

弦上驻波实验

杨轶

March 2024

1 数据及处理

1.1 弦线线密度

弦线直径: $d_0 = 1.167 \text{ mm}$, 样品弦直径: $d = 1.165 \text{ mm}$

样品弦长度: $l_1 = 132.5 \text{ mm}$, $l_2 = 900.0 \text{ mm}$

$$l = l_2 - l_1 = 767.5 \text{ mm} \quad (1)$$

样品弦质量:

$$m = 5.52 \text{ g} \quad (2)$$

弦线线密度:

$$\mu = \frac{m}{l} = 7.192 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \quad (3)$$

1.2 共振频率与驻波波腹个数的关系

弦线有效长度 $L = 60.0 \text{ cm}$, 重力加速度 $g = 9.801 \text{ m/s}^2$, 砝码质量 $M = 1.000 \text{ kg}$, 张力 $T = 3Mg = 29.403 \text{ N}$ 。

表 1 中 f_c 为共振频率的理论计算值, 有

$$f_c = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (4)$$

f_e 为共振频率的实验测量值。 v_c 是波速的理论计算值, 有

$$v_c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (5)$$

v_e 为波速的实验测量值, 有

$$v_e = f\lambda = f \times \frac{2L}{n} \quad (6)$$

n	f_c/Hz	f_e/Hz	$\frac{\Delta f}{f_c}/\%$	$v_c/(\text{m/s})$	$v_e/(\text{m/s})$	$ \frac{\Delta v}{v_c} /\%$
1	53.3	54.6	2.4	63.94	65.52	2.47
2	106	109.2	3.0	63.94	65.52	2.47
3	160	168.2	5.1	63.94	67.28	5.22

表 1: 共振频率与驻波波腹个数的关系表

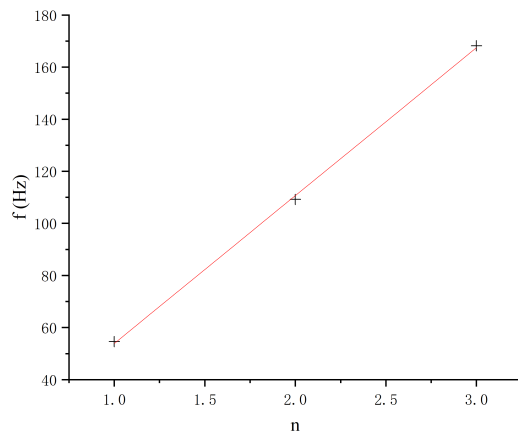


图 1: 共振频率与驻波波腹个数的关系图

1.3 共振频率与弦线张力的关系

弦线有效长度 $L = 60.0 \text{ cm}$, 波腹数量 $n = 1$, 弦线线密度 $\mu = 7.192 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ 。

T/N	f_c/Hz	f_e/Hz	$\left \frac{\Delta f}{f_c}\right /\%$	$\ln T$	$\ln f_e$
9.801	30.8	32.5	5.5	2.2825	3.481
19.602	43.5	46.4	6.7	2.97563	3.837
29.403	53.3	54.9	3.0	3.38110	4.006
39.204	61.5	63.5	3.3	3.66878	4.151
49.005	68.8	71.2	3.5	3.89192	4.265

表 2: 共振频率与弦线张力的关系表

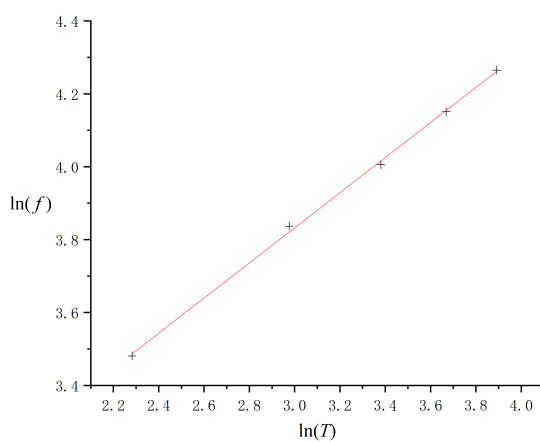


图 2: $\ln f$ 与 $\ln T$ 关系图

对 $\ln T$ 与 $\ln f$ 作最小二乘法线性拟合 $\ln f = a + b \ln T$ 可以得到

$$a = 2.39 \pm 0.03 \quad (7)$$

$$b = 0.481 \pm 0.009 \quad (8)$$

$$r = 0.9994 \quad (9)$$

对式 4 两边取对数有

$$\ln f = \ln\left(\frac{n}{2L\sqrt{\mu}}\right) + \frac{1}{2}\ln T = a_1 + b_1 \ln T \quad (10)$$

代入数据有

$$a_1 = 2.28, b_1 = 0.5 \quad (11)$$

1.4 共振频率与弦线有效长度的关系

弦线上张力 $T = 29.403 \text{ N}$ ，波腹数 $n = 1$ ，弦线线密度 $\mu = 7.192 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ 。

L/cm	f_c/Hz	f_e/Hz	$\left \frac{\Delta f}{f_c}\right /\%$	$\ln L^*$	$\ln f$
40.0	79.9	82.6	3.4	-0.916	4.414
47.0	68.0	71.8	5.6	-0.755	4.274
54.0	59.2	62.4	5.4	-0.616	4.134
62.0	51.6	52.6	1.9	-0.478	3.963
70.0	45.7	48.0	5.0	-0.357	3.871

