

动态法测定良导体的热导率

杨轶

March 2024

1 数据及处理

实验参量：相邻热电偶间距 $l_0 = 2.00 \text{ cm}$ ，热端周期 $T_{period} = 180 \text{ s}$ ，冷端水流量 0.3 L/min ，热端水流量 0.5 L/min ，铝比热 $c_{Al} = 897 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ，铝密度 $\rho_{Al} = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

1.1 实验曲线

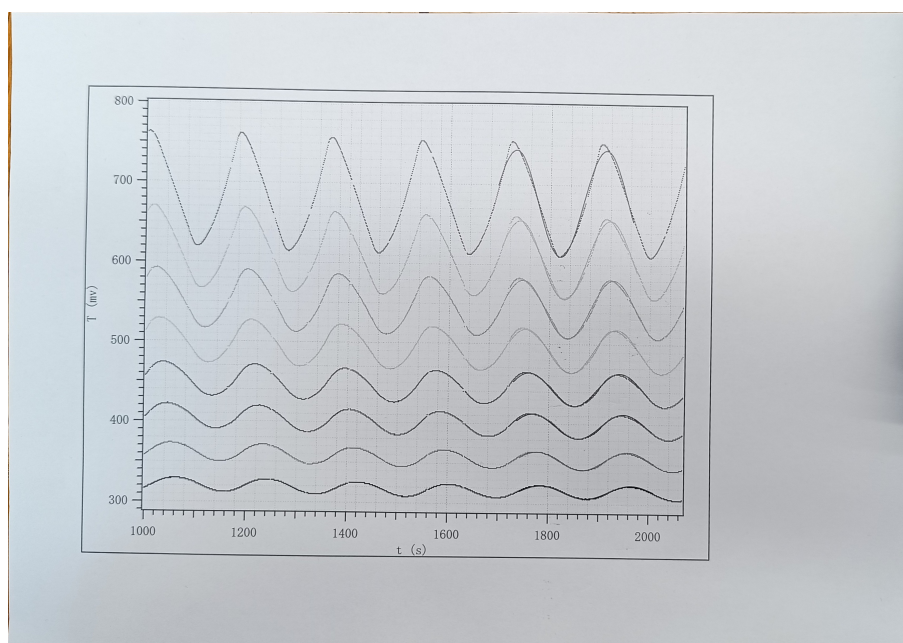


图 1: 打印的 5 组实验曲线

为判断动态稳定，五组的峰峰值差距不超过 2%

i	1	2	3	4	5
T_M/mV	761.9	756.8	754.6	754.6	751.8
T_m/mV	619.5	614.4	612.7	612.7	610.5
$\Delta T/\text{mV}$	142.5	142.4	141.9	141.9	141.3

表 1: 峰峰值温差

$$\overline{\Delta T} = 142.0 \text{ mV} \quad (1)$$

$$\Delta T_{max} = 1.2 \text{ mV} < 2\% \times \overline{\Delta T} = 2.84 \text{ mV} \quad (2)$$

可以认为已达到动态稳定。

1.2 最小二乘法计算

1.2.1 峰值

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i/s	1551.1	1559.7	1566.8	1574.2	1581.3	1589.3	1597.7	1606.0
$\Delta t = t_i - t_1/\text{s}$	0.0	8.6	15.7	23.1	30.2	38.2	46.6	54.9

表 2: 一组曲线中峰值与其对应时间

线性拟合 $\Delta t = a_1 + b_1 i$, 有截距

$$a_1 = -7.6 \pm 0.5\text{s} \quad (3)$$

斜率

$$b_1 = 7.72 \pm 0.09\text{s} \quad (4)$$

相关系数

$$r_1 = 0.9996 \quad (5)$$

波速

$$v_1 = \frac{l_0}{b_1} \quad (6)$$

热导率

$$\kappa_1 = \frac{v_1^2 c_{Al} \rho_{Al}}{4\pi} T_{period} = \frac{l_0^2 c_{Al} \rho_{Al}}{4\pi b_1^2} T_{period} = 233 \pm 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (7)$$

