数学物理方法专题

1 多元数及数系简介

1.1 数的历史

整数　　乘除 $\Rightarrow$ 分数
无理数
实数 $\sim$ 形——数轴
$x^2 = -1 \Rightarrow$ **虚数** $\Rightarrow$ **复数**
Hamilton:$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 1 \Rightarrow$ **四元数**

1.2 数系

实数系 $\mathbb{R} =$ **单实数** (a) **的集合**
定义加 $a + b = b + a$ **和乘** $a \cdot b = b \cdot a$
复数系 $\mathbb{C} =$ **实数对** (a, b) **的集合**
加法 $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
乘法 $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
代数形式 $(a, b) = a + ib, \quad i^2 = -1$
三角形式 $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
指数形式 $a = re^{i\theta}$

性质:

1. **对于任意函数，它们的和是唯一确定的**
2. **对于任意函数，它们的积是唯一确定的**
3. **存在一个数 0: 对于任意** a**，均有** $a + 0 = a$
4. **对于任意一个数，均存在其负数，满足** $a + x = 0$
5. **加法满足交换律** $a + b = b + a$
6. **加法满足结合律** $(a + b) + c = a + (b + c)$
7. **乘法满足交换律** $ab = ba$
8. **乘法满足结合律** $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$
9. **分配律** $a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca$

10. 对任一个 a 以及 $b \neq 0$ 存在一个唯一的 x 满足 $bx = a$

四元数 (Hamilton 代数)
八元数 (Cayley 代数)
十六元数 (Clifford 代数,Dirac 代数)

1.3 四元数

由四个实数组成的数组的集合

$$(a, b, c, d) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1)$$

代数

$$(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$$

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \\ ijk = -1 \end{cases}$$

不妨记成

$$\mathbb{Q}(\mathbb{R}) = \{\alpha : \alpha = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

乘法

$$\begin{aligned} &(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ =&(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &+ (a_1c_2 + c_1a_2 - b_1d_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k \end{aligned}$$

四元数的几何意义:

$$R(\vec{n}, \theta) = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k)$$

即可以表示成方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ **绕轴** $\vec{n}$ **发生** θ **转动。**
两个连续转动 $R(\vec{n}_1, \theta_1), R(\vec{n}_2, \theta_2)$**,合成为**

$$R(\vec{n}, \theta) = R(\vec{n}_2, \theta_2)R(\vec{n}_1, \theta_1)$$

考虑例子:

$$R(i, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad R(k, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + k)$$
$$\Rightarrow R(i, \frac{\pi}{2})R(k, \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$

八元数　Cayley　　一对有序的四元数

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\alpha + \beta e, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\mathbb{R})\} \\ &= \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 e + a_5 ie + a_6 je + a_7 ke, \quad a_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

其中 $e^2 = -1$**。**

1.4 Pauli 矩阵与四元数

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

将四元数和 Pauli 矩阵建立线性同构:

$$1=\boldsymbol{I},\quad i=-i\boldsymbol{\sigma}_x,\quad j=-i\boldsymbol{\sigma}_y,\quad k=-i\boldsymbol{\sigma}_z$$

质子、中子——核子　　同位旋

$$|N\rangle=a|p\rangle+b|n\rangle$$

$$|p\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |n\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow|N\rangle=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

引入同位旋算符 $t_i=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_i,\ i=1,2,3$**, 并记为** $\vec{t}$**, 则**

$$[t_i,t_j]=t_it_j-t_jt_i=i\varepsilon_{ijk}t_k$$

总同位旋平方 $t^2=t_1^2+t_2^2+t_3^2$

$|p\rangle,|n\rangle$ **为本征态, 本征值** $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4}$**,**

$$t_3|p\rangle=\frac{1}{2}|p\rangle,\quad t_3|n\rangle=\frac{1}{2}|n\rangle$$

定义升降算符

$$\boldsymbol{\sigma}_+=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\sigma}_1+i\boldsymbol{\sigma}_2),\quad \boldsymbol{\sigma}_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\sigma}_1-i\boldsymbol{\sigma}_2)$$

则

$$\boldsymbol{\sigma}_+|p\rangle=0,\quad \boldsymbol{\sigma}_+|n\rangle=\sqrt{2}|p\rangle,\quad \boldsymbol{\sigma}_-|p\rangle=\sqrt{2}|n\rangle,\quad \boldsymbol{\sigma}_-|n\rangle=0$$

定义

$$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{2}\boldsymbol{I}+t_3=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\sigma}_3)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{Q}|p\rangle=|p\rangle,\quad \boldsymbol{Q}|n\rangle=|n\rangle$$

引入矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\-b^*&a^*\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$**。并引入幺正矩阵**

$$U(\theta_i)=e^{-i\theta_it_i}$$

以及量子态的联系

$$\begin{pmatrix}\psi_{p'}\\\psi_{n'}\end{pmatrix}=e^{-i\theta_it_i}\begin{pmatrix}\psi_p\\\psi_n\end{pmatrix}$$

1.5 Gell-Man 矩阵与八元数

我们构造一系列 3×3 **矩阵** $\lambda_i(i=1,\cdots,8)\in SU(3)$**，满足**

$$\left[\frac{\lambda_i}{2},\frac{\lambda_j}{2}\right]=i\sum_k f_{ijk}\frac{\lambda_k}{2}$$

其中 f_{ijk} **是全反对称结构常数，且给定**

$$f_{123}=1,\quad f_{458}=f_{678}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f_{147}=f_{165}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{376}=\frac{1}{2}$$

λ_i **分别为**

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

引入 $SU(3)$ **幺正矩阵** $U(\theta_i)=e^{-i\theta_i t_i}$**，**$t_i=\frac{1}{2}\lambda_i$

考虑夸克内部空间 $\psi=\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix}$**，则可以考虑量子态的变换为**

$$\psi'=e^{-i\theta_i t_i}\psi$$

1.6 十六元数与 Dirac 方程

Γ Clifford 代数（Dirac 代数）

取单位制使得 $c=\hbar=1$**。考虑自由粒子薛定谔方程，**

$$\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m^2\right)\psi(x)=0,\quad \mu=0,1,2,3$$

Klein-Gordan 方程

$$(\Box^2+m^2)\psi(x)=0,\quad \Box^2=\partial_\mu\partial^\mu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$$

以及

$$\partial_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right),\quad \partial_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)$$

利用 $E^2=p^2+m^2$**，我们不妨假设**

$$E=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m$$

作代换

$$E\to i\frac{\partial}{\partial t},\quad \vec{p}\to -i\nabla$$

并利用 $[\hat{x},\hat{p}]=i$ 得到

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-i\vec{\alpha}\cdot\nabla-\beta m\right)\psi=0$$

左乘一个 $\left(i\dfrac{\partial}{\partial t}+i\vec{\alpha}\cdot\nabla-\beta m\right)$ 得到

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\sum_i\alpha_i^2\partial_i\partial_i+\sum_{i<j}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)\partial_i\partial_j+im\sum_i(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)\partial_i-\beta^2m^2\right)\psi=0$$

为了与 Klein-Gordan 方程一致, 要求

$$\begin{cases}\alpha_1^2=\alpha_2^2=\alpha_3^2=1\\ \beta^2=1\\ \alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0,\quad i\neq j\\ \alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0,\quad i=1,2,3\end{cases}$$

Pauli-Dirac 表示

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\sigma}_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\sigma}_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

于是

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\\vec{\sigma}&0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&-\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$

手征表示

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-\vec{\sigma}&0\\0&\vec{\sigma}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Dirac 方程

$$\left(i\beta\frac{\partial}{\partial t}+i\beta\vec{\alpha}\cdot\nabla-m\right)\psi=0$$

引入 $\gamma^\mu=(\beta,\beta\vec{\alpha})$ 可得

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$$

且我们有

$$(\gamma^0)^2=I,\quad (\gamma^i)^2=-I,i=1,2,3$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu=0,\quad \mu\neq\nu$$

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu},\qquad g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

而且

$$\gamma^0=\beta,\quad (\gamma^0)^\dagger=\gamma^0,\quad (\gamma^i)^\dagger=(\beta\alpha^i)^\dagger=\alpha^i\beta=-\gamma^i,\ i=1,2,3$$

可以一并记为

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

引入

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

则

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = I, \quad \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$$

在 Pauli-Dirac 表示下,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

引入张量

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

考虑满足条件

$$u_i^2 = 1, \quad u_iu_j = -u_ju_i(i \neq j)$$

4 个 u_1, u_2, u_3, u_4 **可以有** 2^n **个生成元**

$$u_i, \quad u_iu_j, \quad u_iu_ju_k, \quad u_iu_ju_ku_t \quad (\gamma_A, A = 1, 2, \cdots, 16)$$

构成数系

$$\Gamma = \{x : x = \sum_{A=1}^{16} x_A\gamma_A, x_A \in \mathbb{R}\}$$

此即 Clifford 代数。
Dirac 矩阵

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma}_1 \\ i\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma}_2 \\ i\boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma}_3 \\ i\boldsymbol{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

1.7 数系的统一描述

数系: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}(\mathbb{R}), \Omega, \Gamma$
$\mathbb{R}$ **的基元:** 1 　　$\mathbb{C}$ **的基元:** $1, i$
$\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ **的基元:** $1, i, j, k$**, 且满足** $k = ij, i^2 = j^2 = -1, ij = -ji$
Ω **的基元:** $1, i, j, k, e, ij, ie, je, ije$**, 且满足** $i^2 = j^2 = e^2 = -1, ij = -ji, ie = -ei, je = -ej$
Γ **的基元:** $1, u_i, u_iu_j, u_iu_ju_k$**, 且满足** $u_i^2 = 1, u_iu_j = -u_ju_i$
推广: 基元为 $1, v_i, v_iv_j, v_iv_jv_k, \cdots$ **(共** 2^n **个) 的代数, 满足**

$$v_i^2 = -1, v_iv_j = -v_jv_i$$

令 $n = 4, u_i = iv_i$ **即得到 Clifford 代数。**

2 Hilbert 空间

2.1 Hilbert 空间的定义

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 是一个复(实)数域上的线性空间。

2.1.1 线性空间

元素 $x, y, z, \cdots$(称为矢量) 的集合 $\mathscr{V}$ 称为复线性空间, 若
(1) 加法运算 (vector addition): $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \mapsto \mathscr{V}$
对于 $\forall x, y \in \mathscr{V}$, 存在唯一的矢量 $x + y \in \mathscr{V}$, 称为 x, y 之和, 具有如下性质:
(a) 交换律:$x + y = y + x$
(b) 结合律:$x + (y + z) = (x + y) + z$
(c) 零矢量: 存在唯一矢量 $0 \in \mathscr{V}$ 使得 $\forall x \in \mathscr{V}, x + 0 = x$
(d) 反矢量: 对于 $\forall x$, 存在唯一矢量 (记为 $-x$), 使得 $x + (-x) = 0$

(2) 数乘运算 (scalar multiplication): $\mathbb{C} \times \mathscr{V} \mapsto \mathscr{V}$
对于 $\forall x \in \mathscr{V}, \forall \alpha \in \mathbb{C}$($\alpha$ 称为标量), 存在唯一的矢量 $\alpha x \in \mathscr{V}$, 满足
(a) 结合律:$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
(b) 分配律:$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(c) 分配律:$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

矢量的线性相关与线性无关
令 $\mathscr{V}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,
(1) 矢量 x 称为矢量 $x_1, \cdots, x_k$ 的线性组合, 如果存在标量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使得 $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$.
(2) 属于 $\mathscr{V}$ 的矢量 $x_1, \cdots, x_k$ 称为线性相关, 如果存在不全为 0 的标量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \in \mathscr{V}, \quad \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \neq 0$$

(3) 如果上式只在 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ 时成立, 则称矢量 $x_1, \cdots, x_k$线性无关.
(4) 由 $\mathscr{V}$ 内无穷个矢量构成的集合, 如果其中任意有限个矢量都线性无关, 则称该集合内无穷个矢量都线性无关.
(5) 设 $\mathscr{A} \in \mathscr{V}$, 我们也称集合 $\mathscr{A}$ 是线性无关的, 若 $\forall x \in \mathscr{A}$, 都有 x 不等于任意 $A \backslash x$ 内矢量的线性组合. 注意: 线性相关、线性无关的概念依赖于标量场。

线性空间的维数
线性空间 $\mathscr{V}$ 为 n 维, 如果它有一组 n 个线性无关的矢量, 而每一组 $n+1$ 个矢量总线性相关。若对于任意正整数 k, 在 $\mathscr{V}$ 中总能找到 k 个线性无关的矢量, 则 $\mathscr{V}$ 为无穷维。

2.1.2 内积空间

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 是一个内积空间。复线性空间 $\mathscr{V}$ 上的内积(innerproduct) $\langle x|\rangle y$
对 $\forall x, y \in \mathscr{V}$, 存在唯一的复数, 记为 $\langle x|y\rangle$, 且 $\langle x|y\rangle : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \mapsto \mathbb{C}$ 具有以下性质:
(a) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$

(b) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha^*\langle x|y\rangle, \quad \forall\alpha \in \mathbb{C}$
(c) $\langle x_1 + x_2|y\rangle = \langle x_1|y\rangle + \langle x_2|y\rangle$
(d) $\langle x|x\rangle \geq 0, \qquad \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Schwarz 不等式

对于复内积空间 $\mathscr{V}$ 内的任意两个矢量 x, y，

$$|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$$

Schwarz 不等式的推论

三角形两边之和大于第三边:

$$\langle x+y|x+y\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x|x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y|y\rangle^{\frac{1}{2}}$$

平方可积函数空间 $L^2(a,b)$

$$L^2(a,b) = \left\{x(t) : a \leq t \leq b, \int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t\textbf{存在}\right\}$$

内积定义为

$$\langle x|y\rangle = \int_a^b x^*(t)y(t)\mathrm{d}t$$

2.1.3 完备的度量空间

Hilbert 空间 $\mathscr{V}$ 是完备的内积空间.

度量空间 (metric space)

元素（称为点）x, y, z 的集合 $\mathscr{M}$ 称为度量空间(距离空间)，如果对于 $\forall x, y \in \mathscr{M}$，存在与它们相联系的唯一一个实数 $d(x,y), d : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \mapsto \mathbb{R}$ 满足
(a) $d(x,y) = d(y,x)$
(b) $d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ **(三角形不等式)**
函数 d 称为度量函数或距离函数，$d(x,y)$ 称为 x, y 之间的距离。

度量空间中序列的收敛

$\mathscr{M}$ 为度量空间，若对任意正整数 k，$x_k \in \mathscr{M}$，若存在 $x \in \mathscr{M}, \forall\varepsilon > 0$，存在指标 N 使得 $\forall k > N$，均有

$$d(x_k, x) \leq \varepsilon$$

则称度量空间内的点列 $\{x_k\}$收敛到 x，即 $x_k \to x$，或 $\{x_k\}$ 有极限x，记为

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x$$

Cauchy 序列

若 $\forall\varepsilon > 0$，存在 N，使得 $\forall m \in N, p \in N$，

$$d(x_m, x_p) \leq \varepsilon$$

则称序列 $\{x_k\}$ 是Cauchy 序列(基本序列), 记为

$$\lim_{m,p\to\infty} d(x_m, x_p) = 0$$

完备

如果度量空间 $\mathscr{M}$ 内的点构成的每一个 Cauchy 序列都在 $\mathscr{M}$ 内收敛到极限, 则称 $\mathscr{M}$完备。

2.1.4 可分性

Hilbert 空间分为可分的 Hilbert 空间和不可分的 Hilbert 空间。
我们一般只讨论可分的 Hilbert 空间。

闭包

$\mathscr{H}$ 为一度量空间, $S \subseteq \mathscr{H}$, S(在 $\mathscr{H}$ 内) 的闭包是由 S 内的点所能构造的所有点列在 $\mathscr{H}$ 内的极限的集合, 记为 $\bar{S}$ 或 $\operatorname{cl} S$.

闭合的子空间

令 U 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 内的矢量集, $U \subseteq \mathscr{H}$, 由 U 内取出的矢量的有限线性组合的全体构成 U 所张成的子空间, 记为 $S(U)$, 它的闭包 $\bar{S}(U)$ 称为 U 所张成的闭合子空间。

生成子集

如果 $U = \{f_1, \cdots, f_n, \cdots\} \subseteq \mathscr{H}$ 张成的闭合子空间 $\bar{S}(U)$ 与 $\mathscr{H}$ 重合, 我们就说 U 是 $\mathscr{H}$ 的生成子集。

可分的 Hilbert 空间

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 是可分的, 如果它含有可数的生成子集 U。

2.2 Hilbert 空间的几何

正交、Gram-Schmidt 正交化、正交归一基

正交 (orthogonal) 的定义

$\mathscr{H}$ 为一内积空间, 对 $\forall x, y \in \mathscr{H}$, 若 $\langle x|y\rangle = 0$, 则称 x, y正交(垂直).
两两正交的矢量集合称为正交集. 若其中所有矢量均不等于零矢量, 则为真正交集。

赋范线性空间 $\mathscr{N}$(normed space) 的定义

赋范线性空间 $\mathscr{N}$(normed space) 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 且对 $\forall x \in \mathscr{N}$ 定义了实值函数 $\|x\|$(称为 x 的范数), $\|\cdot\| : \mathscr{N} \mapsto \mathbb{R}$ 满足以下性质:
(1) (i) $\|x\| \geq 0$;　　(ii)$\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$
(3) $\|x_1 + x_2\| \geq \|x_1\| + \|x_2\|$

两个矢量之间的夹角

x, y 之间的夹角 θ_{xy} 定义为 x, y 所生成的正向半直线间的夹角:

$$\cos\theta_{xy} \equiv \frac{\langle y|x\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

对实内积空间, Schwarz 不等式指出, 上式右端值在 -1 和 1 之间, 所以上式定义的夹角为实数且 $0 \le \theta_{xy} \le \pi$。

正交归一集 (orthogonal set) 的定义

如果正交集内的每一个矢量的范数均为 1, 则称集合是**正交归一**(**规范正交**) 的。
对内积空间 $\mathscr{H}$ 内的集合 $\{x_i\}$,

$$\langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \text{集合}\{x_i\}\text{正交归一的}$$

Pythagorean theorem

若 $x_1, \cdots, x_n$ 是内积空间 $\mathscr{H}$ 内正交矢量组, 那么

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Gram-Schmidt 正交化

令 $\{h_k\}$ 是内积空间 $\mathscr{H}$ 内的有限或无限线性无关集。我们构造正交归一集 $\{e_k\}$, 构造步骤如下:

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}$$

$$g_2 = h_2 - \langle e_1|h_2\rangle e_1; \qquad e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$$

$\cdots\cdots$

$$g_k = h_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle e_j|h_k\rangle e_j; \qquad e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}, \quad k = 2, 3, \cdots$$

Riesz-Fischer 定理

令 $\{\phi_k\}$ 是无穷维可分的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的正交归一集(不一定是基), $\{c_k\}$ 是复数序列, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$ 同时收敛。

定理: 可分的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 总含有一组正交归一的基。

判别正交归一集 $\{e_k\}$ 是可分的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的基的判据

(1) 对于 $\forall f \in \mathscr{H}$, 有 $f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k|f\rangle e_k$

(2) 矢量集 $\{e_k\}$ 是最大的

(3) 在 $\mathscr{H}$ 内只有唯一一个 0 矢量, 它的所有 Fourier 系数均为 0

(4) Parseval 恒等式成立: 对 $\forall f \in \mathscr{H}$,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k|f\rangle$$

平方可积函数空间 $L^2(a,b)$ 上的正交归一基

内积定义为 $\langle x|y\rangle = \int_a^b x^*(t)y(t)\mathrm{d}t$

距离定义为 $d(x,y)=\sqrt{\langle x-y|x-y\rangle}$

令 $\{e_1(t),\cdots,e_n(t)\}$ **是** $L^2(a,b)$ **的正交归一基，即**

$$\int_a^b e_i^*(t)e_j(t)\mathrm{d}t=\delta_{ij}$$

则 $L^2(a,b)$ **内的每个** $x(t)$ **都能表示为 Fourier 级数**

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k e_k(t),\qquad \gamma_k=\int_a^b e_k^*(t)x(t)\mathrm{d}t=\langle e_k|x\rangle$$

