s_0 \geq \delta > 0 \text{ 时, } |e^{-pt} f(t)| \leq M^{-\delta t}.$$

$$\int |e^{-pt} f(t)| dt < \int_0^\infty M e^{-\delta t} dt = \frac{M}{\delta}$$

$$\text{因此, } \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \text{ 一致收敛}$$

推论 若  $f(t)$  满足 Laplace 充分条件.

$$\text{当 } p \rightarrow \infty \quad |\theta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, \theta = \arg p), \quad \text{则 } f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{证: } |F(p)| &= \int_0^\infty |e^{-pt} f(t)| dt \\ &\leq \int_0^\infty M e^{-(|p|\cos\theta - s_0)t} dt \end{aligned}$$

$$\text{即 } |F(p)| \leq \frac{M}{|p| \cos \theta - s_0}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 令 } \delta = \frac{s_0}{\varepsilon \sin \omega}$$

当  $|p| > \delta$  时,

$$s = |p| \cos \delta > \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \rightarrow \infty.$$

因此  $|F(p)| \rightarrow 0$ .

### ③ 导数定理

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$$

类推:

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

---

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) \cdots$$

例. RL 串联电路

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E, \quad i_0 = 0$$

$$\text{令 } i(t) \doteq I(p)$$

$$\text{则 } \frac{di}{dt} = pI(p) - i(0) = pI(p)$$

$$LpI(p) + RI(p) = \frac{E}{p}$$

$$\text{故 } I(p) = \frac{E}{p(Lp+R)}$$

$$\Rightarrow \text{反变换 } i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

微分方程

↓ 积分变换

代数方程

↓ 反变换

解.



Heaviside 符号法.

$$p = \frac{d}{dt}, \quad \frac{1}{p} = \int$$

$$\frac{1}{p} \cdot 1 = t, \quad \frac{1}{p^2} \cdot 1 = \frac{1}{2} t^2, \quad \frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{1}{n!} t^n$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

$$\Rightarrow (Lp + R)i = E$$

$$\Rightarrow i = \frac{E}{Lp + R}$$

$$= \frac{E}{Lp} \left( 1 - \frac{R}{L} \frac{1}{p} + \frac{R^2}{L^2} \frac{1}{p^2} - \frac{R^3}{L^3} \frac{1}{p^3} + \dots \right)$$

$$= \frac{E}{R} \left\{ \frac{R}{L} \frac{1}{p} - \dots \right\}$$

$$\therefore i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

④. 积分定理.

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

证:

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau$$

$$\leq \int_0^t M e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1)$$

则  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  可求  $L$ .

$$\therefore \int_0^t f(\tau) d\tau \doteq L \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}$$

$\Rightarrow$  逆用导数定理.

$$\therefore \int_0^t f(\tau) d\tau \doteq F(p)/p.$$

LC 串联电路  $\pm q_0$

$$\frac{q}{C} = L \frac{di}{dt}, \quad q = q_0 - \int_0^t i(t) dt$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \frac{q_0}{C}$$

$$\hat{=} i(t) \hat{=} I(p)$$

$$(Lp + \frac{1}{pC}) I(p) = \frac{q_0}{C} \frac{1}{p}$$

$$I(p) = \frac{q_0}{LCp^2 + 1}$$

$$\therefore i(t) = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

⑤ 相似性定理

$$f(at) \hat{=} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

⑥ 位移定理  $e^{-\lambda t} f(t) \hat{=} F(p+\lambda)$

⑦ 延迟定理. 设  $f(t) = 0, t < 0$ .

$$\text{则 } f(t-t_0) \hat{=} e^{-pt_0} F(p).$$

证:

$$\begin{aligned} f(t-t_0) &\hat{=} \int_0^\infty e^{-pt} f(t-t_0) dt \\ &= \int_0^\infty \underbrace{e^{-p(\tau+t_0)}}_{\tau=t-t_0} \underbrace{f(\tau)}_{\tau=t-t_0} d\tau = e^{-pt_0} \int_0^\infty f(\tau) d\tau \\ &= e^{-pt_0} F(p) \end{aligned}$$

⑧ 卷积定理

$$\text{若 } f_1(t) \hat{=} F_1(p), \quad f_2(t) \hat{=} F_2(p)$$

例  $f_1 * f_2 \doteq F_1 F_2$ .

式中  $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ . 称为  $f_1, f_2$  的卷积.