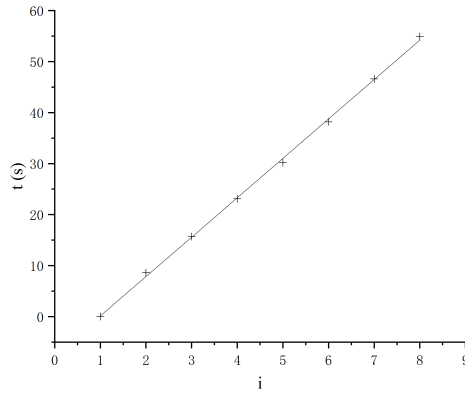


图 2: 峰值对应时间 $\Delta t - i$ 图

1.2.2 第一组谷值

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i/s	1640.5	1648.9	1655.9	1663.1	1670.1	1677.9	1686.4	1694.6
$\Delta t = t_i - t_1/s$	0.0	8.4	15.4	22.6	29.6	37.4	45.9	54.1

表 3: 一组曲线中谷值与其对应时间

线性拟合 $\Delta t = a_2 + b_2 i$, 有截距

$$a_2 = -7.6 \pm 0.6s \quad (8)$$

斜率

$$b_2 = 7.61 \pm 0.11s \quad (9)$$

相关系数

$$r_2 = 0.9995 \quad (10)$$

波速

$$v_2 = \frac{l_0}{b_2} \quad (11)$$

热导率

$$\kappa_2 = \frac{v_2^2 c_{Al} \rho_{Al}}{4\pi} T_{period} = \frac{l_0^2 c_{Al} \rho_{Al}}{4\pi b_2^2} T_{period} = 240 \pm 7 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \quad (12)$$

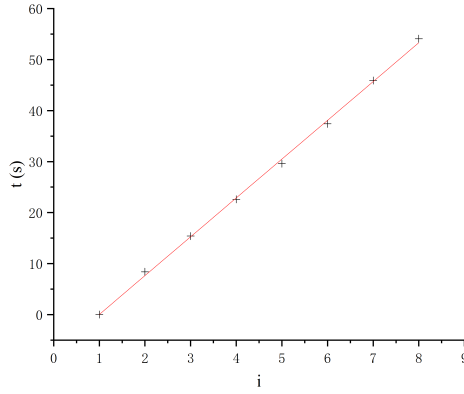


图 3: 谷值对应时间 $\Delta t - i$ 图

1.2.3 第二组谷值

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i/s	1820.5	1829.0	1836.0	1843.3	1850.4	1858.3	1866.6	1874.9
$\Delta t = t_i - t_1/s$	0.0	8.5	15.5	22.8	29.9	37.8	46.1	54.4

表 4: 另一组曲线中谷值与其对应时间

线性拟合 $\Delta t = a_3 + b_3 i$, 有截距

$$a_3 = -7.6 \pm 0.5s \quad (13)$$

斜率

$$b_3 = 7.65 \pm 0.09s \quad (14)$$

相关系数

$$r_3 = 0.9996 \quad (15)$$

波速

$$v_3 = \frac{l_0}{b_3} \quad (16)$$

热导率

$$\kappa_3 = \frac{v_3^2 c_{Al} \rho_{Al}}{4\pi} T_{period} = \frac{l_0^2 c_{Al} \rho_{Al}}{4\pi b_3^2} T_{period} = 237 \pm 6 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (17)$$

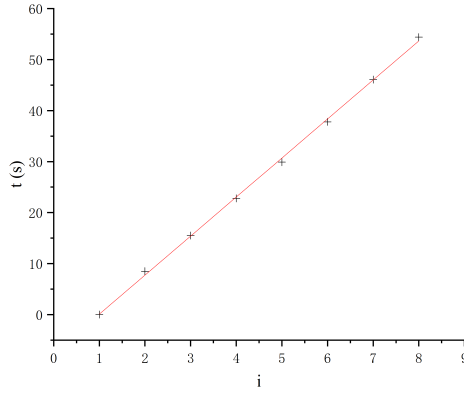


图 4: 另一组谷值对应时间 $\Delta t - i$ 图

1.3 通过峰峰值衰减计算

书上式 (25.5) 可得峰峰值

$$T_{pp} = 2T_m \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right) \quad (18)$$