其中上式在平均收敛的意义下成立:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|x(t)-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k e_k(t)\right|^2\mathrm{d}t=0$$

三角函数集作为正交归一基

1. **在任何长为** $2L$ **的区间上:**

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}e^{\frac{ik\pi x}{L}}\right\}$$

2. **在任何长为** $2L$ **的区间上:**

$$\frac{1}{\sqrt{2L}},\quad\left\{\frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{k\pi x}{L}\right\},\quad\left\{\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{k\pi x}{L}\right\},\quad j=1,2,\cdots$$

3. **在区间** $0\le x\le L$ **上,**

$$\frac{1}{\sqrt{L}},\quad\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{k\pi x}{L},\quad k=1,2,\cdots$$

4. **在区间** $0\le x\le L$ **上,**

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{k\pi x}{L},\quad k=1,2,\cdots$$

对偶空间

线性泛函 (linear functional) 的定义

设 $\mathscr{V}$ **(矢量的集合)是数域** $\mathbb{F}$ **(标量的集合)上的线性空间，线性泛函(linear form, one-form, covector)**φ **是从线性空间** $\mathscr{V}$ **到数域** $\mathbb{F}$ **的映射,**

$$\varphi:\mathscr{V}\mapsto\mathbb{F},\quad\forall x\in\mathscr{V}\mapsto\alpha\in\mathbb{F}$$

而且满足

$$\forall c_1,c_2\in\mathbb{F},\forall x_1,x_2\in\mathscr{V},\quad\varphi(c_1x_1+c_2x_2)=c_1\varphi(x_1)+c_2\varphi(x_2)=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$$

代数对偶空间 (algebraic dual space) 的定义

设 $\mathscr{V}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。可以证明，全体从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathbb{F}$ 的线性泛函的集合也是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，称为 $\mathscr{V}$ 的**代数对偶空间**，记为 $\mathscr{V}^*$。
代数对偶空间 $\mathscr{V}^*$ 中的元素称为 covectors 或一次形式 (one-forms)。

线性泛函在 x 点连续

称从拓扑矢量空间 $\mathscr{J}$ 到拓扑数域 $\mathbb{K}$ 的线性泛函在 x 点连续，若

$$\varphi : \mathscr{J} \mapsto \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathscr{J} \mapsto \alpha \in \mathbb{K}$$

满足

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K}, \forall x_1, x_2 \in \mathscr{J}, \quad \varphi(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \varphi(x_1) + c_2 \varphi(x_2) = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2$$

且当 $x_n \in \mathscr{J}, \lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathscr{J}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

一个定理

线性泛函的有界性和连续性是等价的。

内积可看成一个连续线性泛函

换一个角度：设 $\mathscr{F}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的内积空间。可以把内积看成一个从内积空间 $\mathscr{F}$ 到数域 $\mathbb{F}$ 的映射：

$$\langle x| : \mathscr{F} \mapsto \mathbb{F}, \quad \forall |y\rangle \in \mathscr{F} \mapsto \langle x|y\rangle \in \mathbb{F}$$

显然满足

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{F}, \forall x_1, x_2 \in \mathscr{F}, \quad \varphi(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \varphi(x_1) + c_2 \varphi(x_2) = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2$$

因此 $\langle x|$ 是一个线性泛函，而且是一个连续线性泛函。

对偶空间 (dual space) 的定义

设 $\mathscr{J}$ 是拓扑数域 (topological field)$\mathbb{K}$ 上的拓扑矢量空间 (topological vector space)，全体从 $\mathscr{J}$ 到 $\mathbb{K}$ 的**连续**线性泛函的集合也是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，称为 $\mathscr{J}$ 的**拓扑对偶空间**(**连续对偶空间**，**对偶空间**)，记为 $\mathscr{J}'$，$\mathscr{J}'$ 是代数对偶空间 $\mathscr{J}^*$ 的一个子空间。

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的对偶空间 $\mathscr{H}'$

由 Riesz-Fischer 定理可知，完备的内积空间的任意一个连续线性泛函均对应唯一的内积。
由全体 $\langle x|$ 的集合构成的空间为完备的内积空间 $\mathscr{H}$ 的**对偶空间**，记为 $\mathscr{H}'$。

左矢 bra 和右矢 ket

Dirac 将 Hilbert 空间中的矢量和其对偶空间中的 covector 分别用不同的符号表示以区分。
用符号 $|\rangle$ 表示 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的矢量，称为**右矢**(ket)，$|\rangle \in \mathscr{H}$，而符号 $\langle|$ 表示对偶空间 $\mathscr{H}'$ 中的 covector，称为**左矢**(bra)，$\langle| \in \mathscr{H}'$。
$\langle|, |\rangle$ 统称 Dirac 符号，都可以用来描述微观系统的量子态。

内积空间的同构

线性空间同态和线性同构

考虑两个线性空间 $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$, 若存在一个保持矢量加法运算和数乘运算不变的线性映射 $T: \mathscr{V}_1 \mapsto \mathscr{V}_2$, 则称映射 T 为线性空间同态(vector space homomorphism)。
若上述线性空间同态是一一映射, 则成为线性同构(linear isomorphism)。

内积空间同构

设 $(\mathscr{H}_1, \langle|\rangle_1), (\mathscr{H}_2, \langle|\rangle_2)$ 是两个内积空间。若存在一个线性同构 $T: \mathscr{H}_1 \mapsto \mathscr{H}_2$ 满足

$$\forall|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathscr{H}_1, \quad \langle T\psi|T\phi\rangle_2 = \langle\psi|\phi\rangle_1$$

则称内积空间 $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ 是同构(isomorphic)的。

一个定理

设 $\mathscr{H}$ 是一个复数域 $\mathscr{C}$ 上的可分的 Hilbert 空间, 则

1. **若 $\mathscr{H}$ 是无穷维的, 则 $\mathscr{H}$ 与 $l^2 \equiv \{(z_1, \cdots, z_n, \cdots) : z_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty\}$ 同构;**
2. **若 $\dim \mathscr{H} = n$, 则 $\mathscr{H}$ 与 $\mathbb{C}^n$ 同构.**

Hilbert 空间中的算符

闭线性算符

算符

$$\hat{O} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$$

注意: 一个算符 $\hat{O}$ 只有明确定义域以及对应关系之后, 才能认为这个算符是完全确定的。
定义域(domain of definition) $D(\hat{O}) \subseteq \mathscr{H}$
值域(range of definition) $R(\hat{O}) \subseteq \mathscr{H}$
即 $\hat{O} : D(\hat{O}) \mapsto R(\hat{O})$
定义域不同的算符被视为不同的算符。

两个特殊算符

零算符: $\hat{0}|\psi\rangle = |0\rangle, \quad D(\hat{0}) = \mathscr{H}$
恒等算符: $\hat{1}|\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad D(\hat{1}) = \mathscr{H}$

闭线性算符的定义

对 $\mathscr{H}$ 上的线性算符 $\hat{L} : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$, 若 $\forall|x_n\rangle \in D(\hat{L}), |x_n\rangle \to |x\rangle \in \mathscr{H}$, 使得

$$n \to \infty, \hat{L}|x_n\rangle \to |y\rangle \in \mathscr{H} \Rightarrow \exists|x\rangle \in D(\hat{L}), \hat{L}|x\rangle = |y\rangle$$

此时称 $\hat{L}$ 是闭算符。

算符的连续性与有界性

算符的连续性

算符的连续性就是映射的连续性。Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 内的序列 $\{|\psi_n\rangle\}$，算符 $\hat{L}:\mathscr{H}\mapsto\mathscr{H}$ 若满足

$$\|\psi_n-\psi\|\to 0\Rightarrow\|\hat{\psi}_n-\hat{\psi}\|\to 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|\psi_n\rangle=|\psi\rangle\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\hat{L}|\psi_n\rangle=\hat{L}|\psi\rangle$$

则称算符 $\hat{L}$ 在 $|\psi\rangle$**连续**。

有界算符 (bounded operator)

若存在常数 $M\geq 0$ 使得

$$\forall|\psi\rangle\in D(\hat{L}),\quad\|\hat{L}\psi\|\leq M\|\psi\|$$

则称算符 $\hat{L}$ 为**有界算符 (bounded operator)**，其中 M 的下确界称为算符 $\hat{L}$ 的**模（norm）**，记为

$$\|\hat{L}\|\equiv\sup_{\|\psi\|}\|\hat{L}\psi\|$$

对于线性算符，连续算符一定有界，有界算符一定连续。

紧算符

若对 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的每一个有界序列 $\{|\psi_n\rangle\}$，序列 $\{\hat{L}|\psi_n\rangle\}$ 都有一个收敛的子序列，则称算符 $\hat{L}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的**紧算符 (compact operator)**。

自伴算符与对称算符

伴算符（adjoint operator）

设 $\hat{A}$ 是定义在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的线性算符，若 $D(\hat{A})\subseteq\mathscr{H}$，且 $\mathrm{cl}\,D(\hat{A})=\mathscr{H}$，即 $D(\hat{A})$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个**稠密子集 (dense subset)**，则可按如下方式定义算符：
$\forall|u\rangle\in D(\hat{A})$，如果对给定的 $|v\rangle\in\mathscr{H},\exists|w\rangle\in\mathscr{H}$，使得

$$\langle w|u\rangle=\langle v|\hat{A}|u\rangle$$

$|u\rangle$ 跑遍 $D(\hat{A})$，记能找到 $|w\rangle$ 的全体 $|v\rangle$ 的集合为 D^*，并定义算符

$$\begin{cases}\hat{A}^\dagger|v\rangle\equiv|w\rangle\\ D(\hat{A}^\dagger)=D^*\end{cases}$$

则称 $\hat{A}^\dagger$ 为 A 的**伴算符**。

对称算符 (symmetric operator)

若对 $\forall|\psi\rangle,|\phi\rangle\in D(\hat{A})$，均有

$$\langle\hat{A}\psi|\phi\rangle=\langle\psi|\hat{A}\phi\rangle$$

幺正算符和正交变换

幺正算符

若 $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$，则称 $\hat{U}$ 为**幺正算符**。

一个定理

若线性空间 $\mathscr{H}$ 有两组正交归一基 $\{|\psi_i\rangle\}, \{|\phi_i\rangle\}$，则一定存在一个幺正算符 $\hat{U}$ 使得

$$|\psi_i\rangle = \hat{U}|\phi_i\rangle, \forall i$$

正交变换 (orthogonal transformation)

设 $\mathscr{H}$ 是一个内积空间，若线性变换 $T : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H}$ 保持内积不变，即 $\forall |u\rangle, |v\rangle \in \mathscr{H}$，

$$\langle u|v\rangle = \langle Tu|Tv\rangle$$

则称 T 为**正交变换**。

正交投影

投影算符 (projection operator)

将相同的归一的基右矢和基左矢写在一起构成算符

$$\begin{cases} \hat{P}_i \equiv |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \\ \hat{D}(\hat{P}_i) = \mathscr{H} \end{cases}$$

该算符称为投向 $|\psi\rangle$ 所张成的子空间的**投影算符**。
对归一的 $|\psi\rangle$，$\hat{P}_i$ 满足幂等性质

$$\hat{P}_i^2 = \hat{P}_i$$

考虑投向整个 Hilbert 空间的投影，那么正交归一基 $|\psi_i\rangle$ 有完备性质

$$\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \hat{1}$$

可分空间的投影定理

令 $\mathscr{H}$ 是可分空间，M 是 $\mathscr{H}$ 内的线性闭子空间，则 M 有正交归一基 e_k，$\mathscr{H}$ 内的每一个矢量 f 总可以用仅一种方法分解为 M 内的矢量 g 和 $M^\perp$ 内的矢量 w 之和。g 是 M 内最接近 f 的唯一矢量，且可写为

$$g = \sum_k \langle e_k|f\rangle|e_k\rangle$$

本征值问题与算符的谱

本征值问题

本征值和本征矢量

对 Hilbert 空间的算符 $\hat{A}$，若有**非零**$|\psi\rangle$ 满足

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

其中 λ 为复数，则称 λ 为**本征值**，相应的非零矢量 $|\psi\rangle$ 称为本征值 λ 相应的本征矢量。
通常把算符 $\hat{A}$ 相应的本征值用相应的小写字母标记，记为 a，相应本征矢量写为 $|a\rangle$：

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$$

一个定理
若 0 是算符 $\hat{A}$ 的本征值，则 $\hat{A}$ 没有逆算符。
算符 $\hat{A}$ 的谱
$\mathscr{H}$ 是一个复数域上的可分的 Hilbert 空间，$\hat{A}$ 是其上的一个线性算符，$D(\hat{A}) \subseteq \mathscr{H}, R(\hat{A}) \subseteq \mathscr{H}$，考虑算符

$$\hat{A}_\lambda = \hat{A} - \lambda\hat{1}$$

不难看出 $D(\hat{A}_\lambda) = D(\hat{A})$。
所有使 $R(\hat{A}_\lambda)$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密，且 $\hat{A}_\lambda$ 是单射，即如果值域限制于其像的集合那么 $\hat{A}_\lambda^{-1}$ 存在，且 $\hat{A}_\lambda^{-1}$ 有界的复数 λ 构成的集合称为 $\hat{A}$ 的**预解集 (resolvent set)**，记为 $\rho(\hat{A})$。即

$$\rho(\hat{A}) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, R(\hat{A}_\lambda)\text{在}\mathscr{H}\text{中稠密}\hat{A}_\lambda^{-1}\text{存在且有界}\}$$

$\rho(\hat{A})$ 在 $\mathbb{C}$ 中的补集称为 $\hat{A}$ 的**谱**，记为 $\sigma(\hat{A})$：

$$\sigma(\hat{A}) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\text{且}\lambda \notin \rho(\hat{A})\}$$

而谱又可以分为三部分：

$$\sigma(\hat{A}) = P_\sigma(\hat{A}) \cup C_\sigma(\hat{A}) \cup R_\sigma(\hat{A})$$

其中**点谱**

$$P_\sigma(\hat{A}) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \hat{A}_\lambda^{-1}\text{不存在}\}$$

连续谱

$$R_\sigma(\hat{A}) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \hat{A}_\lambda^{-1}\text{存在且}D(\hat{A}_\lambda^{-1})\text{在}\mathscr{H}\text{中稠密，但}\hat{A}_\lambda^{-1}\text{无界}\}$$

剩余谱

$$R_\sigma(\hat{A}) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \hat{A}_\lambda^{-1}\text{存在但}D(\hat{A}_\lambda^{-1})\text{在}\mathscr{H}\text{中不稠密}\}$$

线性自伴算符谱的性质
设 $\hat{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 内的线性自伴算符，那么

$$\sigma(\hat{A}) \subseteq \mathbb{R}$$

即线性自伴算符的谱一定是实数，且

$$R_\sigma(\hat{A}) = \phi$$

设 $\hat{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的自伴紧算符，那么 $C_\sigma(\hat{A})$ 内不可能含有非零实数；
$\hat{A}$ 的所有本征值构成一个至多可数的实数集，0 是该集合位移可能的聚点；
非零本征值对应的本征空间是有限维的。

算符的函数

利用幂级数定义算符的函数

若

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m z^m,\quad |z|<\infty$$

那么可以定义

$$f(\hat{A})\equiv\sum_{m=0}^{\infty}c_m\hat{A}^m$$

在该幂级数在全复平面收敛时，可利用该定义方式。

利用线性自伴算符的本征值定义算符的函数

对于线性自伴算符 $\hat{A}$，若 $\hat{A}|a\rangle=a|a\rangle$，则可定义

$$f(\hat{A})|a\rangle\equiv f(a)|a\rangle$$

直积空间

直积空间的定义

直积是由两个已知的复线性空间

$$\mathscr{H}_1=\{|a\rangle,|b\rangle,\cdots\},\quad \mathscr{H}_2=\{|\psi\rangle,|\phi\rangle,\cdots\}$$

构建一个更大的复线性空间的方法之一。
直积空间 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 的运算规则如下:
双矢量: $\forall|a\rangle\in\mathscr{H}_1,|\psi\rangle\in\mathscr{H}_2$，则

$$|a\rangle\otimes|\psi\rangle\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$$

称为双矢量，是由 $\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2$ 中各取一个矢量不计先后地放在一起。
加法: $\forall|a\rangle|b\rangle\in\mathscr{H}_1,\forall|\psi\rangle|\phi\rangle\in\mathscr{H}_2$，

$$|a\rangle\otimes|\psi\rangle+|b\rangle\otimes|\phi\rangle\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$$

是直积空间中的一个新矢量，但一般不能表示为双矢量。
零元素:

$$|0\rangle\equiv|0\rangle_1\otimes|0\rangle_2$$

其中 $|0\rangle_i(i=1,2)$ 是 $\mathscr{H}_i$ 中的零矢量。
数乘: $\forall\alpha\in\mathbb{C},\forall|a\rangle\in\mathscr{H}_1,|\phi\rangle\in\mathscr{H}_2$，

$$\alpha|a\rangle\otimes|\psi\rangle=|\alpha a\rangle\otimes|\psi\rangle=|a\rangle\otimes|\alpha\psi\rangle\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$$

内积: $\forall|a\rangle,|b\rangle\in\mathscr{H}_1\forall|\psi\rangle,|\phi\rangle\in\mathscr{H}_2$，双矢量 $|a\rangle\otimes|\phi\rangle,|b\rangle\otimes|\psi\rangle$ 的内积定义为

$$\langle a|b\rangle\cdot\langle\psi|\phi\rangle\in\mathbb{C}$$

分配律: $\forall|a\rangle,|b\rangle\in\mathscr{H}_1\forall|\psi\rangle,|\phi\rangle\in\mathscr{H}_2$，

$$(|a\rangle+|b\rangle)\otimes|\psi\rangle=|a\rangle\otimes|\psi\rangle+|b\rangle\otimes|\psi\rangle\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$$

$$|a\rangle\otimes(|\psi\rangle+|\phi\rangle)=|a\rangle\otimes|\psi\rangle+|a\rangle\otimes|\phi\rangle\in\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$$

所有满足上述运算规则的双矢量的任意线性叠加构成一个新的复内积空间，称为 $\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2$ 的直积空间，记为 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$。
对于维数有

$$\dim\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2=\dim\mathscr{H}_1\cdots\dim\mathscr{H}_2$$

直积空间中的算符

设 $\mathscr{H}_1$ 中的算符为 $\hat{A},\hat{B},\cdots$，$\mathscr{H}_2$ 中的算符为 $\Psi,\Phi,\cdots$，则 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 中的算符 $\hat{A}\otimes\hat{\Psi}$ 定义为

$$(\hat{A}\otimes\hat{\Psi})|a\rangle|\psi\rangle\equiv\hat{A}|a\rangle\hat{\Psi}|\psi\rangle$$

直积空间中的算符运算关系

$$\hat{A}\otimes\hat{\Psi}+\hat{B}\otimes\hat{\Psi}\equiv(\hat{A}+\hat{B})\otimes\hat{\Psi}$$

$$(\hat{A}\otimes\hat{\Psi})(\hat{B}\otimes\hat{\Phi})\equiv(\hat{A}\hat{B})\otimes(\hat{\Psi}\hat{\Phi})$$

物理学中:
单粒子态空间直积得到多粒子态空间。
核子的两种状态(同位旋):

$$|p\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |n\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

自旋也有两种状态:

$$|\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

那么组合起来可用直积表示:

$$|p\uparrow\rangle=|p\rangle\otimes|\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

即

$$|p\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad |p\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad |n\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad |n\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

量子力学与 Hilbert 空间

量子力学的对应:
微观体系的量子态 $\leftrightarrow$ 归一化的矢量以及 δ 函数
可观测量 $\leftrightarrow$ 线性自伴算符
可观测量的测量值 $\leftrightarrow$ 线性自伴算符的谱

3 广义函数

3.1 广义函数的概念

简单来说：广义函数是定义在一类“性质很好的”经典普通函数构成的拓扑线性空间上的连续线性泛函。

检验函数空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

经典普通函数的支集 (support)

$\phi(\boldsymbol{x}) \equiv \phi(x_1, \cdots, x_n)$ **的支集是使得** $\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ **的点全体构成的点集** Ω **的闭包，记为**

$$\operatorname{supp}(\phi) = \bar{\Omega}, \quad \Omega = \{(x_1, \cdots, x_n) : \phi(x_1, \cdots, x_n) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