证:

$$\begin{aligned}
 f_1(t) * f_2(t) &\doteq \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt \\
 &= \int_0^\infty f_1(\tau) \int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-pt} dt d\tau \\
 &= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty f_2(t') e^{-pt'} dt' \\
 &= F_1(p) F_2(p).
 \end{aligned}$$

例. LR 串联,  $E = E_0 \sin \omega t$ . 求  $i(t)$

$$L \frac{di}{dt} + iR = E_0 \sin \omega t.$$

$\bar{i} \doteq I$ , 例  $(\bar{i}(0) = 0)$

$$LP I(p) + RI(p) = F_1(p)$$

$$\therefore I(p) = F_1(p) \cdot \frac{1}{\underbrace{LP+R}_{\rightarrow F_2(p)}}$$

故, 
$$i(t) = \int_0^t E_0 \sin \omega \tau \cdot \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} d\tau$$

$$= \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau} \sin \omega \tau d\tau.$$

积分

$$= \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left[ \frac{L^2 \omega}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{L e^{\frac{Rt}{L}}}{R^2 + \omega^2 L^2} (\omega L \cos \omega t - R \sin \omega t) \right]$$

$$= \frac{E_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E_0}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

#### §4. 拉氏变换的反演

像函数  $F(p)$  的导数、积分.

导数的反演. 设实函数  $f(t)$  满足 Laplace 变换的充分条件

且  $f(t) \doteq F(p)$ ; 假设  $s_1$  为  $\operatorname{Re} p$  下界,  $s_0$  为  $f(t)$  的收敛横标. 则  $F(p)$  在  $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$  的半平面解析, 可在积分号下求导, 其  $n$  阶导数为

$$F^{(n)}(p) = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-pt} dt$$

即  $F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$

令  $f(t) = 1$ .  $F(p) = \frac{1}{p}$ , 由此,  $\frac{1}{p^2} \doteq t$ ,  $\frac{1}{p^3} \doteq \frac{1}{2} t^2$

$$\cdots, \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dp^n} \frac{1}{p} \doteq \frac{1}{n!} t^n.$$

$$\text{例1. } F(p) = \frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{D}{p+\alpha}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \text{Res} \frac{1}{p(p+\alpha)} \Big|_0 = \frac{1}{\alpha} \\ B = \text{Res} \frac{1}{p^2(p+\alpha)} \Big|_0 = -\frac{1}{\alpha^2} \\ C = \text{Res} \frac{1}{p^3(p+\alpha)} \Big|_0 = \frac{1}{\alpha^3} \\ D = \text{Res} \frac{1}{p^3(p+\alpha)} \Big|_{-\alpha} = -\frac{1}{\alpha^3} \end{array} \right.$$

$$\therefore \frac{1}{p^3(p+\alpha)} = \frac{1}{2\alpha} t^2 - \frac{1}{\alpha^2} t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3} e^{-\alpha t}$$

积分的反馈, 若  $\int_p^\infty F(q) dq$  存在,

且当  $t \rightarrow 0$  时,  $\left| \frac{f(t)}{t} \right|$  有界.

---


$$\text{例) } \int_p^\infty F(q) dq = \frac{f(t)}{t}$$

证明.

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(q) dq &= \int_p^\infty dq \int_0^\infty f(t) e^{-qt} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \int_p^\infty e^{-qt} dq = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \end{aligned}$$

$$\text{即有 } \int_p^\infty F(q) dq = \frac{f(t)}{t}.$$

令  $p \rightarrow 0$ . 推论:

$$\int_0^{\infty} F(p) dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

例. 求  $\frac{\sin \omega t}{t}$  的拉氏变换.

$$f(t) = \sin \omega t \stackrel{=}{=} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = F(p)$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{\sin \omega t}{t} &\stackrel{=}{=} \int_p^{\infty} \frac{\omega}{q^2 + \omega^2} dq \\ &= \arctan \frac{q}{\omega} \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\omega}. \end{aligned}$$

例. 求  $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2 + 1} dp = \frac{\pi}{2}$$

例. 求  $\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt$   $a, b > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt &= \int_0^{\infty} \frac{p}{p^2 + a^2} - \frac{p}{p^2 + b^2} dp \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2} \Big|_0^{\infty} = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

像函数在 $\infty$ 解析：级数法求原函数。

如可将  $F(p)$  由  $\operatorname{Re} p > s_0$  解析延拓到  $p = \infty$  的区域内，且在  $p = \infty$  解析。