其中

$$\alpha = \frac{\kappa}{c\rho} \quad (19)$$

对式 18 两边取对数 (可先将温度无量纲化), 有

$$\ln T_{pp} = \ln(2T_m) - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x \quad (20)$$

将式 19 与 $\omega = \frac{2\pi}{T_{period}}$ 代入得

$$\ln T_{pp} = \ln(2T_m) - \sqrt{\frac{\pi c\rho}{\kappa T_{period}}}x \quad (21)$$

又 $x = x_0 + l_0 i$, 有

$$\ln T_{pp} = \ln(2T_m) - \sqrt{\frac{\pi c \rho}{\kappa T_{period}}}(x_0 + l_0 i) \quad (22)$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T_M/mV	754.5	661.1	582.9	519.8	464.1	412.3	365.0	323.4
T_m/mV	610.4	558.1	508.0	464.1	422.5	381.9	343.1	306.5
$T_{pp} = T_M - T_m/\text{mV}$	144.1	103.0	74.9	55.7	41.6	30.4	21.9	16.9
$\ln T_{pp}$	4.971	4.635	4.316	4.020	3.728	3.414	3.086	2.827

表 5: 一组曲线的最大值与最小值即峰峰值

线性拟合 $\ln T_{pp} = a + bi$, 根据式 22, 有

$$b = -\sqrt{\frac{\pi c \rho}{\kappa T_{period}}} l_0 \quad (23)$$

故热导率计算式为

$$\kappa = \frac{\pi c \rho l_0^2}{b^2 T_{period}} \quad (24)$$

对表 5 中数据进行处理后, 得到斜率

$$b = -0.306 \pm 0.003 \quad (25)$$

相关系数

$$r = -0.9997 \quad (26)$$

将式 25 代入式 24 中可得

$$\kappa = \frac{\pi c \rho l_0^2}{b^2 T_{period}} = 180 \pm 4 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad (27)$$

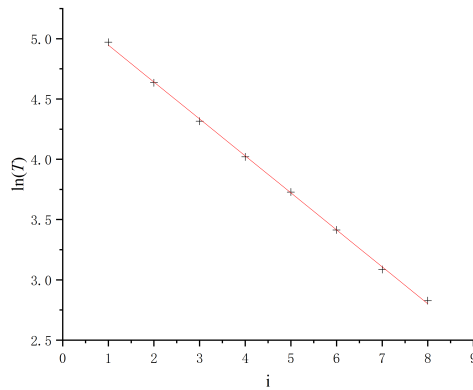


图 5: $\ln T_{pp} - i$ 曲线

2 分析与讨论

2.1 关于最小二乘法三个结果的讨论

通过最小二乘法得到的三个 κ 值（式 7、式 12、式 17）与标准值 $\kappa_0 = 237 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 相符的很好，均在误差允许范围内。但实验值所得的相对误差均较大，而最小二乘法线性拟合的误差是来源于峰值或谷值对应时间 t_i 测量所带来的，而 t_i 的测量均是通过实验室电脑上自动读数的软件获得的，软件在获取极大值时可能会因为局部波动而读取错误，所以我认为较大的相对误差可能是来源于 t_i 的测量。

2.2 关于衰减法得到结果的讨论

通过衰减法得到的结果（式 27）与标准值 κ_0 相去甚远，但是最小二乘法的线性相关性是很好的（式 26），故实验得到的数据是可以认为很良好的，而公式推导（式 24）也是没有问题的，式 24 所涉及的参量只有可能是谐波基频 $\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{period}}}$ 出现问题，因为其他参量均是参考值与计算值。

谐波频率出现问题可能是因为此时高次谐波并没有全部衰减为 0（书上 297 页式 (25.9)），此时还残留有高次谐波项，此时式 24 应修正为

$$\kappa = \frac{k\pi c\rho l_0^2}{b^2 T_{\text{period}}} \quad (28)$$

其中 $k = \frac{\kappa_0}{\kappa} = 1.32$ 。但是我认为这样的修正是不正确的，因为高次谐波的线性叠加并不是在 e 指数上进行的，而只有在 e 指数上进行的线性叠加我们才有可能得到很好的线性相关度（26），所以这样的解释是不正确的。