检验函数

检验函数$\phi(\boldsymbol{x})$ **是定义于** $\mathbb{R}^n$ **的无穷可微且有有限支集的函数。**
无穷可微：各种次序的任意阶偏导存在
有限支集：在一定有界区域内恒为 0
举例： $\mathbb{R}^n$ **上的球对称检验函数**

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1}}, & \|\boldsymbol{x}\|^2 < 1 \\ 0, & \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 1 \end{cases}$$

检验函数空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

由 $\mathbb{R}^n$ **上全部检验函数组成的集合记为** $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$**。**
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ **是复线性空间，因为**

$$\forall \phi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \forall a, b \in \mathbb{C}, a\phi + b\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

若 a, b **仅取实数，则** $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ **是实线性空间。**

偏导数和微分算符的简明记号

$l_1, \cdots, l_n$ **为非负整数，则称**

$$l \equiv (l_1, \cdots, l_n)$$

为n **维多重指标。定义**

$$|l| \equiv l_1 + \cdots + l_n, \quad D^l \equiv \frac{\partial^{|l|}}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}$$

l **的某一分量** $l_m = 0$ **是指不含对** x_m **的微分运算。**
n **个自变量的任意** p **阶线性微分算符可写为**

$$\hat{L} = \sum_{|l| \leq p} a_l(\boldsymbol{x}) D^l$$

其中

$$a_l(\boldsymbol{x}) \equiv a_{(l_1, \cdots, l_n)}(x_1, \cdots, x_n)$$

为 $(x_1, \cdots, x_n)$ **的任意函数。**

检验函数空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 内的收敛性

对序列 $\{\phi_m(\boldsymbol{x})\}, \phi_m(\boldsymbol{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), m = 1, \cdots$，若

1. **存在一个共同的有界区域，在有界区域之外，所有 $\phi_m(x)$ 值为 0，亦即所有 $\phi_m(x)$ 的支集一定包含于一个足够大的球域内。**
2. **存在 $\phi_0(x)$，对每一个 n 维多重指标 l，**

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} |D^l\phi_m(\boldsymbol{x}) - D^l\phi_0(\boldsymbol{x})| \to 0, \quad m \to \infty$$

则称序列 $\{\phi_m(\boldsymbol{x})\}$收敛于$\phi_0(\boldsymbol{x})$，记为

$$\lim_{m\to\infty} \phi_m = \phi_0$$

可以证明 $\phi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，即 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 完备。

广义函数的定义

实 (复) 线性泛函

实 (复) 线性泛函是从线性空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 的线性映射。
映射的像记为 $\langle f, \phi\rangle$，$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle f, \phi\rangle \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
线性要求

$$\langle f, a\phi + b\psi\rangle = a\langle f, \phi\rangle + b\langle f, \psi\rangle, \quad \forall \phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \forall a, b \in \mathbb{R}$$

线性泛函的连续性

若 $\phi_m \to \phi_0, \langle f, \phi_m\rangle \to \langle f, \phi_0\rangle$，则称线性泛函 $\langle f, \phi\rangle$ 在 ϕ_0 是连续的。
这里 $\lim_{m\to\infty}\phi_m = \phi_0$ 依赖于 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中收敛性的定义，而 $\langle f, \phi_m\rangle \to \langle f, \phi_0\rangle$ 是普通实 (复) 数序列的收敛。

广义函数的定义

检验函数空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函称为广义函数。
由所有广义函数所组成的集合构成一个线性空间，是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑对偶空间。

一维 δ 函数

对 $\forall\xi \in \text{supp}(\phi) \subset \mathbb{R}$，定义

$$\langle\delta(x-\xi), \phi\rangle \equiv \phi(\xi), \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$$

则 $\delta(x-\xi) : C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \mapsto \mathbb{R}$ 是一个广义函数。

δ 函数的微商

$\forall$ 多重指标 l,$\forall\boldsymbol{\xi} \in \text{supp}(\phi) \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\langle\delta^{(l)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}), \phi\rangle \equiv (-1)^{|l|}(D^l\phi)(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

则 $\delta^{(l)}(x-\xi) : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$ 是一个广义函数。

正则广义函数与奇异广义函数

局部可积函数

对于 $\mathbb{R}^n$ 内任意有界区域 Ω，局部可积函数是指

$$\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

而局部可积函数 $f(x)$ 对应一个广义函数

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

因此广义函数是局部可积函数的推广。凡是将一个局部可积函数看成广义函数时均为按照上式定义。
但并非所有普通经典函数均可看作广义函数，例如不可测函数就不可看作广义函数。

可测函数

设 f 是定义于可测集 E 上的实函数，若 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{\boldsymbol{x} : f(\boldsymbol{x}) < a\} \subseteq E$ 均为可测集，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 为可测函数。
亦即：任何开区间的逆像均为可测集的映射称为可测函数。

可测集

若存在一串递降的开集 $\{U_n\}$ 即 $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$，且同时存在一串递增的闭集 $\{F_n\}$ 即 $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$，使得

$$\forall n, \quad F_n \subset E \subset U_n$$

且 $U_n - F_n$ 的测度趋于零，则称 E 为可测集。

开集的测度

用边长越来越小的正方形覆盖开集，数开集的个数，从而可以定义开集的测度。
测度满足性质：可数个互不相交的可测集的测度为这些可测集的测度之和。

正则广义函数与奇异广义函数

若 $f(x)$ 局部可积，则称由形式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \cdots, x_n)\phi(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

定义的广义函数是正则的。正则广义函数以外的广义函数统称为奇异的。

广义函数的局部性质

不能在孤立的点处指定广义函数的值，但可以说广义函数 f 在 x_0 的某个邻域 U 内为 0，即

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{supp}(\phi) \subset U, \quad \langle f, \phi \rangle = 0$$

若广义函数在某开集 G 内每一点的邻域内均为 0，则称此广义函数 f 在 G 上为 0。
对任意两个广义函数可作局部比较。若 f, g 的差 $f - g$ 在某开域 G 内为 0，则称 f, g 在此开域内相等。

广义函数的质点 (essential point)

若广义函数 f 在 x_0 的任一邻域内均不为 0，则称 x_0 为 f 的质点。

广义函数的支集

广义函数 f 的全部质点的集合称为支集。
对于 $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}i)$，支集为 $\boldsymbol{x} = \xi$。

3.2 广义函数的基本运算

线性运算(加减和数乘)

两个广义函数 f_1, f_2 的线性组合 $f=\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2$ 的定义为:

$$\forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad \langle \alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2, \phi\rangle \equiv \alpha_1\langle f_1, \phi\rangle+\alpha_2\langle f_2, \phi\rangle$$

广义函数与经典无穷可微函数的乘积

若 $a(\boldsymbol{x})$ 是经典无穷可微函数，$\phi(\boldsymbol{x}) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，则 $a(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$。
对局部可积函数 $f(\boldsymbol{x})$，

$$\langle a f, \phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n} a(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \phi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d} \boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})[a(\boldsymbol{x}) \phi(\boldsymbol{x})] \mathrm{d} \boldsymbol{x}=\langle f, a \phi\rangle$$

由此定义

$$\langle a f, \phi\rangle \equiv\langle f, a \phi\rangle$$

复合函数

若经典函数 $y=T(x)$ 是一一映射，且它和它的反函数 $x=T^{-1}(y)$ 均为无穷可微函数，且 $T(\pm\infty)=\infty$，则定义广义函数 $f(T(x))$ 为

$$\langle f(T(x)), \phi(x)\rangle \equiv\langle f(x),\left|\frac{\mathrm{d} T^{-1}(x)}{\mathrm{d} x}\right| \phi(T^{-1}(x))\rangle, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^1)$$

或

$$\langle f(T^{-1}(x)), \phi(x)\rangle \equiv\langle f(x),\left|\frac{\mathrm{d} T(x)}{\mathrm{d} x}\right| \phi(T(x))\rangle, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^1)$$

对于 f 是局部可积的情况，

$$\langle f(T(x)), \phi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(T(x)) \phi(x) \mathrm{d} x \xlongequal{y=T(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \phi(T^{-1}(y)) \frac{\mathrm{d} T^{-1}(y)}{\mathrm{d} y} \mathrm{d} y=\langle f, \frac{\mathrm{d} T^{-1}(y)}{\mathrm{d} y} \phi(T^{-1}(y))\rangle$$

广义函数 $\delta(T(x)), x \in \mathbb{R}$

对于一维空间广义函数 $\delta(x)$，若有连续变换 $y=T(x)$ 且 $T(x)=0$ 只有单根 x_n($T(x_n)=0, T'(x_n) \neq 0$)，则可定义广义函数 $\delta(T(x))$

$$\langle\delta(T(x)), \phi(x)\rangle \equiv \sum_n \frac{\phi(x_n)}{|T'(x_n)|}, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^1)$$

广义函数 $\delta(T(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

对于 n 维的情况，同样可以定义

$$\langle f(T(\boldsymbol{x})), \phi(\boldsymbol{x})\rangle=\langle f(T(\boldsymbol{x})),|\operatorname{det} J(T^{-1})| \phi(T^{-1})(\boldsymbol{x})\rangle, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

其中 $\operatorname{det} J(T^{-1})$ 为 T^{-1} 的雅可比行列式。
例如平移变换 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，

$$\langle f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}), \phi\rangle=\langle f(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})\rangle$$

以及尺度缩放变换 $T(\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{x},\alpha\in\mathbb{R}$，

$$\langle f(\alpha\boldsymbol{x}),\phi\rangle=\langle f(\boldsymbol{x}),\phi(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha})\frac{1}{|\alpha^n|}\rangle$$

对于 δ 函数，

$$\langle\delta(\alpha\boldsymbol{x}),\phi\rangle=\frac{1}{|\alpha^n|}\langle\delta(\boldsymbol{x}),\phi(\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha})\rangle=\frac{1}{|\alpha^n|}\phi(\boldsymbol{0})$$

正交曲面坐标系中的 δ 函数

令 $u_1,\cdots,u_n$ 为通过变换规则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 由 $x_1,\cdots,x_n$ 得到的新的坐标，即

$$u_i=u_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n$$

若 x 关于 u 的雅可比行列式 J 处处正定，那么

$$\langle f,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\boldsymbol{u}-space}f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}))\phi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}))J\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\int_{\boldsymbol{u}-space}\tilde{f}(\boldsymbol{u})\tilde{\phi}(\boldsymbol{u})J\mathrm{d}\boldsymbol{u},\quad\forall\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

特别地，对于 δ 函数，

$$f(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\quad\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{u}})=\delta(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{x}')=\frac{\delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{J}$$

广义函数的微商

定义

$$\langle\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\phi(x)\rangle\equiv-\langle f(x),\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\rangle,\quad\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$$

n 维广义函数的偏导定义

$$\langle\frac{\partial f}{\partial x_i},\phi(\boldsymbol{x})\rangle\equiv-\langle f(\boldsymbol{x}),\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\rangle,\quad\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle D^lf(\boldsymbol{x}),\phi(\boldsymbol{x})\rangle\equiv(-1)^{|l|}\langle f(\boldsymbol{x}),D^l\phi(\boldsymbol{x})\rangle,\quad\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

间断函数的广义微商

考虑分两段连续可微，具有第一类间断点 x_0 的函数

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x<x_0\\ f_2(x), & x>x_0\end{cases}$$

其中 $f_1(x),f_2(x)$ 在各自定义域内连续可微。
因此

$$\begin{aligned}\langle\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\phi\rangle&=-\langle f,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\rangle\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\&=-\int_{-\infty}^{x_0}f_1(x)\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{+\infty}f_2(x)\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\&=-f_1(x)\phi(x)|_{x=-\infty}^{x=x_0}+\int_{-\infty}^{x_0}\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\phi(x)\mathrm{d}x-f_2(x)\phi(x)|_{x=x_0}^{x=+\infty}+\int_{x_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\phi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -f_1(x_1)\phi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\phi(x)\mathrm{d}x + f_2(x_0)\phi(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= [f_2(x_0) - f_1(x_0)]\phi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f_c'(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= h\phi(x_0) + \langle f_c', \phi\rangle \\
&= \langle f_c' + h\delta(x), \phi\rangle
\end{aligned}
$$

其中

$$
h = f_2(x_0) - f_1(x_0), \quad f_c'(x) = \begin{cases} f_1'(x), & x < x_0 \\ f_2'(x), & x > x_0 \end{cases}
$$

例如广义函数 $\ln|x|$ 的微商

$$
\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}
$$

广义函数的积分

对于广义函数 f，若存在广义函数 g 使得

$$
\langle \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \quad \forall\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)
$$

则称 g 为 f 的不定积分，记为

$$
g(x) = \int f(x)\mathrm{d}x
$$

考虑复变函数

$$
\ln(x + i0) = \ln|x| + i\pi H(-x), \quad \ln(x - i0) = \ln|x| - i\pi H(-x)
$$

因此

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x + i0) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x - i0) = \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)
$$

广义函数及其运算可由普通局部可积函数及其运算扩充而来

1. **广义函数是普通局部可积函数的扩充。局部可积函数与正则型广义函数一一对应。**
2. **对广义函数的运算常被转移到检验函数上，但必须遵循原则：与局部可积函数的运算不发生矛盾。**

广义函数序列的极限

若一个广义函数序列 $f_n(\boldsymbol{x}), n = 1, 2, \cdots$ 和一个广义函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对 $\forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 都有

$$
\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, \phi) \in \mathbb{N}, \mathrm{s.t.}\, n > N, \quad |\langle f_n(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\rangle - \langle f(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\rangle| < \varepsilon
$$

即

$$
\lim_{n\to\infty} \langle f_n(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\rangle = \langle f(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})\rangle
$$

则称广义函数 $f(\boldsymbol{x})$ 是广义函数序列 $\{f_n(\boldsymbol{x})\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限，记为

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})
$$

3.3 缓增广义函数和 Fourier 变换

以下约定: 检验函数 ϕ 的函数值为复数。
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$**: 由所有复值、有有限支集、无穷可微函数 $\phi(x)$ 组成的集合。**

一元速降型检验函数及其 Fourier 变换

一元速降型检验函数

设 $\phi(x)$ 为单实变量复值函数, $x \in \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{C}$, 若下列条件成立:

1. **$\phi(x)$ 无穷可微**
2. **$\phi(x)$ 及其各阶导数当 $|x| \to +\infty$ 时比 x 的任意负幂次都更快趋于零, 即**

$$\forall j, l \in \mathbb{N}, \quad \lim_{|x| \to +\infty} \left| x^j \frac{\mathrm{d}^l \phi}{\mathrm{d} x^l} \right| = 0$$

则称 $\phi(x)$ 为速降型检验函数。

一元速降型检验函数空间

由所有速降型检验函数 $\phi(x)$ 构成一个复数域上的线性空间, 称为速降型检验函数空间 (the Schwarz space), 记为 $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$。
$\forall j, l \in N, x^j \dfrac{\mathrm{d}^l \phi}{\mathrm{d} x^l} \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$。
且 $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$。

$C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$ 内的零序列

对 $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$ 内的序列 $\{\phi_m(x)\}, \phi_m \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$, 若

$$\forall j, l \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \to \infty} \max_{-\infty < x < +\infty} \left| x^j \frac{\mathrm{d}^l \phi_m}{\mathrm{d} x^l} \right| = 0$$

则称序列 $\{\phi_m(x)\}$ 是 $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$ 中的零序列。
可以证明: $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ 在 $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$ 内稠密, $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^1)$ 内稠密。

一元速降型检验函数的 Fourier 变换

$\forall \phi(x) \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$, 由于 $|\phi(x)|$ 的值在 $|x| \to +\infty$ 时速降, 因此 $\phi(x)$ 的经典 Fourier 变换存在, 记

$$\Phi(k) = \mathscr{F}\{\phi(x)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-ikx} \mathrm{d} x$$

可以证明 $\Phi(k) \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^1)$, 且 $\forall j, l \in \mathbb{N}$, 若

$$\lim_{m \to \infty} \max_{-\infty < x < +\infty} \left| x^j \frac{\mathrm{d}^l \phi_m(x)}{\mathrm{d} x^l} \right| = 0$$

则

$$\lim_{m \to \infty} \max_{-\infty < x < +\infty} \left| k^j \frac{\mathrm{d}^l \Phi_m(k)}{\mathrm{d} k^l} \right| = 0$$

缓增广义函数及其 Fourier 变换

一维缓增广义函数 $C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$ **空间上的连续线性泛函称为缓增广义函数，即对** $\forall\phi\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$**，存在唯一** $\langle f,\phi\rangle\in\mathbb{C}$ **满足**

$$\langle f,\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2\rangle=\alpha_1\langle f,\phi_1\rangle+\alpha_2\langle f,\phi_2\rangle,\quad \forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C},\forall\phi_1,\phi_2\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$$

且对 $C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$ **内的每一个零序列** $\{\phi_m\}$ **有**

$$\lim_{m\to\infty}\langle f,\phi_m\rangle=0,\quad \phi_m\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$$

可以证明每一个缓增广义函数 f **都可由下式产生:**

$$\langle f,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\phi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\phi\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$$

Parseval 等式

设 $f(x)$ **是绝对可积函数，**$F(k)$ **是** $f(x)$ **的经典 Fourier 变换像函数，**$\forall\phi(x)\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$**，**$\phi(x)$ **的像函数** $\Phi(k)\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$**，则**

$$\begin{aligned}\langle f,\mathscr{F}\{\phi\}\rangle&=\langle f,\Phi\rangle\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(k)\Phi(k)\mathrm{d}k\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x\mathrm{d}k\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(k)e^{-ikx}\mathrm{d}k\phi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\&=\langle F,\phi\rangle\\&=\langle\mathscr{F}\{f\},\phi\rangle\end{aligned}$$

缓增广义函数的 Fourier 变换

将 Parseval 等式推广到广义函数，可由定义缓增广义函数 f **的 Fourier 变换:**

$$\langle F,\phi\rangle\equiv\langle f,\mathscr{F}\{\phi\}\rangle,\quad \forall\phi\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$$

称由上式定义的缓增广义函数 F **为缓增广义函数** f **的 Fourier 变换，记为**

$$F=\mathscr{F}\{f\}$$

亦即

$$\langle\mathscr{F}\{f\},\phi\rangle\equiv\langle f,\mathscr{F}\{\phi\}\rangle,\quad \forall\phi\in C^\infty_\downarrow(\mathbb{R}^1)$$

缓增广义函数 Fourier 变换的性质

$\forall$ **递增广义函数** f,f_1,f_2**，**

1. **线性性质**

$$\mathscr{F}\{\alpha_1f_1+\alpha_2f_2\}=\alpha_1\mathscr{F}\{f_1\}+\alpha_2\mathscr{F}\{f_2\},\quad \forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$$

2. **相似性质**

$$\mathscr{F}\{f(\alpha x)\} = \frac{1}{|\alpha|}\mathscr{F}\{f\}\left(\frac{k}{\alpha}\right), \quad \forall\alpha \in \mathbb{C}$$

或

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{|\alpha|}f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\} = \mathscr{F}\{f\}(\alpha k), \quad \forall\alpha \in \mathbb{C}$$

3. **平移性质**

$$\mathscr{F}\{f(x-x_0)\} = e^{-ikx_0}\mathscr{F}\{f\}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

或

$$\mathscr{F}\{f(x)e^{ik_0x}\} = \mathscr{F}\{f\}(k-k_0)$$

4. **微分公式**

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right\}(k) = ik\mathscr{F}\{f\}(k)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathscr{F}\{f\}(k) = \mathscr{F}\{-ixf(x)\}(k)$$

5. **共轭性质**

$$\mathscr{F}\{\mathscr{F}\{f\}\} = f(-x)$$

卷积 (Convolution)

经典函数 f, g 的卷积定义为

$$\{f * g\}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(x-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

广义函数 f, g 的卷积定义为

$$\forall\phi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^1), \quad \langle f * g, \phi\rangle = \langle f(x) \otimes g(y), \phi(x+y)\rangle$$

若 f, g 至少有一个有有限支集，则 $f * g$ 存在。

卷积定理

$\forall g \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^1)$**，$f = \alpha$ 为经典速降函数，$\alpha = \mathscr{F}^{-1}(f)$ 为经典光滑缓增函数，则**

$$\mathscr{F}\{f * g\} = \mathscr{F}\{f\} \cdot \mathscr{F}\{g\}, \quad \mathscr{F}\{\alpha \cdot g\} = \mathscr{F}\{\alpha\} * \mathscr{F}\{g\}$$