则

$F(p)$  在  $\infty$  点可以 Taylor 展开

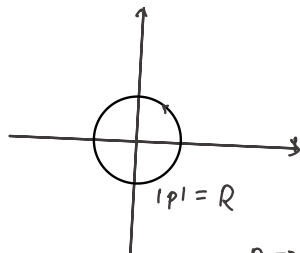
$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n p^{-n}, \text{ 不含 } n=0 \text{ (因 } p \rightarrow \infty, F(p) = 0 \text{)}$$

逐项反演：

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \frac{t^n}{n!}$$

证明此级数收敛。

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} F(p) p^{n-1} dp$$



$p \rightarrow \infty$  为  $F(p)$  零点

$\downarrow$   
 $|F(p)| < \frac{M}{R}$  当  $|p| > R$

$$\Rightarrow |C_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_R} \frac{M}{R} R^{n-1} \right| = MR^{n-1}$$

$$\therefore C_n < MR^{n-1}$$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n!} t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|C_{n+1}|}{n!} |t|^n$$

$$< M \sum R^n \frac{|t|^n}{n!} = M e^{R|t|} \text{ 收敛有限 } (R > s_0).$$

例 求  $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$  的反演，单值分支为  $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \Big|_{p \rightarrow \infty} = \frac{1}{p}$ 。

解：

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{1}{p^{2k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = J_0(t).$$

例. 求  $\frac{1}{p}e^{-t}$  的反演,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}e^{-t} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{p^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} t^n \\ &= J_0(2\sqrt{t})\end{aligned}$$

---

## §5. 傅立叶变换

§5.1 傅立叶级数  $f(x+2l) = f(x)$

取三角函数  $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \dots$

$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots$

展开为级数,

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

基本函数互相正交 任意两个  $g(x), h(x)$ .

$$\int_{-l}^l g(x) h(x) dx = 0$$

因此, 
$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx \\ a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \\ b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{cases}$$



狄里希利定理:

若  $f(x)$  满足: ① 处处连续或在每个周期只有有限的第一类间断点

② 在每个周期只有有限个极值点

则级数收敛, 且

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{kx}{l} + b_k \sin \frac{kx}{l} \right) = \begin{cases} f(x), & \text{连续点} \\ \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] & \text{间断点} \end{cases}$$

三角函数族是完备的。(可以表示任意  $f(x)$ )

令 圆频率  $\omega_k = \frac{k\pi}{l}$ , 则

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x)$$

物理图像: 任何周期信号可分解为直流信号与基频  $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$  和各高次 ( $\omega_k = k\omega_1$ ) 谐频。

振幅为  $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

取指数函数族

$$\{e^{i\omega_k x}\}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{则 } f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x},$$

复指数之间也正交

$$\int_{-l}^l e^{i\omega_m x} (e^{i\omega_n x})^* dx = 2l \delta_{mn}.$$

因此

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_k x} dx.$$

则: 
$$\begin{cases} C_0 = a_0 \\ C_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ C_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{cases}$$

## §5.2. Fourier 变换

$$C_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x') e^{-i\omega_k x'} dx'$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_k \int_{-l}^l f(x') e^{i\omega_k(x-x')} dx'$$

非周期函数:  $l \rightarrow \infty$ .

$f(x)$  定义在  $(-\infty, +\infty)$  非周期函数, 满足:

① 在  $x$  的任意有限区间上,  $f(x)$  分段光滑, 至多具有第一类间断点

②  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  存在.

约定  $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ , 取  $l \rightarrow \infty$ .  $\omega_k \rightarrow 0$ .

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-l}^l f(x') e^{i\omega(x-x')} dx'$$

引入  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$  称为  $f(x)$  的付里叶变换

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

( $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ : 对称化)

(无  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ : 更符合积分变换的定义)

记为

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

## §5.3. 付里叶变换的基本性质

设  $f(x)$  的付里叶存在, 且  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$

性质: ① 线性定理  $\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 \mathcal{F}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(f_2)$

② 导数定理: 设  $f^{(n)}(x) = 0 \Big|_{x=\pm\infty}$ ,  $m = 0, 1, \dots, n-1$

$$\text{则 } \mathcal{F}[f^{(m)}(x)] = (i\omega)^m F(\omega).$$

③ 积分定理  $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(t) dt\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$

④ 相似性定理  $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$$\underline{p \rightarrow i\omega}$$

⑤ 延迟定理  $\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-i\omega x_0} F(\omega)$

⑥ 位移定理  $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x} f(x)] = F(\omega - \omega_0)$

⑦ 卷积定理  $\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}(f_1) \mathcal{F}(f_2)$