一种可能的解释是书上公式 (25.5) 中的衰减项并不是正确的。由于算出的 κ 偏小，则在实际中的衰减系数是比 (25.5) 中的 $\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$ 偏大的，这可能是其他效应带来的额外的随着距离同样是指数形式的衰减。有可能是铝棒并不是绝热的，这会导致铝棒与空气有热量交换，这是会带来相应的衰减的。不妨设由于其他效应带来的衰减系数为 γ ，可以计算出

$$\gamma = -\frac{b}{l_0} - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} = -\frac{b}{l_0} - \sqrt{\frac{\pi c\rho}{\kappa_0 T_{\text{period}}}} = 1.94 \quad (29)$$

对比理论中衰减系数

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi c\rho}{\kappa_0 T_{\text{period}}}} = 13.35 \quad (30)$$

此时修正后的温度 T 随 x 的变化为

$$T = T_0 - kx + T_m \exp\left(-\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} + \gamma\right)x\right) \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right) \quad (31)$$

姓名 杨帆		学号 2300011403		星期 第 组		页码 /			
$l_0 = 2.00 \text{ cm}$		$T_{\text{ambient}} = 18.0^\circ\text{C}$		水流量 0.3 L/min		6.5 L/min			
$C_{\text{Al}} = 0.897 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$		$\rho_{\text{Al}} = 2.70 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$		$\lambda_{\text{Al}} = 2.37 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$					
一.	i	1	2	3	4	5	6		
	t/s	2262.80	2271.66	2278.75	2284.95	2292.04	2300.90		
	T/mV	757.8	665.5	588.1	525.0	469.9	418.7		
		7	8						
		2309.77	2316.86						
		370.9	328.1						
二.	i	1	2	3	4	5	6	7	8
	t/s	2083.35	2091.33	2097.53	2105.51	2113.49	2120.58	2128.55	2137.42
	T/mV	761.6	668.7	529.3	528.7	473.6	422.1	374.9	332.1
三.	i	1	2	3	4	5	6	7	8
	t/s	1902.64	1910.61	1917.70	1928.02	1931.00	1938.09	1948.07	1956.70
	T/mV	764.1	672.4	595.8	531.3	478.5	427.3	378.3	335.6
四.	i	1	2	3	4	5	6	7	8
	t/s	1996.58	2005.44	2013.42	2021.40	2030.26	2039.12	2046.21	2055.96
	T/mV	605.5	557.7	511.5	469.9	430.9	392.1	351.6	315.0
五.	i	1	2	3	4	5	6	7	8
	t/s	2177.38	2184.47	2194.22	2202.19	2210.17	2218.15	2227.0	2234.99
	T/mV	602.9	555.1	507.6	466.8	426.0	387.2	347.8	311.2

图 6: 课上实验记录 1

	姓名	学号	星期	第	组	页码			
峰峰值	i	1	2	3	4	5	6	7	8
ΔT_m	0754.5	661.1	582.9	519.8	464.1	412.3	365.0	322.4	306.5
(mV)	T_m	610.4	558.1	508.0	464.1	422.5	381.9	343.1	
ΔT									
峰	i	1	2	3	4	5	6	7	8
t/s	1551.1	1559.7	1566.8	1574.2	1581.3	1589.3	1597.7	1606.0	
谷1	i	1	2	3	4	5	6	7	8
t/s	1640.5	1648.9	1655.9	1663.1	1670.1	1677.9	1686.4	1694.6	
谷2	i	1	2	3	4	5	6	7	8
t/s	1820.5	1829.0	1836.0	1844.3	1852.4	1860.3	1866.6	1874.9	
峰峰值	T_m	761.9	756.8	754.6	754.6	751.8			
(mV)	T_m	614.4 619.5	612.7 612.7	612.7	612.7 612.7	609.5 610.5			
ΔT		147.5 142.5	144.1 142.4	143.9 141.9	143.1 141.9	142.4 141.3			

图 7: 课上实验记录 2