多元广义函数的 Fourier 变换

n 元速降型检验函数

若多元复值函数 $\phi(\boldsymbol{x})$，$\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ 满足

1. $\phi(\boldsymbol{x})$ **无穷可微，即对 $\forall n$ 维多重指标 l，$D^l\phi(\boldsymbol{x})$ 存在；**

2. $\forall n$ **维多重指标 j, l，**

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} |\boldsymbol{x}^j D^l\phi(\boldsymbol{x})| = 0, \quad \boldsymbol{x}^j = x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$$

则称 ϕ 为n 元速降型检验函数。

n 元速降型检验函数空间

由所有 n 元速降型检验函数组成的集合构成一个复数域上的线性空间，记为 $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，称为$n$ 元速降型检验函数空间。

$C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 内的零序列

对 $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 内的序列 $\{\phi_m(\boldsymbol{x})\}$，$\phi_m \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，若 $\forall n$ 维多重指标 j, l，

$$\lim_{m\to\infty} \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}^j D^l \phi_m| = 0$$

则称序列 $\{\phi_m(\boldsymbol{x})\}$ 为 $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 内的零序列。

可证：$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 在 $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 内稠密，$C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathscr{R}^n)$ 内稠密。

缓增广义函数

$C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 空间上的连续线性泛函称为缓增广义函数。

亦即 $\forall \phi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，存在唯一 $\langle f, \phi\rangle \in \mathbb{C}$ 满足

$$\langle f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2\rangle = \alpha_1\langle f, \phi_1\rangle + \alpha_2\langle f, \phi_2\rangle, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \forall \phi_1, \phi_2 \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

且对 $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 内的每一个零序列 $\{\phi_m\}$ 都有

$$\lim_{m\to\infty} \langle f, \phi_m\rangle = 0, \quad \phi_m \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

速降型检验函数的 Fourier 变换

$\forall \phi(\boldsymbol{x}) \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，$\phi(\boldsymbol{x})$ 的经典 Fourier 变换存在，记

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \mathscr{F}\{\phi(\boldsymbol{x})\} \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

可证 $\Phi(\boldsymbol{k}) \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$。

且若 $\phi_m(x)$ 是 $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中的零序列，那么 $\{\Phi_m(k)\}$ 也是 $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中的零序列。

逆变换：

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \mathscr{F}^{-1}\{\Phi(\boldsymbol{k})\} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

缓增广义函数的 Fourier 变换

和一维的情况类似：

$$\langle \mathscr{F}\{f\}, \phi\rangle \equiv \langle f, \mathscr{F}\{\phi\}\rangle, \quad \forall \phi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

例如：

$$\mathscr{F}\{1\} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta(\boldsymbol{x}), \quad \mathscr{F}\{\delta\} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

4 积分方程

4.1 线性积分方程的分类

导致积分方程的问题举例

RC 充放电电路方程

充电：

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t = E$$

放电:

$$Ri(t)=\frac{1}{C}\left[q_0-\int_0^t i(t)\mathrm{d}t\right]$$

Laplace 变换

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}g(t)\mathrm{d}t\Rightarrow g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{xt}f(x)\mathrm{d}x$$

其中 a 充分大以保证在 $x=a$ 右侧 $f(x)$ 解析。

热传导问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=f(x)\end{cases}$$

选取格林函数满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x^2}=\delta(t-t')\delta(x-x')\\ G(x,t;x',t')|_{x=0}=G(x,t;x',t')|_{x=l}=0\\ G(x,t;x',t')|_{t=0}=0\end{cases}$$

那么解

$$u(x,t)=\int_0^l f(x')G(x,t;x',t')|_{t'=0}\mathrm{d}x'$$

S-L 型本征值问题化为积分方程 S-L 型本征值问题

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)=\lambda\rho(x)y(x), & a<x<b,t>0\\ y(a)\cos\alpha-y'(a)\sin\alpha=0, & t\geq 0\\ y(b)\cos\beta+y'(b)\sin\beta=0, & a\leq x\leq b\end{cases}$$

选取格林函数满足

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)G(x,x')=\delta(x-x')\\ G(x,x')|_{x=a}\cos\alpha-\left.\dfrac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right|_{x=a}\sin\alpha=0\\ G(x,x')|_{x=b}\cos\beta+\left.\dfrac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right|_{x=b}\sin\beta=0\end{cases}$$

那么解

$$y(x)=\lambda\int_a^b y(x')G(x,x')\rho(x')\mathrm{d}x'$$

Abel's 积分方程

在重力作用下，质点沿曲线从高度为 h 的 P 点处由静止状态无摩擦滑到高度为 0 的 O 点的时间为已知函数 $f(h)$，现在要定出曲线，那么待解方程可表为

$$\int_0^h\frac{u(z)}{\sqrt{h-z}}\mathrm{d}z=f(h),\quad h>0$$

某些微分方程的解可通过解积分方程得到

对于微分方程

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y), & x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其解

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

而对于微分方程

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y), & x > x_0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

通过积分以及交换积分次序可以得到解为

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - s) f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

积分方程的特点

1. **积分方程反映的是所求函数（场）的整体性质，而微分方程反映的只是局部关系（取微元）。**
2. **有些从微分方程表述来看是不同的问题，例如阶数不同（增加一阶要多一个附加条件），或自变量数目不同（常微分、偏微分）。而若用积分方程来表述就没有多大差异。**
3. **积分方程的核常与（场的）Green 函数紧密相连。**

线性积分方程的分类

依据	类别	
未知函数的幂次	线性	非线性
积分上下限	上下限均固定 (Fredholm 型方程)	有一个是变量 (Volterra 型方程)
未知函数出现未知	仅出现在积分号内 (第一类)	同时出现在积分号内外 (第二类)
已知函数	齐次	非齐次

对于后两个分类，具体来说，

	第一类	第二类
Fredholm 型方程	$\phi(x)=\int_a^b K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$	$f(x)=\int_a^b K(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\phi(x)$
Volterra 型方程	$\phi(x)=\int_a^x K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$	$f(x)=\int_a^x K(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\phi(x)$

其中 f 是未知函数，ϕ 是已知函数。x,t 也可以是多变量:

$$x=(x_1,\cdots,x_m),\quad t=(t_1,\cdots,t_n)$$

线性 Fredholm 型方程的标准形式

$$\alpha(x)y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)\mathrm{d}t+\phi(x)$$

其中 $\alpha(x),\phi(x)$ 已知，$y(x)$ 未知，$K(x,t)$ 称为**核**，λ 给定或待定。
$\alpha(x)\equiv\Rightarrow$ 第一类；$\alpha(x)\neq 0$，两边同除以 $\alpha(x)$ 后即为第二类。
$\alpha(x)$ 不恒为零但有零点的情况需个别处理，这里不讨论。

4.2 Fredholm 型方程

第二类 Fredholm 型方程解的存在性和唯一性

Hilbert-Schmidt 积分算符
设 $(x,y)\in[a,b]^2$，设 $K(x,y)$ 是一个实值或复值连续函数且

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\rho(y)\mathrm{d}y<\infty$$

那么以 $K(x,y)$ 为核定义的积分算符

$$\hat{K}:L^{2,\rho}[a,b]\mapsto L^{2,\rho}[a,b]\qquad \begin{cases}\hat{K}f=\int_a^b K(x,y)f(y)\rho(y)\mathrm{d}y\\ D(\hat{K})=\{f(x):a\le x\le b,f\in L^{2,\rho}[a,b],\hat{K}f\in L^{2,\rho}[a,b]\}\end{cases}$$

是一个紧算符。$K(x,y)$ 称为**Hilbert-Schmidt 核**，$\hat{K}$ 称为**Hilbert-Schmidt 积分算符**。
注意到

$$\hat{K}^\dagger g=\int_a^b K^*(x,y)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

因此若

$$K(x,y)^*=K(y,x)$$

那么 $\hat{K}$ 是线性自伴紧算符。
Fredholm 二择一定理 (alternative)
若 $\hat{K}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的线性自伴紧算符，则

$$g=\hat{K}g\text{只有零解}\iff\forall\phi\in\mathscr{H},f=\hat{K}f+\phi\text{有唯一解}$$

且若非齐次方程 $f=\hat{K}f+\phi$ 有界，那么对齐次方程 $g=\hat{K}g$ 的每一个解均有 $\langle\phi|g\rangle=0$。
非此即彼的意义：要么 $\forall\phi\in\mathscr{H}, f=\hat{K}f+\phi$ 有唯一解，要么 $g=\hat{K}g$ 有非零解。
若 $\hat{K}$ 是 Banach 空间的有界线性算符，那么当 $|\lambda|\|\hat{K}\|<1$ 时，$y=\lambda\hat{K}y+\phi$ 有唯一解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\hat{K}^n\phi$$

对 Hilbert-Schmidt 积分算子

$$\|\hat{K}\|^2=\int_a^b\int_a^b|K(x,y)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\rho(y)\mathrm{d}y$$

第二类 Fredholm 型方程的逐次逼近法

对于方程

$$y=\lambda\hat{K}y+\phi$$

考虑迭代

$$y_0=\phi,\quad y_n=\lambda\hat{K}y_{n-1}+\phi$$

也就是

$$y_n=\sum_{l=0}^{n}(\lambda\hat{K})^l\phi$$

退化核

考虑

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i^*(y)$$

此时 $K(x,y)$ 为退化核。方程化为

$$f(x)=\phi(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i^*(y)f(y)\mathrm{d}y$$

左乘 $\beta_j(x)^*$ 并积分

$$\int_a^b\beta_j(x)^*f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\beta_j(x)^*\phi(x)\mathrm{d}x+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int\alpha_i(x)\beta_j^*(x)\mathrm{d}x\int\beta_i^*(y)f(y)\mathrm{d}y$$

记

$$\int_a^b\beta_i^*f(x)\mathrm{d}x=f_i,\quad\int_a^b\beta_i^*\phi(x)\mathrm{d}x=\phi_i,\quad\int_a^b\alpha_i(x)\beta_j^*(x)\mathrm{d}x=K_{ji}$$

其中 f_i 未知，ϕ_i, K_{ji} 已知。那么方程可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\vdots\\\phi_n\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}K_{11}&K_{12}&\cdots K_{1n}\\K_{21}&K_{22}&\cdots K_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\K_{n1}&K_{n2}&\cdots K_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{pmatrix}$$

也就是

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & \cdots-\lambda K_{1n} & \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & \cdots-\lambda K_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda K_{n1} & -\lambda K_{n2} & \cdots 1-\lambda K_{nn} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

退化核逼近

有时 $K(x,y)$ 不是退化核，此时我们可以选取一个核来逼近 $K(x,y)$：

$$A(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i^*(y)$$

令 $K'(x,y)=K(x,y)-A(x,y)$，要求

$$\lim_{n\to\infty}\iint|K'(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

同时，逼近要求

$$\iint|K'(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将 $K(x,y)=K'(x,y)+A(x,y)$ 代入积分方程：

$$y(x)=\phi(x)+\lambda\int_a^b[K'(x,y)+A(x,y)]f(y)\mathrm{d}y$$

即

$$f(x)-\lambda\int_a^b K'(x,y)f(y)\mathrm{d}y=\phi(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i^*(y)f(y)\mathrm{d}y\equiv s(x)$$

当 $\lambda\|K'\|<1$ 时可用迭代法解出

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\hat{K}')^n s=s(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\hat{K}')^{n-1}\hat{K}'s$$

定义

$$\begin{cases} K_1'(x,y)=K'(x,y) \\ K_2'(x,y)=\displaystyle\int_a^b K'(x,y_1)K'(y_1,y)\mathrm{d}y_1 \\ \vdots \\ K_n'(x,y)=\displaystyle\int_{y_1,\cdots,y_{n-1}}\cdots\int K'(x,y_1)K'(y_1,y_2)\cdots K'(y_{n-1},y)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_{n-1}=\int_a^b K'(x,y_1)K_{n-1}'(y_1,y)\mathrm{d}y_1 \end{cases}$$

称为叠核。那么上式改写为

$$f(x)=s(x)+\lambda\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n'(x,y)s(y)\mathrm{d}y$$

定义预解式

$$R(x,y,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n'(x,y)$$

那么方程改写为

$$f(x)=s(x)+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)s(y)\mathrm{d}y$$

代入 $s(x)$ 的表达式得到

$$f(x)=\phi(x)+\lambda\int_a^b\left[\sum_{i=1}^n\alpha_i(x)+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)\sum_{i=1}^n\alpha_i(y_i)\mathrm{d}y\right]\beta_i^*(y)f(y)\mathrm{d}y+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)\phi(y)\mathrm{d}y$$

令

$$\Phi(x)=\phi(x)+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)\phi(y)\mathrm{d}y,\quad B(x,y,\lambda)=\left[\sum_{i=1}^n\alpha_i(x)+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)\sum_{i=1}^n\alpha_i(y_i)\mathrm{d}y\right]\beta_i^*(y)$$

也就是

$$f(x)=\Phi(x)+\lambda\int_a^b B(x,y,\lambda)f(y)\mathrm{d}y$$

利用正交函数组解积分方程

$$f(x)=\phi(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

取一组正交归一函数集 $\varphi_i(x)$，

$$\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle=\int_a^b\varphi_i^*(x)\varphi_j(x)=\delta_{ij}$$

用该函数集去展开:

$$f(x)=\sum_i f_i\varphi_i,\quad \phi(x)=\sum_i\phi_i\varphi_i$$

其中 $f_i=\langle\varphi_i|f\rangle$ 未知，$\phi_i=\langle\varphi_i|\phi\rangle$ 未知。
方程就是

$$\sum_i f_i\varphi_i(x)=\sum_i\phi_i\varphi_i(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\sum_i f_i\varphi_i(y)\mathrm{d}y$$

整体与 φ_j 作内积得到

$$f_j=\phi_j+\lambda\sum_i f_i\int_a^b\varphi_j^*(x)\int_a^b K(x,y)\varphi_i(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

定义

$$K_{ji}=\int_a^b\int_a^b\varphi_j^*(x)K(x,y)\varphi_i(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

方程即为

$$f_j=\phi_k+\lambda\sum_i K_{ji}f_i$$

若是无穷个互相耦合的方程组，那么无法求解；
而若

$$\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi_i(y)\mathrm{d}y=\varphi_i(x)\Rightarrow\lambda_i\hat{K}\varphi_i=\varphi_i$$

那么方程即为

$$f_i=\phi_j+\lambda+\sum_i f_i\langle\varphi_j|\frac{1}{\lambda_i}\varphi_i\rangle=\phi_j+\lambda\frac{1}{\lambda_j}f_j$$

当 $\lambda\neq\lambda_j$ **时**

$$f_j=\frac{\phi_j}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_j}}$$

如果算符 $\hat{K}$

$$\hat{K}f=\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

满足

$$\|K\|^2=\iint|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,\quad K(x,y)=K^*(y,x)$$

那么 $\hat{K}$ **是线性自伴紧算符，从而存在一组符合要求的正交归一基。**
若 $\|\hat{K}\|\neq 0$ **则**

1. $\hat{K}$ **有至多无穷多个本征值。**
2. $\hat{K}$ **的所有本征值必为实数。**
3. **除** $\pm\infty$ **外，所有本征值的集合** $\{\lambda_i\}$ **在实轴上没有聚点。**
4. **每个本征值的简并度有限。**
5. **对应不同本征值的本征函数正交。**
6. $\hat{K}$ **的所有本征矢量** $\{\varphi_i\}$ **构成** $R(\hat{K})$ **内的正交基。**
   不妨设本征值为

   $$|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\leq\cdots|\lambda_N|,\quad \text{若}N\to\infty\text{则}\lim_{N\to\infty}\lambda_N=\infty$$

   对应正交基分别为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$**。**
7. **Hilbert-Schmidt 定理: 若** $f(x)$ **是定义于** $[a,b]$ **的连续函数，则** $(\hat{K}f)(x)$ **可以用** $\{\varphi_i\}$ **展开得到 Fourier 级数** $\sum_i\langle\varphi_i|\hat{K}f\rangle\varphi_i$**，该级数在** $[a,b]$ **上绝对一致收敛于** $(\hat{K}f)(x)$**。**

而若 $K(x,y)=K^*(y,x)$ **不满足，则** $\hat{K}$ **可能没有本征值。根据**

$$\hat{K}^\dagger f=\int_a^b K^*(t,s)f(t)\mathrm{d}t$$

定义

$$\hat{A}=\hat{K}\hat{K}^\dagger,\quad \hat{B}=\hat{K}^\dagger\hat{K}$$

即

$$\hat{A}f = \int_a^b \left[\int_a^b K(s,t_1)K^*(t,t_1)\mathrm{d}t_1\right] f(t)\mathrm{d}t$$

$$\hat{B}f = \int_a^b \left[\int_a^b K^*(t_1,s)K(t_1,t)\mathrm{d}t_1\right] f(t)\mathrm{d}t$$

用函数 $g(x)$ 作内积

$$\begin{aligned}\langle g|\hat{A}f\rangle &= \int_a^b g^*(s)\int_a^b\int_a^b K(s,t_1)K^*(t_1,t)\mathrm{d}t_1 f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \left[K^*(s,t_1)K(t_1,t)g(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t_1\right]^* f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

那么 $\hat{A}$ 满足前面的条件。设 φ 为 $\hat{A}$ 的本征矢量, 即

$$\lambda\hat{A}\varphi = \varphi$$

由于

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\lambda\hat{A}\varphi\rangle = \lambda\langle\varphi|\hat{K}\hat{K}^\dagger\varphi\rangle = \lambda\langle\hat{K}^\dagger\varphi|\hat{K}^\dagger\varphi\rangle > 0$$

因此 $\lambda > 0$, 即本征值为正。不妨设本征矢量为 $\{\varphi_i\}$, 本征值为

$$\lambda_1^2 \le \lambda_2^2 \le \cdots \le \lambda_N^2 \quad (\lambda_i^2\hat{A}\varphi_i = \varphi_i)$$

记

$$\psi_i = \lambda_i\hat{K}^\dagger\varphi_i = \lambda_i\int_a^b K^*(t,s)\varphi_i(t)\mathrm{d}t$$

由于

$$\lambda_i^2\hat{B}\psi_i = \lambda_i^2\hat{K}^\dagger\hat{K}\lambda_i\hat{K}^\dagger\varphi_i = \lambda_i\hat{K}^\dagger = \psi_i$$

即 λ_i^2 也是 $\hat{B}$ 的本征值, ψ_i 是本征矢量。
同时若 λ^2 是 $\hat{B}$ 的本征值即 $\lambda^2\hat{B}\psi = \psi$, 记 $\varphi = \lambda\hat{K}\psi$,

$$\lambda^2\hat{A}\varphi = \lambda^2\hat{K}\hat{K}^\dagger\lambda\hat{K}\psi = \lambda\hat{K}\psi = \varphi$$

总结: $\hat{A},\hat{B}$ 具有相同的本征值。设本征矢量分别为 $\{\varphi_i\},\{\psi_i\}$, 则有关系

$$\psi_i = \lambda_i\hat{K}^\dagger\varphi_i, \quad \varphi_i = \lambda_i\hat{K}\psi_i$$

下面即可证明 Schmidt 定理。由于展开系数

$$\langle\varphi_i|\hat{K}f\rangle = \frac{1}{\lambda_i}\langle\lambda_i\hat{K}^\dagger\varphi_i|f\rangle = \frac{1}{\lambda_i}\langle\psi_i|f\rangle$$

因此

$$\left(\sum_{i=m}^n |\langle\varphi_i|\hat{K}f\rangle\varphi_i|\right)^2 = \left(\sum_{i=m}^n \left|\langle\psi_i|f\rangle\frac{\varphi_i}{\lambda_i}\right|\right)^2 \le \sum_{i=m}^n |\langle\psi_i|f\rangle|^2 \sum_{j=m}^n \left|\frac{\varphi_j}{\lambda_j}\right|^2$$

把 $K^*(s,t)$ 看作 t 的函数用 $\{\psi_i\}$ 展开

$$\langle\psi_i|K^*\rangle = \int_a^b \psi_i^*(t)K^*(s,t)\mathrm{d}t = \left(\frac{\varphi_i}{\lambda_i}\right)^*$$