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau$$

# §6. Laplace 变换的反演公式

付里叶变换  $g(t)$ , 像为  $G(\sigma)$

$$\begin{cases} G(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\sigma t} dt \\ g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma \end{cases}$$

令  $g(t) = f(t) \eta(t) e^{-st}$ ,  $\eta(t)$ : Heaviside 函数.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \eta(t) e^{-pt}$$

$$p = s + i\sigma$$

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \eta(t) e^{-st} e^{-i\sigma t} dt$$

$$F(s+i\sigma) = G(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\sigma t} dt$$

故  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(s+i\sigma) e^{(s+i\sigma)t} d(s+i\sigma)$

试图利用留数定理  $\Rightarrow$  推广的 Jordan 引理.

推广的约当引理: 设在  $\frac{\pi}{2} - \delta \leq \arg p \leq \frac{3\pi}{2} + \delta$  内.

当  $|p| \rightarrow \infty$  时,  $F(p)$  一致趋于 0. 则

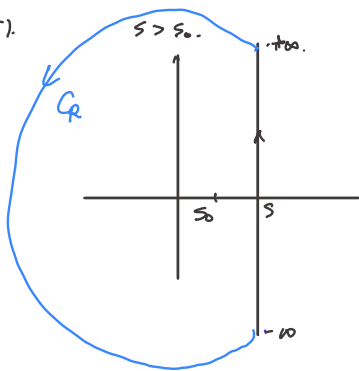
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0$$

故

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$= \sum \text{Res} \{ F(p) e^{pt} \}$$

(右半平面?)



例 1.  $F(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$ ,  $\omega > 0$ .

$|p| \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{|p^2 + \omega^2|^2} = 0$ . 由推广的约当引理,  $\int_{|p| \rightarrow \infty} F(p) e^{pt} dp = 0$

因此,  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S-i\infty}^{S+i\infty} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} e^{pt} dp$

$$= \sum \text{Res} \left\{ \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} e^{pt} \right\}$$

$$= \left[ \frac{t}{(p+i\omega)^2} - \frac{2}{(p+i\omega)^3} \right] e^{pt} \Big|_{p=i\omega} + \left[ \frac{t}{(p-i\omega)^2} - \frac{2}{(p-i\omega)^3} \right] e^{pt} \Big|_{p=-i\omega}$$

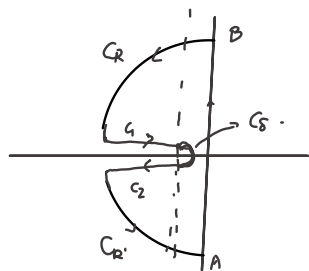
$$= \frac{1}{2\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

例 2.  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha \sqrt{p}}$ ,  $\alpha > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S-i\infty}^{S+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

$F(p)$  多值函数,  $p=0$ ,  $p=\infty$  为枝点

$$\oint_C F(p) dp = \int_{A_1}^0 + \int_{C_R} + \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_R'}$$



由推广的约当引理,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R'} F(p) e^{pt} dp = 0$$

$$\text{又 } \lim_{S \rightarrow 0} p F(p) e^{pt} = 0 \Rightarrow \lim_{S \rightarrow 0} \int_{C_S} F(p) e^{pt} dp = 0$$

$C_1, C_2$  上:  $\arg p = \pm \pi$ .  $\hat{\wedge} p = r e^{i\pm\pi}$

$$\int_{C_1} F(p) e^{pt} = -i \int_{\delta}^R \frac{1}{r} e^{-i\alpha\sqrt{r}} e^{-rt} dr$$

$$R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$$

$$\int_{C_2} F(p) e^{pt} = -i \int_{\delta}^R \frac{1}{r} e^{+i\alpha\sqrt{r}} e^{-rt} dr$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} [e^{i\alpha\sqrt{r}} + e^{-i\alpha\sqrt{r}}] e^{-rt} dr$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \cos \alpha x dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2/4t}$$

\ Mark. Page 66.