根据 Bessel 不等式可知

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_i}{\lambda_i}\right|^2 \leq \int_a^b |K(s,t)|^2\mathrm{d}t \leq M$$

其中用到了

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s < \infty$$

由于

$$\sum_{i=m}^{n}|\langle\psi_i|f\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

因此

$$\left(\sum_{i=m}^{n}|\langle\varphi_i|\hat{K}f\rangle\varphi_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty}|\langle\varphi_i|\hat{K}f\rangle\varphi_i|\right)^2 \leq \|f\|M$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\langle\varphi_i|\hat{K}f\rangle\varphi_i|$ **在** $[a,b]$ **一致收敛。**
记

$$\Theta(s) = (\hat{K}f)(s) - \sum_i \frac{1}{\lambda_i}\langle\psi_i|f\rangle\varphi_i$$

下证 $\Theta(s)\equiv 0$**。先计算**

$$\langle\varphi_i|\Theta\rangle = \langle\varphi|\hat{K}f\rangle - \langle\varphi_i|\sum_j\frac{1}{\lambda_j}\langle\psi_j|f\rangle\varphi_j\rangle = \frac{1}{\lambda_i}\langle\lambda_i\hat{K}^\dagger\varphi_i|f\rangle - \frac{1}{\lambda_i}\langle\psi_i|f\rangle = 0$$

那么

$$\langle\hat{K}^\dagger\Theta|\hat{K}^\dagger\Theta\rangle = \langle\Theta|\hat{A}\Theta\rangle = \langle\Theta|\sum_i c_i\varphi_i\rangle = 0$$

即 $\hat{K}^\dagger\Theta\equiv 0$**。因此**

$$0 = \langle f|\hat{K}^\dagger\Theta\rangle = \langle\hat{K}f|\Theta\rangle = \langle\Theta + \sum_i\frac{1}{\lambda_i}\langle\psi_i|f\rangle\varphi_i|\Theta\rangle = \langle\Theta|\Theta\rangle$$

即 $\Theta = 0$**。得证。**
于是对于方程

$$f(s) = \hat{K}y = \int_a^b K(s,t)y(t)\mathrm{d}t$$

我们可以设

$$y(s) = \sum_i y_i\psi_i, \quad f(s) = \sum_i f_i\varphi_i$$

其中 y_i **未知，** f_i **已知。方程即为**

$$\sum_i f_i\varphi_i = \hat{K}\sum_i y_i\psi_i = \sum_i\frac{y_i}{\lambda_i}\lambda_i\hat{K}\psi_i = \sum_i\frac{y_i}{\lambda_i}\varphi_i$$

即

$$f_i = \frac{y_i}{\lambda_i} \Rightarrow y_i = \lambda_i f_i$$

4.3 奇异积分方程

非齐次和未知函数分别用积分算符 $\hat{A}, \hat{B}$ 的本征函数组展开

该方法与上类同。

Fourier 变换

$$\mathscr{F}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = F(k) \quad \mathscr{F}^{-1}\{F\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{ikx}\mathrm{d}k = f(x)$$

卷积

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$
$$\mathscr{F}\{f * g\} = \mathscr{F}\{f\}\cdot\mathscr{F}\{g\}$$

积分方程为

$$y(s) = f(s) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t)y(t)\mathrm{d}t$$

作 Fourier 变换得

$$\begin{aligned}Y(k) &= F(k) + \lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iks}\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(k')e^{ik't}\mathrm{d}k'\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= F(k) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iks}K(s,t)e^{ik't}\mathrm{d}s\mathrm{d}tY(k')\mathrm{d}k'\end{aligned}$$

令

$$\bar{K}(k,k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iks}K(s,t)e^{ik't}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

那么

$$Y(k) = F(k) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{K}(k,k')Y(k')\mathrm{d}k'$$

特例: $\bar{K}(k,k') = V(k)\delta(k-k')$**，即**

$$\begin{aligned}K(s,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iks}V(k)\delta(k-k')e^{-ik't}\mathrm{d}k\mathrm{d}k' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iks}V(k)e^{-ikt}\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} V(k)e^{ik(s-t)}\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}v(s-t)\end{aligned}$$

其中

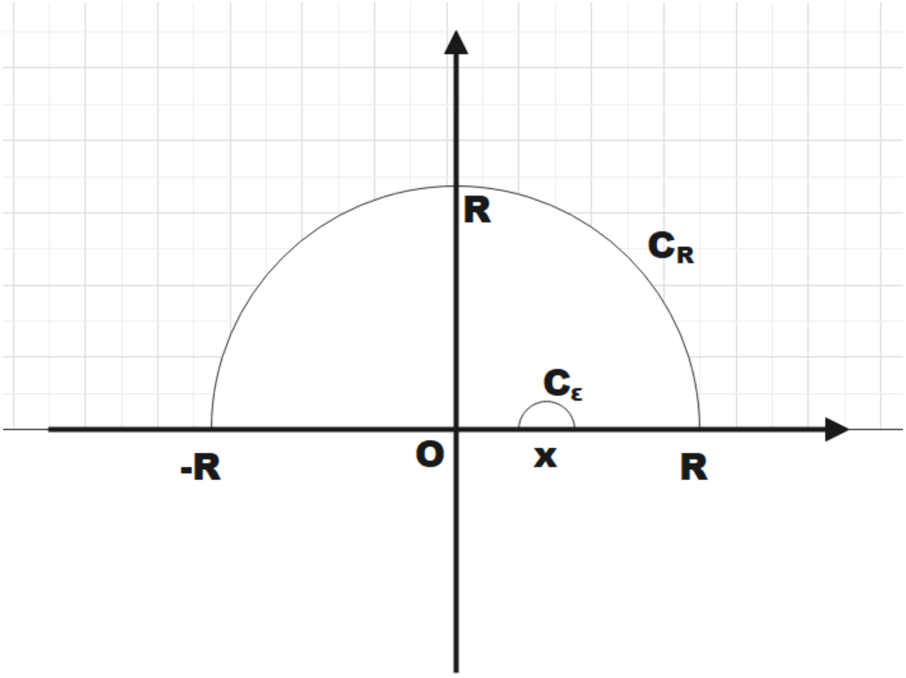
$$V(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(s)e^{-iks} =$$

此时

$$Y(k) = F(k) + \lambda V(k)Y(k) \Rightarrow Y(k) = \frac{F(k)}{1-\lambda V(k)}$$

Hilbert 变换

考虑如图围道:



若 $f(\xi)$ **在实轴上及上半平面解析，且有上半平面内** $\xi\to\infty$ **时** $f(\xi)\to 0$**，那么**

$$
\begin{aligned}
0&=\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{-R}^{x-\varepsilon}\frac{f(t)}{t-x}\mathrm{d}t+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi+\int_{x+\varepsilon}^{R}\frac{f(t)}{t-x}\mathrm{d}t+\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\\
&=\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-x}\mathrm{d}t+i(-\pi)f(x)=0
\end{aligned}
$$

即

$$
f(x)=\frac{1}{i\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-x}\mathrm{d}t
$$

记 $f(x)=u(x)+iv(x)$**，那么**

$$
u(x)+iv(x)=\frac{1}{i\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)+iv(t)}{t-x}\mathrm{d}t
$$

也就是说 u,v **满足变换关系**

$$
\mathscr{H}^{-1}(v)=u(x)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(t)}{t-x}\mathrm{d}t
$$

$$
\mathscr{H}(u)=v(x)=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)}{t-x}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)}{x-t}\mathrm{d}t
$$

此即Hilbert 变换。
对第二式两边作 Fourier 变换。注意到

$$
g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x},\quad G(k)=\mathscr{F}\{g\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}e^{-ikx}=-i\,\mathrm{sgn}(k)
$$

结合卷积的像函数可知

$$V(k)=G(k)U(k)\Rightarrow U(k)=\frac{V(k)}{G(k)}=i\,\mathrm{sgn}(k)V(k)=-G(k)V(k)$$

亦即

$$u(s)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{s-x}v(x)\mathrm{d}x$$

与 Hilbert 逆变换相同。同时也可以观察到

$$\mathscr{H}(\mathscr{H}(u))=-u$$

Euler 变换

Euler 变换为

$$y(x)=\int_C (x-t)^\mu v(t)\mathrm{d}t$$

其中 μ 为待定常数。

5 群论简介

5.1 群论基础

群的概念

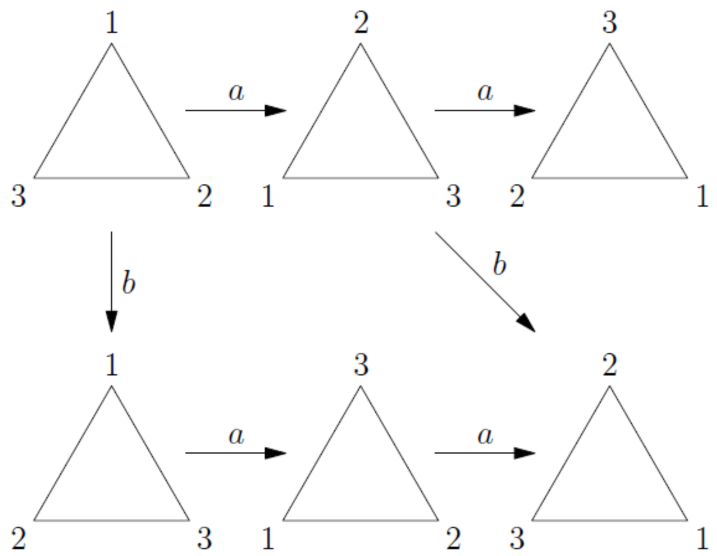
基本变换

考虑一个等边三角形，顶点标上 $1, 2, 3$。两种基本变换：

1. **在平面内绕三角形中心逆时针转动 $\dfrac{2\pi}{3}$，记为 a。**
2. **设 L 是一条通过三角形上顶点和底边中点的中垂线，在三维空间内绕 L 转 π，记为 b。**

组合变换

我们可以把 a, b 组合起来（用“乘法”表示）来构成新的变换。如 ab 为先 b 后 a，b^2 为连续两次 b。这些组合仍保持三角形不变。可能的组合如下：



一共有六种效果不同的变换，对应于 $(1, 2, 3)$ 的不同排列数，分别为

$$a, a^2, b, ab, a^2b, \quad a^3 = b^3 = e$$

其中 e 为恒等变换，代表三角形完全不动，称为单位元。

群

在集合 $G = \{a, b, \cdots\}$ 上定义一个二元运算，即对 G 中任意一对有序元素 a, b 都指定 G 中某个元素与之对应，记为 ab。若这个二元运算满足

1. **结合律：**
$$\forall a, b, c \in G, \quad a(bc) = (ab)c$$
2. **单位元：**
$$\exists e \in G, \forall a \in G, \quad ea = ae = a$$
3. **逆元：**
$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, \quad aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

则称 G 是一个**群**，而称这个二元运算为该群的**乘法**。

等边三角形的对称群

上例中所有变换的集合构成一个群。

1. ab 即两次变换的组合：先 b 后 a。
2. $a(bc), (ab)c$ 均代表操作组合：先 c 再 b 再 a，故相等。
3. e 为恒等变换。
4. 逆元即逆变换，为复原变换。如 $a^{-1} = a^2, b^{-1} = b$。

不要求满足交换律，即可以 $ab \neq ba$。

若群乘法满足交换律即

$$\forall a, b \in G, \quad ab = ba$$

则 G 称为**交换群（Abel 群）**，否则称为**非交换群（非 Abel 群）**。

若 G 仅包含有限个元素，则称为**有限群**，否则为**无限群**。有限群元素的个数称为有限群的**阶数**，记为 $|G|$。

通常用 e 代表群的单位元，采用如下**幂记号**($n > 0$)：

$$a^0 \equiv e, \quad a^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}n, \quad a^{-n} \equiv (a^{-1})^n$$

有限循环群

若 $\exists g \in G$ 使得

$$G = \{g^0 = e, g, g^2, \cdots, g^{n-1}\}$$

则 G 称为由 g 生成的 n 阶**循环群**，记为 C_n。

平面内绕正三角形中心逆时针转动 $\dfrac{2\pi}{3}$ 记为 a，则

$$\{e, a, a^2\} = C_3$$

一般地，绕正 n 边形中心逆时针转动 $\dfrac{2\pi}{n}$ 为基本变换 g，则生成对称群 C_n。

两面体群

上面关羽正三角形的对称群称为**两面体群**D_3。

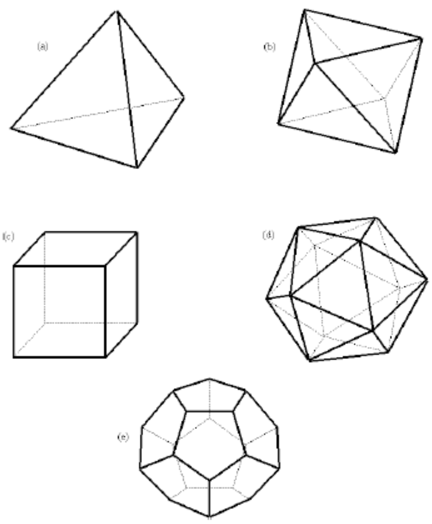
一般地，**两面体群**D_n 是关于正 n 边形的对称群，有 $2n$ 个群元素，故阶为 $2n$。可由两种基本变换

1. 平面内绕多边形中心逆时针转动 $\dfrac{2\pi}{n}$，记为 a。
2. 三维空间内绕某对称轴 L 转 π，记为 b。

及其组合构成。

正多面体群

共有五个正多面体：



抽象群和变换群 群的定义本身是抽象的，只要定义了群元素之间的乘法，这样定义的群称为**抽象群**。
当群元素作为对称性操作作用于具体对象时，联系抽象群和对称概念的是**变换群**。

有限 Abel 群

几个代数例子：

1. 由实数 $1, -1$ 组成的以普通乘法为群乘法的二阶群 C_2。
2. 由复数 $1, i, -1, -i$ 组成的复数乘法下的四阶群 C_4。

无限 Abel 群

实数 $\mathbb{R}$ 对加法成为群，这里我们把两个元素 r_1, r_2 的和 $r_1 + r_2$ 看作乘积，单位元是 0，一个元素的逆元是其相反数。
$\mathbb{R}$ 是一个阶为无限的 Abel 群。此外整数、偶数也对加法成为无限循环群。

复一般线性群 $GL(n, \mathbb{C})$

n 为正整数，群元素 A 是矩阵元为复数的 $n \times n$ 非奇异矩阵：

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{A = (A_{ij}), 1 \leq i, j \leq n : A_{ij} \in \mathbb{C}, \det A \neq 0\}$$

这里把通常的矩阵乘法作为群的乘法，单位元为单位矩阵，A 的逆元为其逆矩阵 A^{-1}。
$GL(n, \mathbb{C})$ 是无限非交换群。此外还有

实一般线性群：

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A = (A_{ij}), 1 \leq i, j \leq n : A_{ij} \in \mathbb{R}, \det A \neq 0\}$$

复特殊线性群：

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A = (A_{ij}), 1 \leq i, j \leq n : A_{ij} \in \mathbb{C}, \det A = 1\}$$

实特殊线性群：

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A = (A_{ij}), 1 \leq i, j \leq n : A_{ij} \in \mathbb{R}, \det A = 1\}$$

群的同构和乘法表

Cayley 的群乘法表 我们将群的所有元素 $x_1=e,x_2,\cdots,x_n$ 分别填入表的上行和左列，再把相乘的结果填入表中即可：

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
x_1	x_1^2	x_1x_2	x_1x_3	$\cdots$
x_2	x_2x_1	x_2^2	x_2x_3	$\cdots$
x_3	x_3x_1	x_3x_2	x_3^2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

两面体群 D_3 对于正三角形的对称群 D_3，构造乘法表如下：

	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

由表可知，每个群元素均会在表的每一行（列）中出现且仅出现一次。此即**重排定理**。定理另一部分是

$$a,b\in G,\quad ab=e\Rightarrow ba=e$$

定理的证明：
假设不成立，则一定有 c 在乘法表某一行设为 a 出现两次以上，设为出现于 b_1,b_2 列，即

$$ab_1=ab_2=c\Rightarrow b_1=b_2=a^{-1}c$$

产生了矛盾。
另外由

$$ab=e\Rightarrow a=b^{-1}\Rightarrow ba=bb^{-1}=e$$

定理得证。
同构
两个群 G,H **同构**（记为 $G\cong H$），当且仅当存在一个函数 $f:G\to H$ 满足

1. f 是 $1-1$ 映射，即
$$f(g_1)=f(g_2)\Rightarrow g_1=g_2$$
2. f 是满映射，即
$$\forall h\in H,\exists g\in G,f(g)=h$$
3. $\forall g_1,g_2\in G$，
$$f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$$

其中第三条保证了 G,H 的乘法表完全相同。犯规来，两个群的乘法表完全相同，那么这两个群同构。
数学上同构的群可认为是同一个群。

所有 $1,2,3$ 阶的群

1 阶群： $G=\{e\}$
乘法表：

	e
e	e

2 阶群： $G=\{e,a\}=C_2$
乘法表：

	e	a
e	e	a
a	a	e

3 阶群： $G=\{e,a,b\}=C_3, b=a^2$
乘法表：

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

群元素的阶

满足 $x^r=e$ 的最小正整数 r 称为群元素 x 的阶数。若对群元素 x，不存在这样的 r，则称 x 的阶为无穷。

有限群的元素的阶均为有限

考虑 $x^1,x^2,\cdots,x^{n-1},x^n$，$n$ 为群的阶数。这 n 个群元素若都不等于 e，则必有两个相等。设为

$$x^s=x^t,\quad s<t$$

则

$$e=x^{t-s}\Rightarrow r=t-s$$

有限群 G 任意元素 g 的阶数不大于群阶：

$$O(g)\leq|G|$$

有限群 G 任意元素 $g \neq e$ 的阶数必然大于 1。

D_3 群元素的阶

利用 D_3 乘法表可以得到各元素阶数:

元素	e	a	a^2	b	ab	a^2b
阶	1	3	3	2	2	2

群元的阶的一些基本性质

设 G 是一个群，群元 $g \in G$ 的阶为 $O(g)$。

1. 若 $O(g) = n$，则当且仅当 $n|m$ 时 $g^m = e$。
2. 设 $O(a) = n, O(a^r) = m$，且 $(n, r) = d$，则 $m = \dfrac{n}{d}$。
3. 设 $O(a) = n, O(b) = m, (m, n) = 1, ab = ba$，则 $O(ab) = mn$。
4. 设 $O(g) = mn$ 且 $(m, n) = 1$，则存在 $a, b \in G$ 使 $g = ab = ba$ 且 $O(a) = n, O(b) = m$。这样的 a, b 唯一。

证:
(1) 若 $g^m = e$，由于

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n$$

那么

$$e = g^m = g^{qn+r} = (g^n)^q \cdot g^r = e * g^r = g^r$$

而

$$O(g) = n, \quad r < n$$

只可 $r = 0$ 即 $n|m$。反过来是显然的。
(2) 设 $(n, r) = d$，$n = sd, r = ld, (s, l) = 1$，那么

$$(a^r)^s = a^{lds} = (a^n)^l = e^l = e$$

若 $m = O(a^r)$，由(1)知 $m|s$，又因为

$$e = (a^r)^m = a^{ldm}$$

故 $n = ldm$，由 $n = sd$ 知 $s|lm$，又由 (s, l) 知 $s|m$。
由 $m|s, s|m \Rightarrow m = s = \dfrac{n}{d}$。
(3) 由 $ab = ba \Rightarrow (ab)^{mn} = a^{mn}b^{mn} = e \Rightarrow O(ab)|mn$
设 $O(ab) = m_1n_1, m_1|m, n_1|n, (m_1, n_1) = 1$，记 $m = tm_1, n = sn_1$，那么

$$e = (ab)^{tm_1n_1} = (ab)^{mn_1} = a^{mn_1}b^{mn_1} = a^{mn_1}$$

可见 $n|mn_1$，但 $(m, n) = 1$，因此 $n|n_1$。又因为 $n = sn_1$，因此 $n = n_1$。同理 $m = m_1$，即 $O(ab) = mn$。
(4) 由 $(m, n) = 1$ 知存在整数 M, N 使得

$$Mm + Nn = 1$$

即

$$g = g^{Mm+Nn} = g^{Mm}g^{Nn}$$

令 $a = g^{Mm}, b = g^{Nn}$ **即有** $g = ab = ba$。
由 $O(g) = mn$ **和(2)知**

$$O(g^m) = \frac{mn}{(mn, m)} = n$$

由 $(n, M) = 1$ **知**

$$O(a) = O((g^m)^M) = \frac{n}{(n, M)} = n$$

同理 $O(b) = m$。
再证唯一性。设又有 $g = a_1b_1 = b_1a_1, O(a_1) = n, O(b_1) = m$**，那么**

$$a_1b_1 = ab, (a_1b_1)^{Mm} = (ab)^{Mm} \Rightarrow a_1^{Mm}b_1^{Mm} = a^{Mm}b^{Mm}$$