12].  $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}, \alpha > 0.$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} F(p) e^{pt} dp = -2\pi i$$

$$\int_{C_1} = - \int_{\delta}^R \frac{1}{r} e^{-i\alpha\sqrt{r}} e^{-rt} dr$$

$$R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$$

$$\int_{C_2} = \int_{\delta}^R \frac{1}{r} e^{i\alpha\sqrt{r}} e^{-rt} dr$$

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_1} + \int_{C_{\delta}} + \int_{C_2} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \sqrt{r}}{r} e^{-rt} dr = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-x^2 t} dx$$

$$\text{由于 } \int_0^{\alpha} \cos \frac{\alpha}{3} x d\xi = \frac{\sin \alpha x}{x}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-x^2 t} dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} \cos \frac{\alpha}{3} x d\xi \cdot e^{-x^2 t} dx.$$

$$= \int_0^{\alpha} d\xi \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \cos \frac{\alpha}{3} x dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^{\alpha} e^{-\xi^2/4t} d\xi.$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-x^2} dx$$

$$\therefore f(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-x^2} dx \quad \text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

$$= 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right] = \operatorname{erfc}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right].$$

\ 插曲. 首位数定律. Benford 定理.  $\rightarrow$  对数表

$$P_d = \log_b \left( 1 + \frac{1}{d} \right).$$

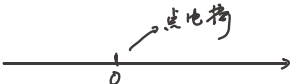
$$F(x) = \mathcal{L} \{ f(x) \} \quad G(t) = \mathcal{L} \{ g(t) \}$$

$$\text{e.i.) } \int_0^\infty F(x) g(x) dx = \int_0^\infty f(t) G(t) dt$$



# §11. $\delta$ 函数

§11.1 定义

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \end{array} \right.$$


$$\Rightarrow \text{推广: 点源在 } x_0 \text{ 处: } \left\{ \begin{array}{l} \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{or, } \int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0, & x_0 < a \text{ or } x_0 > b \\ 1, & a < x_0 < b \end{cases}$$

广义函数: 函数序列

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) f(t) dt = f(0)$$

$$\text{则 } n \rightarrow \infty, \delta_n(t) \rightarrow \delta(t).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin nx}{\pi x} \\ \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2} \\ \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \end{array} \right. \Rightarrow \text{不重要}$$

意义:

点源, 脉冲, 能动量的守恒, 频谱

实函数空间.

## §11.2 性质

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

证:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1$

由积分中值定理,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) \delta(x) dx \\ &= f(\xi) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = f(\xi) \end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 则  $\xi = 0$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(x)$$

## ② $\delta$ 函数与 Heaviside 函数

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

即  $H' = \delta$

## ③ $\delta$ 函数的微分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0)$$

进而  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0).$

④ 奇偶性.  $\delta(x) = \delta(-x)$

在积分意义下证明

$$\delta'(x) = -\delta'(-x)$$

$$\Rightarrow x\delta(x) = 0$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

⑤ 变元为函数  $\delta[\varphi(x)]$

$$\delta[\varphi(x)] dx = \frac{1}{|\varphi'(x)|} \delta[\varphi(x)] d\varphi(x)$$

证:

$$\delta[\phi(x)(x-c)] dx = \frac{1}{|\phi'(c)|} \delta(x-c) dx$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \phi(x)(x-c).$$

$$\delta[\phi(x)(x-c)] dx = \frac{d\varphi(x)}{|\varphi'(x)|} \delta[\varphi(x)]$$

由于  $\phi(c) \neq 0$ ,

$$\varphi'(x) = \phi'(x)(x-c) + \phi(x)$$

$$\Rightarrow \delta[\varphi(x)] \frac{d\varphi(x)}{|\varphi'(x)|} = \frac{\delta(x-c) dx}{|\phi(c)|}$$

如果  $\varphi(x) = 0$ , 根为  $x_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , 全为单根.

$$\text{则: } \delta[\varphi(x)] dx = \sum_k \frac{1}{|\varphi'(x_k)|} \delta(x-x_k) dx.$$

例:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x+a)}{2|a|} + \frac{\delta(x-a)}{2|a|} = \frac{\delta(x+a) + \delta(x-a)}{2|a|} = \frac{\delta(x+a) + \delta(x-a)}{2|x|}$$

$$\text{当 } a \rightarrow 0 \text{ 时, } \delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x)}{|x|}$$

$$x, \delta(x^2) dx = \frac{\delta(x)}{2|x|} dx$$

} 不一样  $\rightarrow$  重根.

# ⑥ $\delta$ 函数的积分变换

傅立叶变换:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-ikt} dt = 1$$

$$\text{则], } \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} dk$$

拉氏变换

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-pt_0}, \quad t_0 > 0.$$

$$t_0 \rightarrow 0: \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

多维的  $\delta$  函数

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

$$\text{A. } \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1 \Rightarrow \delta(\vec{r}-\vec{r}_0).$$

$$\text{则], } \delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{k}$$

$$\text{例. } \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}$$