由 $O(b_1) = O(b) = m$ **知** $b_1^{Mm} = b^{Mm} = e$**，故**

$$a_1^{Mm} = a^{Mm}$$

利用 $Mm + Nn = 1$ **和** $O(a_1) = O(a) = n$ **得**

$$a_1^{1-Nn} = a^{1-Nn} \Rightarrow a_1 = a$$

同理可知 $b_1 = b$。**证毕。**

4 阶的群

$$G = \{e, a, b, c\}$$

首先不可能有阶数为 3 的群元。
若 $O(a) = 3$**，那么** $G = \{e, a, a^2, b\}$。**而**

$$ab \neq e, a, a^2, b$$

产生了矛盾。
可以构造出 2 个不同构的群:

1. **若有群元阶数为 4，**

$$C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$$

2. **若所有不为 e 的群元阶数均为 2，那么**

$$K_4 = \{e, a, b, c\}, \quad a^2 = b^2 = c^2 = e$$

乘法表如下：

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

可见是一个 Abel 群。

由此可知，$n \le 4$ 阶群都是 Abel 群。

子群，生成群

子群

设 G 是一个群，S 是 G 的一个子集 $S \subset G$，若在群的乘法下满足

1. $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

2. $e \in S$

3. $a \in S \Rightarrow a^{-1} \in S$

即 S 在 G 的乘法下构成群，则称 S 是 G 的子群。

定理：S 是群 G 的一个子集，若

$$\forall a, b \in S \Rightarrow ab^{-1} \in S$$

则 S 是 G 的一个子群。

证： $a = b \Rightarrow e = aa^{-1} \in S$

$a = e \Rightarrow \forall b \in S, b^{-1} \in S$

$\forall a, b \in S, b^{-1} \in S \Rightarrow ab = a(b^{-1})^{-1} \in S$。**得证。**

定理：S 是有限群 G 的一个子集，若

$$\forall a, b \in S \Rightarrow ab \in S$$

则 S 是 G 的一个子群。

证：$\forall a \in S$，设 $O(a) = r$，由于是有限群，故

$$r \le n = O(G)$$

由 $a^r=e$ 知

$$a^{-1}=a^{r-1}\in S$$

由上一个定理可知 S 是一个群。得证。

定理: A,B 是群 G 的子群, 则 $A\cap B$ 也是 G 的一个子群。

证: $\forall a,b\in A\cap B$, 由 $a,b\in A$ 知 $ab^{-1}\in A$, 同理 $ab^{-1}\in B$, 因此

$$ab^{-1}\in A\cap B$$

可见 $A\cap B$ 是子群。得证。

生成群和生成元

设 S 是群 G 的一个非空集合, $\{H_i|i\in\Delta\}$ 是所有包含 $S(S\subset H_i)$ 的 G 的子群的集合, 则子群 $\cap_{j\in\Delta}H_i$ 是包含 S 的最小子群, 称为 S 生成的 G 的子群, 简称生成群, 记为 $\langle S\rangle$, S 为生成集, 其元素称为生成元。

任何一个子群都是生成子群。

若 $S=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 为有限集, 则可记为 $\langle S\rangle=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$。

$\langle S\rangle$ 的构造

$\langle S\rangle$ 的群元就是所有 $a_1a_2\cdots a_n(n=1,2,\cdots)$ 的群元, 其中 $a_i\in S$ 或 $a_i-1\in S(i=1,2,\cdots,n)$。

证: 设

$$H=\{a_1a_2\cdots a_n|a_i\in S\text{或}a_i^{-1}\in S\}$$

以及

$$\forall x,y\in H,\quad x=a_1\cdots a_n,y=b_1\cdots b_m$$

那么

$$xy^{-1}=a_1\cdots a_nb_m^{-1}\cdots b_1^{-1}\in H$$

因此 H 是一个子群, 且 $S\subset H$, 进而 $\langle S\rangle\subset H$。

又 $S\subset\langle S\rangle$ 是群, 因此 $\langle S\rangle$ 包含任何 $a_1\cdots a_n(a_i\in S\text{或}a_i^{-1}\in S)$ 的元素, 即 $H\subset\langle S\rangle$。

综上, $H=\langle S\rangle$。得证。

特别地对于有限群,

$$\langle S\rangle=\{a_1\cdots a_n|a_i\in S\}$$

而若 $S=\{g\}$, $O(g)=r$, 那么

$$\langle S\rangle=\langle g\rangle=\{g,g^2,\cdots,g^r=e\}$$

是一个循环群 C_r。

无限循环群 整数集合 $\mathbb{Z}$ 对加法构成一个 Abel 群, 由 1 生成, 故 $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$ 称为无限循环群。

与有限群比较, 无限循环群除 0 外, 其他群元的阶数均为无穷。

考虑 $\mathbb{Z}$ 的子集

$$n\mathbb{Z}=\{nx|x\in\mathbb{Z}\}$$

由于

$$x,y\in\mathbb{Z},\quad nx-ny=n(x-y)\in n\mathbb{Z}$$

因此 $n\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个子群。
反之，$\mathbb{Z}$ 的子群只能是 $n\mathbb{Z}$。因为
设 n 为子群中最小正整数，那么其他元素必可表示为 $nx, x \in \mathbb{Z}$，若不然，则

$$x = ny + r, \quad 0 < r < n$$

即有 $r \in \mathbb{Z}$，与 n 最小正整数矛盾。
再考虑子集 (m, n 为正整数)

$$\{nx + my | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

易证这也是 $\mathbb{Z}$ 的一个子群，故其应等于 $k\mathbb{Z}, k = (m, n)$。
无限循环群的子群还是无限循环群。
有限群的循环子群
构造一个有限群 G 的子群，最简单方法是从某个群元出发反复自乘，即

$$S = \{x, x^2, \cdots, x^e\}$$

易证这是一个 $O(x)$ 阶循环群。

陪集，Lagrange 定理

陪集
设 H 是群 G 的一个子群，$g \in G$，定义

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

为 H 的一个**左陪集**，

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

为 H 的一个**右陪集**。
对于 Abel 群，$gH = Hg$。
划分
对集合 G，若有一组子集 $\{G_1, \cdots, G_i, \cdots\}$ 满足

1. G 中每一个元素一定包含于某一个 G_i 中，

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_i \cup \cdots$$

2. $G_1, \cdots, G_i$ 两两之间没有共同元素，

$$G_i \cap G_j = 0, \quad i \neq j$$

则 $\{G_1, \cdots, G_i, \cdots\}$ 称为 G 的一个**划分**。
那么对于群的阶我们有

$$|G| = \sum_i |G_i|$$

Lemma. 设 H 是群 G 的子群，那么其所有左（右）陪集构成 G 的一个划分。
证：因

$$g \in G, \quad g = (gh^{-1})h, \forall h \in H$$

即 $g \in (gh^{-1})H$，在 H 的一个左陪集中。
而若 gH, kH 之间有共同元素 a，那么

$$a = gh_1 = kh_2, \quad h_1, h_2 \in H \Rightarrow g = kh_2h_1^{-1} = kh_3, \quad h_3 = h_2h_1^{-1} \in H$$

故 $g \in kH$，$gH \subset kH$。同理 $kH \subset gH$，因此 $gH = kH$。
即两个不同左（右）陪集没有共同元素。
根据划分定义，引理得证。
Lagrange 定理 定理：有限群 G 的子群的阶是 G 的阶的一个因数。
证：设 G 为阶 $|G|$ 的一个有限群，则其任意子群 H 有限。
易知每个陪集 gH 满足

$$|gH| = |H|$$

根据引理，可以将 G 的元素划分到 H 的有限个不同左陪集中：

$$g_1H, \cdots, g_mH$$

其中 m 为左陪集个数。因此

$$|G| = \sum_{i=1}^{m} |g_iH| = m|H|$$

即 $|H|$ 为 $|G|$ 的因数，得证。
$m = \dfrac{|G|}{|H|}$ 称为 H 关于 G 的**指数**。
Lagrange 定理严格限制了子群的可能阶数。
定理：所有素数阶的群都是循环群。
证：设 $|G| = p \in prime$，由 Lagrange 定理知其子群仅有 $G, \{e\}$，阶分别为 $p, 1$。
$\forall g \in G$，设 $O(g) = r$，

$$C_r = \{g, g^2, \cdots, g^r = e\}$$

构成一个 r 阶循环子群。由于 $r = 1, p$ 知要么 $g \neq e$，要么 $r = p$，此时 $C_r = G$。即 G 为循环群 C_r。得证。
由此可知，5 阶群仅有 C_r。
以及：有限群的群元的阶数为群的阶数的一个因数。
所有 6 阶群
首先有 6 阶循环群：

$$C_6 = \{a, a^2, a^3, \cdots, a^6 = e\}$$

设 $X \neq C_6$，群元阶数只可为 $1, 2, 3, 6$。
若有一个群元阶为 6，则群为该群元生成的 C_6 群。
进而 X 所有非 e 的群元阶数只可为 $2, 3$。
不难证明若群的非 e 群元阶均为 2，则必为 Abel 群。那么

$$a^2 = e, b^2 = e \Rightarrow ab = ba$$

因此 $\{e, a, b, ab\}$ 为群的 4 阶子群，与 Lagrange 定理矛盾。
可见 X 必有阶为 3 的群元。不妨设 $O(a) = 3$。
那么有 3 阶子群

$$A = \{a, a^2, a^3 = e\}$$

取 $b \notin A$，Ab 为 A 的一个右陪集，且 $Ab \neq A$，则

$$X = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$$

由于 $b \notin A$ 故 $b^2 \notin Ab$，只可 $b^2 \in A$。即

$$b^2 = e, a, a^2$$

若 $b^2 = a, a^2$，则 $b^3 \neq e$，$O(b) = 6$，即群为 b 生成的 6 阶循环群，与 $X \neq C_6$ 矛盾。因此 $b^2 = e$。
而若 $bA \neq A$，不难证明 $Ab = bA$，即有 $ba = ab$。此时 $O(a) = 3, O(b) = 2 \Rightarrow O(ab) = 6$，即群为 C_6，矛盾。
可见只可有 $bA = A$，即有 $ba = a$。
此时乘法表即乘法结构已经完全确定:

$$X \cong D_3 \cong S_3$$

此即最小的非 Abel 群。
7 阶群: 只有 C_7。

5.2 Abel 群

正规子群和商群

正规子群

若对所有 $g \in G$ 都有 $gNg^{-1} = N$，则称子群 N 为正规子群。

陪集的乘法运算

设 H 是 G 的正规子群，$\forall g \in G, Hg = gH$，记 H 所有陪集的集合为 G/H，在其中定义乘法:

$$(aH)(bH) = (ab)H, \quad a, b \in G$$

则 G/H 是一个群。其满足

1. **乘法结合律**

$$(aH)[(bH)(cH)] = [a(bc)]H = [(ab)c]H = [(aH)(bH)](cH)$$

2. **单位元 $eH = H$。**

3. **逆元 $(aH)^{-1} = a^{-1}H$。**

商群（因子群）

设 H 是 G 的正规子群，G/H 称为 G 的商群（因子群）。

同余类

$n\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的正规子群，商群 $J_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 由所有陪集

$$[0] = 0 + n\mathbb{Z}, \quad [1] = 1 + n\mathbb{Z}, \quad \cdots \quad [n-1] = n - 1 + n\mathbb{Z}$$

组成，$[0], [1], \cdots$ 即代数中的同余类 $\mod n$。J_n 的群乘法即同余类加法。
J_n 同构于循环群 C_n。
定理：设群 G 有正规子群 N，G/N 为商群，则

$$O(xN)|O(x)$$

证：记 $H = G/N$，设 $O(x) = n$ 则 $x^n = e_G$，那么

$$(xN)^n = x^n N = e_H = N = e_H$$

即 $O(xN)|n$。得证。

有限 Abel 群的 Cauchy 定理

Lemma. 设 G 有一个 m 阶群元，则对于 m 的任意一个因子 d，G 也有一个阶为 d 的群元。
证：设 $O(g) = m$，那么

$$O(g^{\frac{m}{d}}) = \frac{O(g)}{(m, \frac{md}{)}} = \frac{m}{\frac{m}{d}} = d$$

素因子数目函数

设正整数 $n > 1$，将其分解为素因子乘积

$$n = p_1^{n_1} \cdots p_i^{n_i}$$

定义函数

$$P(n) = n_1 + \cdots + n_i$$

即 $P(n)$ 等于 n 的素因子的数目。

有限 Abel 群的 Cauchy 定理

设 G 是一个有限 Abel 群，$1 < |G| = n < \infty$，若素数 $p|n$，则必有群元 $g \in G, O(g) = p$。
证：对 $P(n)$ 用数学归纳法证明。
若 $P(n) = 1$ 即 $n \in prime$，其唯一素因子 $p = n$，此时 G 为循环群。只要 $g \neq e$ 即有 $O(g) = p$。
假设定理对所有 $P(|G'|) < P(n)$ 的群 G' 都成立。
取 $x \in G, x \neq e$，若 $p|O(x)$，由引理知定理成立。
若 $p \nmid O(x) = m$，那么 x 生成一个 m 阶循环子群

$$\langle x \rangle = \{e, x, \cdots, x^{m-1}\}$$

由于 G 是 Abel 群，故 $\langle x \rangle$ 是正规子群，考虑商群 $G/\langle x \rangle$，由 $\langle x \rangle = m > 1$ 知

$$P(G/\langle x \rangle) < P(|G|) = P(n)$$

且由 p 整除 $|G|$ 但不整除 m 可知 p 整除 $G/\langle x \rangle = \dfrac{|G|}{|\langle x \rangle|}$。
由归纳假设知必有 $y\langle x \rangle \in \frac{G}{\langle x \rangle}$，其阶为 p。
由前述定理知 $p|O(y)$，即 y 的阶数含 p 因子。
由引理知 G 必有阶为 p 的群元。由此得证。

有限 Abel 群的基本定理

群的直积

设 H, K 是群，并设

1. H, K **除** e **外无其他公共元素。**
2. H **的每一个元素都与** K **的每一个元素对易。**

它们的直积 $H \times K$ **定义为阶为** $|H \times K| = |H||K|$ **的群，其元素是** H **的每一元素和** K **的每一元素的积：**

$$H \times K = \{hk : h \in H, g \in K\}$$

例如： $K_4 \cong C_2 \times C_2$**，因为**

$$K_4 = \{e, a, b, ab\} = \{e, a\} \times \{e, b\}$$

若 $G = G_1 \times G_2$**，则** G_1, G_2 **都是** G **的正规子群，且**

$$G_1 = (G_1 \times G_2)/G_2, \quad G_2 = (G_1 \times G_2)/G_1$$

素幂阶群

设 p **是一个素数，若一个群的阶数** $|G| = p^t (t > 0)$**，即为** p **的正幂次，则称其为素幂阶群。**

有限 Abel 群的基本定理

有限 Abel 群都可表达为素幂阶的循环子群的直积。

Lemma. 设 A **为 Abel 群，**k **为整数，令**

$$B = \{x \in A : x^k = e\}$$

则 B **是** A **的一个子群。**

定理：设 G **是一个有限 Abel 群，设** $p \in prime$**，将群阶分解因数**

$$|G| = mp^n, \quad (m, p) = 1$$

则 $G = H \times K$**，其中**

$$H = \{x \in G : x^{p^n} = e\}, \quad K = \{x \in G : x^m = e\}$$

且 $|H| = p^n, |K| = m$**。**

证：由引理知 H, K **均为** G **的子群。首先证明** $H \times K$ **为直积群。根据定义，**

1. $H \cap K = \{e\}$**。**
   设 $x \in H \cap K$ **即** $x^{p^n} = x^m = e$**，**$O(x) = t$**，那么必有**
   $$t | p^n, \quad t | m$$
   且 $(p^n, m) = 1 \Rightarrow t = 1, x = e$
2. **由** H, K **为 Abel 群** G **的子群可知互相对易。**

接着证明 $G=H\times K$。由 (p^n,m) 知存在整数 M,N 使得

$$Np^n+Mm=1$$

于是 $\forall x\in G$,

$$x=x^{Np^n+Mm}=x^{Np^n}x^{Mm}$$

由 $x^{|G|}=e$ 知

$$(x^{Np^n})^m=(x^{p^nm})^N=e^N=e\Rightarrow x^{Np^n}\in K$$
$$(x^{Mm})^{p^n}=(x^{p^nm})^M=e^M=e\Rightarrow x^{Mm}\in H$$

由此可知 $G=H\times K$。
最后证明 $|H|=p^n$。
若 p 整除 $|K|$, 由 Abel 群的 Cauchy 定理可知存在 $k\in K$ 使得 $O(k)=p$, 即 $k^p=e$。
可见 $k^{p^n}=e$ 即 $k\in H$, 但已经证明 $H\cap K=\{e\}$, 矛盾。
因此 p 不是 $|K|$ 的因子, 可见 p^n 是 $|H|$ 的因子。
假设 H 除 p 外还有 $q\neq p$ 因子, 同样由 Cauchy 定理知存在 $h\in H$ 使得 $O(h)=q$。
而由 $h^{p^n}=e$ 知必有 $q|p^n$, 与 $p\in prime$ 矛盾。只有 $|H|=p^n$。
综上得证。
推论: 设

$$|G|=\prod_{i=1}^{k}p_i^{n_i}$$

则

$$G=\prod_{i=1}^{k}H_i,\quad H_i=\{x\in G:x^{p_i^{n_i}}=e\}$$

且 $|H_i|=p_i^{n_i}$, 即有限 Abel 群可表示为素幂阶子群的直积。
Lemma. 设 G 是 Abel 素幂阶群, $|G|=p^n$, 并设 a 为 G 中最大阶群元, $\langle a\rangle$ 是 a 生成的循环群。若 $G\neq\langle a\rangle$, 则存在 $b\in G$ 使得 $O(b)=p$ 且 $b\notin\langle a\rangle$。
证: 选择 $b\in G$ 使得只要 $O(c)<O(b)$ 就有 $c\in\langle a\rangle$。
由于 $b\notin\langle a\rangle$ 可知 b 是一个不在 $\langle a\rangle$ 内的最小阶群元。
我们证明 $O(b)=p$。因为

$$O(b^p)=\frac{O(b)}{(O(b),p)}=\frac{O(b)}{p}<O(b)$$

可见 $b^p\in\langle a\rangle$, 即 $b^p=a^i$, i 为某个正整数。
因 a 为最大阶群元, 设 $O(a)=p^m$, 有

$$e=b^{p^m}=(b^p)^{p^{m-1}}=(a^i)^{p^{m-1}}$$

即 $O(a^i)\leq p^{m-1}$, 亦即

$$O(a^i)=\frac{O(a)}{(p^m,i)}\leq p^{m-1}$$

故 $(p^m,i)\neq 1$ 即 $p|i$。不妨设 $i=pj$,j 为正整数, 有

$$b^p=a^i=a^{pj}$$

令 $c=a^{-j}b$，首先若 $c\in\langle a\rangle$，则 $b\in\langle a\rangle$，矛盾。因此 $c\notin\langle a\rangle$。
再有

$$c^p=a^{-jp}b^p=e$$

因此 $O(c)=p$ 且 $c\notin\langle a\rangle$，由定义知 b 阶数最小，故 $O(b)=p$。得证。
定理：设 G 为 Abel 素幂阶群，a 为其最大阶群元，则 $G=\langle a\rangle\times K$，其中 K 是 G 的某个子群。
证：设 $|G|=p^n, p\in prime$，对 n 作数学归纳。
若 $n=1$，由素数阶群只能为循环群知 $O(a)=p$，进而 $G=\{a\}\times\{e\}$。
假设定理对所有 p^k 阶 Abel 群成立。
对 p^n 阶群 G，设最大阶群元为 a，$O(a)=p^m$。
若 $G=\langle a\rangle$，定理显然成立。故假设 $G\neq\langle a\rangle$。
由前述引理知存在 $b\notin\langle a\rangle$ 且 $O(b)=p$，即 $\langle b\rangle$ 的阶为素数 p，因此 $\langle b\rangle$ 内除 e 外其他群元阶均为 p，都会生成 $\langle b\rangle$。
断言：除 e 外 $\langle b\rangle$ 的其他群元均不属于 $\langle a\rangle$，否则 $\langle b\rangle$ 在 $\langle a\rangle$ 内，进而 $b\in\langle a\rangle$，矛盾。
因此 $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$。
现在考虑商群 $\tilde{G}=G/\langle b\rangle$，并记陪集 $\tilde{x}=x\langle b\rangle$。
已知 $O(\tilde{x})\leq O(x)$，若 $O(\tilde{a})<O(a)=p^m$，则必有 $\tilde{a}^{p^{m-1}}=\tilde{e}$，即

$$(a\langle b\rangle)^{p^{m-1}}=a^{p^{m-1}}\langle b\rangle=\langle b\rangle$$

因此

$$a^{p^{m-1}}\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$$

与 $O(a)=p^m$ 矛盾。因此仅有 $O(\tilde{a})=O(a)=p^m$，即 $\tilde{a}$ 必为 $\tilde{G}$ 中的最大阶群元。
作为商群，$|\tilde{G}|=p^{n-1}$，由归纳假设知

$$\tilde{G}=\langle\tilde{a}\rangle\times\tilde{K}$$

并设

$$K=\{q\in G|q\langle b\rangle\in\tilde{K}\}$$

易知 K 是 G 的一个子群且 $\tilde{K}=K/\langle b\rangle$，故 $|K|=p|\tilde{K}|$。
我们证明 $G=\langle a\rangle\times K$。
先证其是一个直积群，只需证明 $\langle a\rangle\times K=\{e\}$。设 $x\in\langle a\rangle\cap K$，则

$$\tilde{x}\in\langle\tilde{a}\rangle\cap\tilde{K}=\{\tilde{e}\}\Rightarrow x\in\langle b\rangle$$

即

$$x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}\Rightarrow x=e$$

最后证 $G=\langle a\rangle\times K$，只需计算群的阶数即可：

$$|\langle a\rangle\times K|=|\langle a\rangle||K|=|\langle\tilde{a}\rangle|p|\tilde{K}|=p(|\langle\tilde{a}\rangle||\tilde{K}|)=p|\tilde{G}|=p^n=|G|$$

得证。
由该定理可得
推论：素幂阶的 Abel 群都可以表达为素幂阶的循环子群的直积。

正十七边形

同余类的乘法

$$[i][j]\equiv[ij]$$

同余类的乘法不构成群，因为 $[0]$ 没有逆元。
若是整数算术，仅有 $1,-1$ 有逆元。而若是整数的对 m 的模算数，则除了 $[1],[-1]$ 外其他元素也有逆元。
定理: $[u]\in J_m$ **有一个逆元** $\Leftrightarrow u,m$ **互素。**
$[u]$ **只有一个逆元。若有两个即** $[u][v_1]=[u][v_2]=[1]$ **则**

$$[v_1]=[v_1][1]=[v_1][u][v_2]=[1][v_2]=[v_2]$$

定理: **取** J_m **的子集**

$$U_m=\{[u]\in J_m|(u,m)=1\}$$

即 U_m **由所有有逆元的元素组成。**U_m **对同余类的乘法构成群。**
特别地若 $p\in prime$**，则** $|U_p|=p-1$**。**
群 U_n **给出了一组 Abel 群，但不一定是循环群，如**

$$U_{12}=\{[1],[5],[7],[11]\}$$

不是循环群。
定理: **若** $p\in prime$**，则** U_p **是循环群。**
Lemma. 对于任意正整数 $r>0$**，方程** $a^r=1$ **在** $J_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ **中最多只有** r **个解。**
引理的证明需要应用一个定理:
定理: **设** $f(T)$ **是** J_p **中的一个非常数** $d(d>0)$ **次多项式，则** $f(T)$ **在** J_p **中最多有** d **个根。**
该定理的证明需要一个引理:
Lemma: **设** $f(T)$ **是** J_p **中的一个非常数** $d(d>0)$ **次多项式，对所有的** $a\in J_p$**，**$f(a)=0$ **当且仅当** $T-a$ **是** $f(T)$ **的一个因式。**
该引理证明可利用数学归纳法简单证明。
进而前面的定理成立，从而前面的引理也成立。
我们还需要一个命题:
设 G **为一个有限 Abel 群，**n **是** G **中群元的最大阶数，则任意群元的阶数必整除** n**。**
证: 由有限 Abel 群的基本定理，G **可分解为素幂阶子群的直积，故最大阶的群元也是各素幂阶子群中最大阶群元的积，**n **也为各素幂阶子群中最大阶群元阶数之积。**
因此素幂阶子群中任意群元阶数必整除其最大阶群元的阶数，从而整除 n**。得证。**
然后回到最开始的定理证明:
设 n **是** U_p **群元的最大阶数，显然** $n\leq p-1$**。**
由任意群元 a **的阶数整除** n **知** $a^n=1$**，再由引理（根的数目）知道** $p-1\leq n$**。**
因此 $n=p-1$**，即必有群元阶数为** $p-1$**。进而** U_p **为** $p-1$ **阶循环群。**

正十七边形问题

设 $x=e^{\frac{2\pi i}{17}}$**，由于** $x^0,\cdots x^{16}$ **都是方程** $x^{17}-1=0$ **的根，即**

$$x^0+x^1+\cdots+x^{16}=0$$

亦即

$$x^1+\cdots+x^{16}=-1$$

现在 $x^0,\cdots,x^{16}$ **对复数的乘法构成群, 即为循环群** C_{17}**。**
相乘时, 指数相加, 指数的加法为 $J_{17}(\mod 17)$ **群, 显然** $J_{17}\cong C_{17}$**。**
由前定理知 $U_{17}\cong C_{16}$**, 故必有一个 16 阶群元** y **满足**

$$n\equiv y^{k_n}(\mod 17)$$

逐个检查可知最小的 16 **阶群元为** $y=3$**, 将** $x^0,\cdots,x^{16}$ **按指数奇偶性分为两块, 第一块**

$$s=x^{3^0}+x^{3^2}+\cdots+x^{3^{14}}$$

其指出构成 C_{16} **的子群** C_8**。第二块**

$$s'=x^{3^1}+x^{3^3}+\cdots+x^{3^{15}}$$

其指数为 C_8 **的陪集** $3C_8$**。**
然后将 $x^0,\cdots,x^{16}$ **按指数群** $C_4=\{3^0,3^4,3^8,3^{12}\}$ **分为四块。**
s **分为两块, 一块**

$$p=x^{3^0}+x^{3^4}+x^{3^8}+x^{3^{12}}=x^{9^0}+x^{9^2}+x^{9^4}+x^{9^6}$$

为子群 C_4**。另一块**

$$p'=x^{9^1}+x^{9^3}+x^{9^5}+x^{9^7}$$

为陪集 3^2C_4**。**
s' **也分为两块, 一块**

$$q=x^{3\cdot9^0}+x^{3\cdot9^2}+x^{3\cdot9^4}+x^{3\cdot9^6}$$

为陪集 $3C_4$**。另一块**

$$q'=x^{3\cdot9^1}+x^{3\cdot9^3}+x^{3\cdot9^5}+x^{3\cdot9^7}$$

为陪集 3^3C_4**。**
最后按子群 $C_2=\{9^0\equiv1,9^4\equiv16\}$ **分块, 只需**

$$r=x^{9^0}+x^{9^4}=x^1+x^{16},\quad r'=x^{9^2}+x^{9^6}=x^{13}+x^4$$

接下来, 先计算 s,s'**。计算得**

$$\begin{cases}s+s'=\sum_{i=1}^{16}x^i=-1\\ ss'=4\sum_{i=1}^{16}x^i=-4\end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}s'&=x^3+x^{10}+x^5+x^{11}+x^{14}+x^7+x^{12}+x^6\\&=x^3+(x^3)^*+x^5+(x^5)^*+x^6+(x^6)^*+x^7+(x^7)^*\\&=2[\cos\frac{6\pi}{17}+\cos\frac{10\pi}{17}+\cos\frac{12\pi}{17}+\cos\frac{14\pi}{17}]<0\end{aligned}$$

由此解出合理的根

$$s=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\qquad s'=-\frac{\sqrt{17}+1}{2}$$

再计算 p,p',q,q'**，不难看出**

$$\begin{cases}p+p'=s\\ pp'=s+s'=-1\end{cases},\quad \begin{cases}q+q'=s\\ qq'=s+s'=-1\end{cases}$$

同样可得合理根

$$p=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2},\qquad q=\frac{s'+\sqrt{s'^2+4}}{2}$$

最后计算 r,r'**。同样可知**

$$\begin{cases}r+r'=p\\ rr'=q\end{cases}$$

进而

$$r=x^1+x^{16}=2\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-4q})$$

由于计算只涉及平方根，故正十七边形可用圆规直尺作出。

Gauss 周期函数

$$\begin{aligned}
s(x)&=x^{3^0}+x^{3^2}+\cdots+x^{3^{14}}\\
s'(x)&=x^{3^1}+x^{3^3}+\cdots+x^{3^{15}}\\
p(x)&=x^{9^0}+x^{9^2}+x^{9^4}+x^{9^6}\\
p'(x)&=x^{9^1}+x^{9^3}+x^{9^5}+x^{9^7}\\
q(x)&=x^{3\cdot 9^0}+x^{3\cdot 9^2}+x^{3\cdot 9^4}+x^{3\cdot 9^6}\\
q'(x)&=x^{3\cdot 9^1}+x^{3\cdot 9^3}+x^{3\cdot 9^5}+x^{3\cdot 9^7}
\end{aligned}$$

为Gauss 周期函数，其特点是指数按群的子群的陪集取值。
若限制 x **取** $x^n=1(n=17)$ **的根，则 Gauss 周期函数之间有对称关系**

$$s(x^3)=s'(x),\quad s'(x^3)=s(x)$$

$$p(x^9)=p'(x),\quad p(x^3)=q(x),\quad p(x^{12})=q'(x)$$

等。进而

$$s(x)+s'(x)=\sum_{i=0}^{15}x^{3^i}$$

我们计算

$$[s(x)-s'(x)]^2=A+\sum_{i=0}^{15}a_ix^{3^i}$$

令 $x\to x^3$ **得**

$$[s(x)-s'(x)]^2=A+\sum_{i=1}^{15}a_{i-1}x^{3^i}+a_{15}x^{3^0}$$

可见

$$a_0 = a_1 = \cdots = a^{15} = a$$

从而结合 $s(x)+s'(x)$ 可知，$s(x)s'(x)$ 只出现 $\sum_{i=1}^{16} x^i$ 的组合。

Gauss 的方法可推广到任意 $p = 2^n + 1 (p \in prime)$ 的情况。这要求 $n = 2^m$，即 $p = 2^{2^m} + 1 = F_m$，即Fermat 数。

6 非线性偏微分方程简介

6.1 线性偏微分方程

方程关于所有的未知函数及其导数都是线性的。

几个例子:

一维热传导问题的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = f(x), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

描述波动和振动过程的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f$$

6.2 非线性偏微分方程

拟线性方程

方程关于未知函数及其导数不是线性的。拟线性方程 非线性偏微分方程未知函数的最高阶导数为线性。

对 m 阶的微分方程，若仅关于 m 阶的导数是线性的，而最高阶（m 阶）导数的系数为未知函数及其低阶导数的函数，则称该方程为m 阶拟线性方程。

方程举例

组合 KdV 方程

描述两水平固体壁间密度略有间断的两层流体面上存在的内孤立波模型可以写为

$$u_t + (\alpha u + \beta u^2) u_x + u_{xxx} = 0$$

凝聚态物理中，一维非线性晶格传播波模型与之类似。

热传导方程

热学的热传导问题中的热传导方程（考虑三维情况）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

其中热传导系数 $k \neq Const, k = k(u)$。

Klein-Gordon 方程

非线性 Klein-Gordon 方程的普遍形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V'(u) = 0$$

若

$$V(u) = f_0^2(1 - \cos u), \quad f_0 = Const$$

则得到Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2 \sin u = 0$$

具有扭结 (kink) 和反扭结孤立波解，可以解释许多物理现象，如一维原子链模型、晶格位错的传播、磁体中畴壁运动、超导的约瑟夫结和电荷密度波等。

纳维–斯托克斯 (Navier–Stokes) 方程

描述黏性不可压缩流体动量守恒气体的运动过程:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{V}$$

直角坐标系中的分量形式:

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho f_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho f_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho f_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

其中 u, v, w 是流体再 t 时刻、位置 (x, y, z) 处的速度分量。

非线性 Schrödinger Equation 方程

描述非线性波包现象:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta|u|^2 u = 0$$

极小曲面方程

求定义在一个有界区域的表面积最小的曲面问题，可以转化成通过如下的极小曲面方程求解函数 u:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

关于最高的二阶导数 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 是线性方程，但对于 u_x, u_y 方程是非线性的。
同时考虑 $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ 上式就是一个非线性偏微分方程，称为拟线性二阶微分方程。

非线性偏微分方程的求解——数值解法

缺陷:

1. **只能针对给定的个别初值计算数值解，且只能计算有限次数。但我们需要理解方程解的一般定性特征以实现对问题更深刻的描述，而由数值解无法给出无穷情况下的全局特征。**

2. 数值解本身存在计算不稳定性和解的可靠性问题。

对于 KdV 方程，人们用数值方法找到了孤立波解，也发展了求孤立波解的不同技巧解法：

1. 反散射方法
2. 双线性算子方法
3. 混合指数方法
4. Backlund 变换方法

对某些很特殊的非线性偏微分方程，通过适当的自变量变换和未知函数变换，将其转化成线性偏微分方程来研究，或通过其他数学处理将其化成可求解的方程。

6.3 非线性方程的初等解法举例

基尔霍夫 (Kirchhoff) 变换

考虑非线性方程

$$\nabla\cdot(G(v)\nabla v)=0$$

令

$$\nabla\omega=G(v)\nabla v,\quad \omega=\omega(v)$$

那么由于

$$\nabla\omega=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}v}\nabla v$$

可知

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}v}=G(v)$$

即

$$\omega=\int_{v_0}^{v}G(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

此即基尔霍夫（Kirchhoff）变换。原方程化成了如下的线性拉普拉斯方程

$$\nabla^2\omega=0$$

刘维尔方程

半线性的二阶方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=e^v$$

先考虑齐次方程

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=0$$

通解为

$$v_1(x,y)=f_1(x)+f_2(y)$$

利用 v_1 来构造偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} - \beta e^{\frac{1}{2}(v+v_1)} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial y} - \dfrac{2}{\beta} e^{\frac{1}{2}(v-v_1)} \end{cases}$$

可以证明该方程组的解 v 是原刘维尔方程的解。

相似变换

考虑方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[G(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

设法使方程转变为关于某一新变量的常微分方程。考虑变换

$$\begin{cases} v = v(\zeta) \\ \zeta = x^\alpha t^\beta \end{cases}$$

其中 α, β 为待定系数。由此有

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \beta x^\alpha t^{\beta-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} t^{\beta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[G(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\alpha x^{\alpha-1}t^\beta\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha x^{\alpha-1}t^\beta)G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} + \frac{\partial}{\partial x}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right]\alpha x^{\alpha-1}t^\beta$$

而

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right]\alpha x^{\alpha-1}t^\beta = \alpha x^{\alpha-1}t^\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right]\alpha x^{\alpha-1}t^\beta$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[G(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}t^\beta G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} + \alpha^2 x^{2(\alpha-1)}t^{2\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\zeta}\right]$$

代入一开始的方程可得

$$\beta\frac{x^2}{t}\zeta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} = \alpha(\alpha-1)\zeta G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} + \alpha^2\zeta^2\frac{\mathrm{d}}{\zeta}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right]$$

令 $g(\zeta) = \dfrac{x^2}{t}$，则上式化成常微分方程，仅含变量 ζ：

$$\beta g(\zeta)\zeta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} = \alpha(\alpha-1)\zeta G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} + \alpha^2\zeta^2\frac{\mathrm{d}}{\zeta}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right]$$

若令 $g(\zeta) = \zeta^2$，即 $\zeta = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$，亦即 $\alpha = 1, \beta = -\dfrac{1}{2}$，那么上式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[G(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right] + \frac{\zeta}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} = 0$$

该方程易于求解。
由变换

$$\begin{cases} v = v(\zeta) \\ \zeta = x^{\alpha} t^{\beta} \end{cases}$$

构成的解称为自型解，其中 $\zeta = x^{\alpha} t^{\beta}$ 称为相似变换。上面使用的 $\zeta = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$ 称为Boltzmann变换。
特别地，若 $G(v) = v^{\alpha}$，即方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[v^{n}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

取变换

$$\begin{cases} v = g(\zeta) \\ \zeta = x + ct \end{cases}$$

那么

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta}$$

方程化为简单形式

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[g^{n}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta}\right]$$

两次积分得到

$$v = g(\zeta) = \{n[c(x+ct)+b]\}^{\frac{1}{n}}$$

上述变换即为行波解。

端迹变换

流体力学中的 m 阶拟线性方程组

$$\begin{cases} u_1\dfrac{\partial F}{\partial x} + u_2\dfrac{\partial F}{\partial y} + u_3\dfrac{\partial E}{\partial x} + u_4\dfrac{\partial E}{\partial y} = 0 \\ v_1\dfrac{\partial F}{\partial x} + v_2\dfrac{\partial F}{\partial y} + v_3\dfrac{\partial E}{\partial x} + v_4\dfrac{\partial E}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

其中 $u_i, v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 仅是 F, E 的函数。
该方程组是关于未知函数 $F(x, y), E(x, y)$ 的非线性方程组。
雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(F, E)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial E}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial E}{\partial y} \end{vmatrix} = F_x E_y - E_x F_y \neq 0$$

在流体力学中，由速度向量在 $x-y$ 平面上的端点轨迹引入所谓的端迹变换:

$$\begin{cases} x = x(F, E) \\ y = y(F, E) \end{cases}$$

对 x 求导得到

$$\begin{cases} 1 = x_F F_x + x_E E_x \\ 0 = y_F F_x + y_E E_x \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{y_E}{x_F y_E - x_E y_F} = \dfrac{y_E}{J^{-1}} = J \cdot y_E \\ E_x = -J \cdot y_F \end{cases}$$

同样对 y 求导，可以得到

$$\begin{cases} F_y = -J \cdot x_E \\ E_y = J \cdot x_F \end{cases}$$

由此即可将方程改写为

$$\begin{cases} u_1 \dfrac{\partial y}{\partial E} - u_2 \dfrac{\partial x}{\partial E} - u_3 \dfrac{\partial y}{\partial F} + u_4 \dfrac{\partial x}{\partial F} = 0 \\ v_1 \dfrac{\partial y}{\partial E} - v_2 \dfrac{\partial x}{\partial E} - v_3 \dfrac{\partial y}{\partial F} + v_4 \dfrac{\partial x}{\partial F} = 0 \end{cases}$$

此时为未知函数 $x(F, E), y(F, E)$ 的线性方程组。

6.4 非线性演化方程与孤立波

若用非线性微分方程描述随时间演变的物理过程，则称其为**线性演化（发展）方程**。
可以使用多种代数解法，如利用方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[v^n \frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

的行波解，可以用来处理非线性演化方程。

Burgers 方程

具有一定代表性的非线性的耗散方程，源于湍流理论研究，可用来描述具有有限电导的磁波流方程、粘弹性流体管中的波、黏性介质中的波。
Burgers 方程的一般形式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数。
取行波解

$$v = v(\zeta), \quad \zeta = x - ct$$

由于

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\zeta^2}$$

Burgers 方程成为

$$\alpha \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\zeta^2} + c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} - v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta} = 0$$

对 ζ 积分一次得到

$$\alpha\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}+cv-\frac{1}{2}v^2=\frac{B}{2}$$

其中 B 为积分常数，亦即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{1}{2\alpha}(v^2-2cv+B)$$

若 $c^2-B>0$，那么

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{(v-v_1)(v-v_2)}{2\alpha},\qquad\begin{cases}v_1=c+\sqrt{c^2-B}\\ v_2=c-\sqrt{c^2-B}\end{cases}$$

即

$$v=\frac{v_1+v_2}{2}-\frac{v_1-v_2}{2}\tanh\frac{v_1-v_2}{4a}(\zeta-\zeta_0')$$

其中 ζ_0' 是积分常数。此即 Burger 方程的行波解。

注意到波速 $c=\dfrac{v_1+v_2}{2}$，而波幅 $\dfrac{v_1-v_2}{2}=\sqrt{c^2-B}$，

也就是说"孤立波"传播的速度与振幅有关，这是非线性本征模式的典型特性。

不难验证

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{v=v_1}=\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{v=v_2}=0,\quad v|_{\zeta=\zeta_0'}=c,\quad v|_{\xi\to-\infty}=v_1$$

我们把上面这种解称为定态解，亦即冲击波 (Shock Wave) 解。

线性化的 Burgers 方程:

$$v_t-\alpha v_{xx}=0$$

其解为

$$v(x,t)=A+Be^{-\frac{c}{\alpha}\zeta}$$

当 $\zeta\to-\infty$ 时，$v(x,t)\to+\infty$；当 $\zeta\to+\infty$ 时，$v(x,t)\to A$。

亦即线性化方程不可能有定态解。

非线性方程的冲击波解的平衡点 $v=v_1,v_2$ 的稳定性

二阶方程

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\zeta^2}+c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}-v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}=0$$

可改写为一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&\dfrac{1}{\alpha}(v-c)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ w\end{pmatrix},\qquad w=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}$$

在平衡点 $v=v_1$ 处系数矩阵的特征值

$$\lambda_1^{(1)}=0,\quad\lambda_2^{(1)}=\frac{v_1-c}{\alpha}=\frac{\sqrt{c^2-A}}{\alpha}>0$$

即 $v=v_1$ 是不稳定平衡点。而 $v=v_2$ 的特征值

$$\lambda_1^{(2)}=0,\quad\lambda_2^{(2)}=\frac{v_2-c}{\alpha}=-\frac{\sqrt{c^2-A}}{\alpha}<0$$

即 $v=v_2$ 是稳定平衡点。

孤立子(soliton)

孤立子是一个演化(发展)方程的孤立波,在与其他孤立波相互碰撞或作用后,除了位相发生变化外,如同刚性粒子那样其形状和速度仍保持不变。若相互作用后孤立波的波形受到破坏或其速度发生了变化,就不能称为孤立子。
孤立子是一种特殊的相干结构,是发展方程中色散与非线性两种作用相互平衡的结果。
举例:钟形孤立子、环形孤立子、扭状孤立子、包络孤立子、反孤立子、哨孤立子、呼吸孤立子

KdV 方程的行波解

在一个浅水表面上按一个方向传播的方程:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)$$

其中 $\sigma=\frac{l^2}{3}-\frac{Tl}{\rho g}$ **为常数,**l **为沟道深度,**T **为表面张力,**ρ **为流体密度。**
令

$$\eta=B\sigma u,\quad \xi=\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}}x,\quad \tau=\sqrt{\frac{2\alpha^3 g}{\sigma l}}t$$

可得KdV 方程

$$u_t+u_\xi+12uu_\xi+u_{\xi\xi\xi}=0$$

一大类描述非线性过程的波动方程或方程组,通过长波近似和小振幅假定可以归结为 KdV 方程。
KdV 方程的一般形式取为

$$u_t+uu_x+\alpha u_{xxx}=0$$

当 $\alpha<0$ **时可作变换**

$$u\to -u,\quad x\to -x,\quad t\to t$$

化为

$$u_t+uu_x-\alpha u_{xxx}=0$$

因此可假设方程中 $\alpha>0$**。**
令 $u=\varphi(\xi),\xi=x-ct+\xi_0$**,**$\xi_0$ **为位相因子,对** ξ **积分一次得到**

$$-c\varphi+\frac{1}{2}\varphi^2+\alpha\varphi''=A$$

两端乘以 φ' **再积分一次得到**

$$-3\alpha(\varphi')^2=\varphi^3-3c\varphi^2-6A\varphi-6B$$

令

$$f(\varphi)=\varphi^3-3c\varphi^2-6A\varphi-6B$$

Jacobi 余弦函数解 由 Jacobi 椭圆函数定义,可以证明方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=A(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),\quad A>0,y_3\le y_2\le y_1$$

有解

$$y = y_2 - (y_2 - y_3)\operatorname{cn}^2\left[\sqrt{\frac{A}{4}(y_1 - y_3)}(x + x_0), r_1\right]$$

类似地，方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = -A(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3), \quad A > 0, y_3 \le y_2 \le y_1$$

有解

$$y = y_2 + (y_1 - y_2)\operatorname{cn}^2\left[\sqrt{\frac{A}{4}(y_1 - y_3)}(x + x_0), r_2\right]$$

其中模数

$$r_1 = \sqrt{\frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3}}$$

且出现了Jacobi 椭圆余弦函数cn**，**x_0 **是任意常数。**
假定前面 $f(\varphi)$ **有三个实的零点** $\varphi_3 \le \varphi_2 \le \varphi_1$**，那么前面方程可改写为**

$$-3\alpha(\varphi')^2 = (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)(\varphi - \varphi_3)$$

同时由 Vieta 定理有

$$c = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{3}, \quad A = -\frac{\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_3 + \varphi_3\varphi_1}{6}, \quad B = \frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{6}$$

那么 KdV 方程的解可表示为

$$u(x,t) = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2)\operatorname{cn}^2\left[\sqrt{\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{12\alpha}}(x - ct + \xi_0^*), r\right]$$

其中

$$r = \sqrt{\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_3}}$$

钟状孤立波解 选适当的积分常数 A, B **使得** $\varphi_2 = \varphi_3$**，此时由于** $r \to 1$**，椭圆余弦波解退化为钟状孤立波**

$$u(x,t) = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2)\operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{12\alpha}}(x - ct + \xi_0^*)\right]$$

特别地，取 $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$**，则** $\varphi_1 = 3c$**，得**

$$u(x,t) = 3c\operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{c}{4\alpha}}(x - ct + \xi_0^*)\right]$$

该孤立波的振幅为 $3c$**，宽度** $\dfrac{4\alpha}{c}$**，它在向右传播时** $c > 0$ **速度与形状保持不变。不难看出该孤立波的振幅与波速成正比。波速越高，波形越窄。或者说，大波总是比小波速度快。**

6.5 Hopf-Cole 变换

函数的非线性变换是求解非线性偏微分方程的有效方法。

Burgers 方程的 Hopf-Cole 变换

重写 Burgers 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

它是在线性扩散方程的基础上增加了一项非线性项 $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$**。**
思路是涉及一个非线性变换将 Burgers 方程与线性扩散方程相联系，化为

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

为此将 $u=\dfrac{\partial w}{\partial x}$ **代入 Burgers 方程，积分一次得到**

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

由于要寻求 $w\to 0$ **即** $x\to\pm\infty$ **的解，因此取积分常数为零。**
将非线性变换 $v=f(w)$ **代入线性方程**

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\alpha f''}{f'}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

令 $\alpha\dfrac{f''}{f'}=-\dfrac{1}{2}$**，亦即**

$$f(w)=a+be^{-\frac{w}{2\alpha}}$$

再令 $a=0,b=1$ **得到**

$$w=-2\alpha\ln v$$

故通过非线性变换

$$u=\frac{\partial w}{\partial x}=-2\alpha\frac{\partial\ln v}{\partial x}$$

将 Burgers 方程化成了线性扩散方程。只需知道该方程的一个解，就可得到 Burgers 方程的解。

高维方程及方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\alpha\nabla^2 u_i,\quad i=1,2,3$$

类似作变换 $\boldsymbol{u}=-2\alpha\nabla\ln v$ **可将原方程化为线性方程** $v_t=\alpha\nabla^2 v$**。**

KdV 方程的广义 Hopf-Cole 变换

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

与 Burgers 方程只差一阶导数，应该存在类似的 Hopf-Cole 变换将 KdV 方程线性化。令

$$u=\frac{\partial w}{\partial x},\quad w=-2\frac{\partial \ln v}{\partial x}$$

即广义 Hopf-Cole 变换

$$u=-2\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}$$

将 $u=\dfrac{\partial w}{\partial x}$ **代入 KdV 方程并关于** x **积分一次:**

$$\frac{\partial w}{\partial t}-3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

已令积分常数为零。再代入 $w=-2\dfrac{\partial \ln v}{\partial x}$**，**

$$\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x \partial t}-6\left(\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^4 \ln v}{\partial x^4}=0$$

微分展开后乘以 v^2**，**

$$v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]=0$$

首先我们并不直接求解。尝试取

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0,\quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0$$

后一式可以改写成

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1}\right]=0$$

亦即

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1}=Const=-\eta$$

即 v **满足两个线性方程**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0\\ \eta\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{cases}$$

另外，也可以直接求解双线性形式的 KdV 方程

$$v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]=0$$

思路：引入形式常数 ε**，作级数展开**

$$v=1+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_i$$

若上述级数是截断的, 仅需令 $\varepsilon=1$ 即可得到解。
将级数代入双线性 KdV 方程并按 ε 幂次分类:
对 ε^1,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)=0$$

对 ε^2,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)=\left(-v_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)-3\left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right]$$

对 ε^3,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right)=\left(-v_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)-3\left[2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}-\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}-\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right]$$

等等。
取第一个式子的解为

$$v_1=a_1e^{2(k_1x-\omega_1t)}+a_2e^{2(k_2x-\omega_2t)},\quad \omega_1=4k_1^3,\omega_2=4k_2^3$$

将该解代入第二式, 则第一项为零, 那么

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)=48k_1k_2(k_1-k_2)^2a_1a_2e^{2(k_1+k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t}$$

求一个特解

$$v_2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2a_1a_2e^{2(k_1+k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t}$$

将 v_1,v_2 代入第三式得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right)=0$$

取该式特解 $v_3=0$, 同理可得 $v_i=0,i\geq 3$。因此原级数是截断的。
只要令 $\varepsilon=1$ 即可得到 KdV 方程双线性形式的一个解为

$$v=1+a_1e^{2\theta_1}+a_2e^{2\theta_2}+a_3e^{2(\theta_1+\theta_2)}$$

其中

$$a_3=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2a_1a_2,\quad \theta_1=k_1x-\omega_1t,\quad \theta_2=k_2x-\omega_2t$$

由广义 Hopf-Cole 变换得到

$$w=-4\frac{a_1k_1e^{2\theta_1}+a_2k_2e^{2\theta_2}+a_3(k_1+k_2)e^{2(\theta_1+\theta_2)}}{1+a_1e^{2\theta_1}+a_2e^{2\theta_2}+a_3e^{2(\theta_1+\theta_2)}}$$

此即 KdV 方程的双“孤波”解。

KdV-Burgers 方程的广义 Hopf-Cole 变换

将两个方程组合起来

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

$\alpha\neq 0,\beta=0$ **时还原为 Burgers 方程；**
$\alpha=0,\beta\neq 0$ **时作变换** $x'=\beta^{-\frac{1}{3}}x, u'=-\beta^{-\frac{1}{3}}\frac{u}{6}$ **即可还原为标准化的 KdV 方程。**
对一般情况，取广义 Hopf-Cole 变换为

$$u=\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad \omega=-\frac{12}{5}\alpha\ln v+12\beta\frac{\partial\ln v}{\partial x}$$

整理后得到KdV-Burgers 方程的双线性形式

$$\left(\frac{\alpha}{5}v-\beta v\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-3\beta^2\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]-\frac{\alpha}{5}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{5}\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0$$

若同时成立

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-\alpha\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0\\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0\Rightarrow\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\eta\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\alpha}{5}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\end{cases}$$

即 v **满足三个线性方程，则通过广义 Hopf-Cole 变换形成的** u **一定是 KdV-Burgers 方程的一个解。**

6.6 Sine-Gordon 方程与 Hirota 方法

Sine-Gordon 方程与 Bäcklund 变换

Sine-Gordon 方程

$$\phi_{xx}-\phi_{tt}=\sin\phi$$

坐标或者自变量变换:

$$\xi=\frac{x-t}{2},\quad \tau=\frac{x+t}{2}$$

得到

$$\phi_{\xi\tau}=\sin\phi$$

取其两个独立解（特解）

$$\phi=u+v,\quad \tilde{\phi}=u-v$$

考虑一对方程，变量为 $u(\xi,\tau),v(\xi,\tau)$**，**

$$\begin{cases}u_\xi=f(v)\\ v_\tau=g(u)\end{cases}$$

分别对 ξ,τ **求导得到**

$$\begin{cases}u_{\xi\tau}=g(u)f'(v)\\ v_{\tau\xi}=f(v)g'(u)\end{cases}$$

两方程相加减

$$\begin{cases}(u+v)_{\xi\tau}=g(u)f'(v)+g'(u)f(v)\\(u-v)_{\xi\tau}=g(u)f'(v)-g'(u)f(v)\end{cases}$$

由于 $\phi=u+v,\tilde{\phi}=u-v$ 是原方程的两独立解，要求

$$\begin{cases}\sin(u+v)=g(u)f'(v)+g'(u)f(v)\\\sin(u-v)=g(u)f'(v)-g'(u)f(v)\end{cases}$$

两式相加减得到

$$\begin{cases}g(u)f'(v)=\sin u\cos v\\g'(u)f(v)=\cos u\sin v\end{cases}$$

分别分离变量

$$\begin{cases}\dfrac{g(u)}{\sin u}=\dfrac{\cos v}{f'(v)}=\alpha\Rightarrow g(u)=\alpha\sin u\\\dfrac{f(v)}{\sin v}=\dfrac{\cos u}{g'(u)}=\beta\Rightarrow f(v)=\beta\sin v=\frac{1}{\alpha}\sin v\end{cases}$$

因

$$u=\frac{1}{2}(\phi+\tilde{\phi}),\quad v=\frac{1}{2}(\phi-\tilde{\phi})$$

那么由 $u_\xi=f(v),\quad v_\tau=g(u)$ 得到

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\phi+\tilde{\phi})_\xi=\dfrac{1}{\alpha}\sin\dfrac{1}{2}(\phi-\tilde{\phi})\\\dfrac{1}{2}(\phi-\tilde{\phi})_\xi=\alpha\sin\dfrac{1}{2}(\phi+\tilde{\phi})\end{cases}$$

此即 Sine-Gordon 方程的Bäcklund变换，$\phi,\tilde{\phi}$ 为 Sine-Gordon 方程 $\phi_{\xi\tau}=\sin\phi$ 的两个特解。
若 Sine-Gordon 方程 $\phi_{\xi\tau}=\sin\phi$ 有某一特解 $\tilde{\phi}$，则代入 Bäcklund 变换后所得的 ϕ 也是方程的特解。
方程的一个特解为：$\tilde{\phi}=0$
代入变换有

$$\begin{cases}\phi_\xi=\dfrac{2}{\alpha}\sin\dfrac{\phi}{2}\\\phi_\tau=2\alpha\sin\dfrac{\phi}{2}\end{cases}$$

由第一式解出

$$\phi=4\arctan e^{\frac{\xi}{\alpha}+c(\tau)}$$

再由第二式确定

$$c(\tau)=\alpha\tau+\delta$$

得到方程的解为

$$\phi=4\arctan e^{\frac{\xi}{\alpha}+\alpha\tau+\delta}$$

分别对 ξ,τ 求导，有下式形式

$$\phi_\xi=\frac{4}{\alpha}\operatorname{sech}[a(x-bt)+\delta],\quad\phi_\tau=4\alpha\operatorname{sech}[a(x-bt)+\delta]$$

二者均为孤波，故猜想 Sine-Gordon 方程的解也是孤波解。
由 ϕ 的解，变回原变量 (x,t) 得到原方程的一个特解

$$\phi = 4\arctan e^{a(x-bt)+\delta}$$

其中

$$a = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha}, \quad b = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+1}$$

这个解是个“扭结”，表示出 ϕ 的一个扭弯。

Hirota 方法

基本思想：在函数变换中同时引入两个未知函数，然后通过选择一个或两个函数间的某种关系，使原非线性方程化为双线性方程。
引入双线性算子

$$D_t^m D_x^n(f,g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x,t)g(x',t')\bigg|_{x'=x,t'=t}$$

其中 m,n 为非负整数。例如

$$D_t(f,g) = D_t^1D_x^0(f,g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) f(x,t)g(x',t')\bigg|_{x'=x,t'=t} = g\frac{\partial f}{\partial t} - f\frac{\partial g}{\partial t}$$

$$D_x(f,g) = D_t^0D_x^1(f,g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x,t)g(x',t')\bigg|_{x'=x,t'=t} = g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$D_x^2(f,g) = D_t^0D_x^2(f,g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 f(x,t)g(x',t')\bigg|_{x'=x,t'=t} = g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$D_x^3(f,g) = D_t^0D_x^3(f,g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^3 f(x,t)g(x',t')\bigg|_{x'=x,t'=t} = g\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}$$

$$D_tD_x(f,g) = D_t^1D_x^1(f,g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x,t)g(x',t')\bigg|_{x'=x,t'=t} = g\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x} + f$$

在该迅速按中，f,g 不能随意交换次序。例如

$$D_t(f,g) = g\frac{\partial f}{\partial t} - f\frac{\partial g}{\partial t}, \quad D_t(f,g) = f\frac{\partial g}{\partial t} - g\frac{\partial f}{\partial t}, \quad D_t(f,g) = -D_t(g,f)$$

以下关系存在：

$$D_t(f,f) = 0, \quad D_x(f,f) = 0, \quad D_x^3(f,f) = 0, \quad D_x^2(f,f) = 2\left[f\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]$$

Hirota 方法的基本过程

现在引入两个未知函数 f,g，作函数变换：$w(x,t) = \dfrac{g(x,t)}{f(x,t)}$，那么不难计算得到

$$w_t = \frac{D_t(g,f)}{f^2}, \quad w_x = \frac{D_x(g,f)}{f^2}, \quad w_{xx} = \frac{D_x^2(g,f) - 2(\ln f)_{xx}gf}{f^2}, \quad w_{xxx} = \frac{D_x^3(g,f) - 6(\ln f)_{xx}D_x(g,f)}{f^2}$$

若 $g=f$ **则有**

$$w_{xx}=0 \Rightarrow 2(\ln f)_{xx}=\frac{D_x^2(f,f)}{f^2}$$

举个例子, 考虑前面的方程

$$\frac{\partial w}{\partial t}-3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

代入 w_t, w_x, w_{xxx} **并乘以** f^2 **得到**

$$D_t(g,f)-3\left[\frac{D_x(g,f)}{f}\right]^2+D_x^2(g,f)-3\frac{D_x^2(f,f)D_x(g,f)}{f^2}=0$$

引入一个任意常数 λ**,**

$$[D_t(g,f)+3\lambda D_x(g,f)+D_x^3(g,f)]-3\frac{D_x(g,f)}{f^2}[D_x(g,f)+\lambda f^2+D_x^2(f,f)]=0$$

由于 g,f **均未知, 因此要求**

$$[D_t+3\lambda D_x+D_x^3](g,f)=0, \quad [D_x^2+\lambda](f,f)+D_x(g,f)=0$$

令 $\lambda=0$ **得到**

$$D_x(g,f)=-D_x^2(f,f)=-2f^2(\ln f)_{xx}$$

因此

$$\left(\frac{g}{f}\right)_x=\frac{D_x(g,f)}{f^2}=-2(\ln f)_{xx}=-2\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x$$

由此得到 f,g **的关系**

$$g=-2\frac{\partial f}{\partial x}$$

即

$$w(x.t)=-2\frac{\partial \ln f}{\partial x}$$

此即原先的 Hopf–Cole 变换:

$$w=-2\frac{\partial \ln v}{\partial x}, \quad u=\frac{\partial w}{\partial x}$$

而此时另一个式子

$$[D_t+D_x^3](g,f)=0 \Rightarrow (D_t+D_x^3)(f_x,f)=0$$

计算得到

$$D_x(D_t+D_x^3)(f,f)=0$$

此即 KdV 方程的双线性形式, 同时也得到了 Hopf–Cole 变换。