表 3: 共振频率与弦线有效长度关系表

* L 此处换成国际单位制

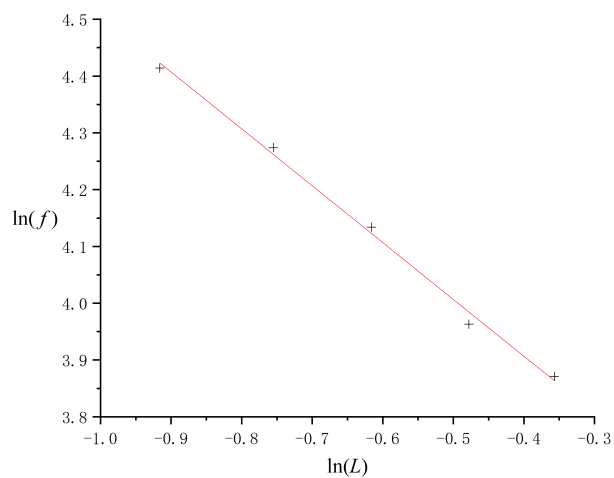


图 3: $\ln f$ 与 $\ln L$ 关系图

对 $\ln T$ 与 $\ln f$ 作最小二乘法线性拟合 $\ln f = a + b \ln L$ 可以得到

$$a = 3.506 \pm 0.025 \quad (12)$$

$$b = -1.00 \pm 0.04 \quad (13)$$

$$r = 0.997 \quad (14)$$

对式 4 两边取对数有

$$\ln f = \ln \left(\frac{n}{2} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \right) - \ln L = a_2 + b_2 \ln T \quad (15)$$

代入数据有

$$a_2 = 3.465, b_2 = -1 \quad (16)$$

2 分析与讨论

2.1 考虑非小振动情形

考虑弦线上微元 $(x, \xi(x))$ 到 $(x + dx, \xi(x + dx))$, 弦上张力为 T , 弦线线密度为 λ , 列出对弦线振动方向的微分方程

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} dx \lambda \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) T \quad (17)$$

其中 $\theta_{1,2}$ 分别为弦线微元两端张力方向与水平夹角, 有

$$\sin \theta = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2}} \quad (18)$$

将式 18 代入 17, 化简得到波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (19)$$

而小振动近似下的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (20)$$

有波速为

$$v_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (21)$$

而波动方程写成指数形式有

$$\xi = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (22)$$

若依旧认为现在的振动形式为简谐的, 将式 22 代入式 20 可得到新的波速

$$v_1 = \frac{1}{1 - k^2 A^2} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (23)$$

显然此时得到的波速 v_1 是小于小振动近似下的理论值 v_0 的。

类似地, 式 4 可修正为

$$f_1 = \frac{n}{2L(1 - k^2 A^2)} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{f_c}{1 - k^2 A^2} \quad (24)$$

在前面的所有结果中，我们可以很清晰的看到实验得到的 f_e 是大于理论值 f_c 的，同样理论得到的波速 v_c 也是小于 v_e 的。在实验中弦线在共振频率附近的振动振幅已经不再是小振动了，在式 24 与式 24 中计算出的共振频率 f_1 与波速 v_1 都是大于小振动近似下的理论解 f_c 与 v_c 的，故在实验中测得的 f_e 将大于 f_c ， v_e 同样大于 v_c 。

若有 $k^2 A^2 \ll 1$ ，可以得到 Δf 近似表达式

$$\Delta f = f_e - f_c = k^2 A^2 f_c \quad (25)$$

2.2 误差分析

在 1.3 中，线性拟合得到的结果虽然有很好的线性性，但考虑拟合不确定度得到的斜率 b 是小于理论值 $b_1 = 0.5$ 的，但是在 1.4 中，线性拟合得到的结果确实很好的，斜率 b 与理论值 b_2 是很一致的。

我认为 1.3 中的偏差来源可能会是实际的张力的偏差带来的，有可能是杠杆不水平导致的，但是我在实验中是调节了水平的，那么也可能是琴码上摩擦等因素带来的实际张力与杠杆计算得到的张力不符合的情形所导致的。

而 1.3 与 1.4 中的截距均比理论值偏大，这是可以通过修正的表达式式 24 解释的，式 24 前的系数 $\frac{1}{1-k^2 A^2}$ 是显然会导致截距偏大的。

姓名 杨轶		学号 2300011403		星期	第	组	页码 1 /
一. $f-n$		$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$		$\mu = 7.192 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$		样品弦直径 $d = 1.165 \text{ mm}$	
弦线有效长度 $L = 60.0 \text{ cm}$		$g = 9.801 \text{ m/s}^2$		$M = 1.000 \text{ kg}$		$d = 1.165 \text{ mm}$	
$T = 3Mg = 29.403 \text{ N}$		样品弦		$l_1 = 132.5 \text{ mm}$		$l_2 = 900.0 \text{ mm}$	
弦线直径 $d_0 = 1.167 \text{ mm}$				$l = l_2 - l_1 = 767.5 \text{ mm}$		$m = 5.52 \text{ g}$	
3位 L 3位	n	f_c/Hz	f_e/Hz	$\left \frac{\Delta f}{f_c} \right /\%$	$V_c/\text{m/s}$	$V_e/\text{m/s}$	$\left \frac{\Delta V}{V_c} \right /\%$
4位数据	1	53.283	54.6	2.44	63.94	65.52	2.47
	2	107.106	109.2	3.02	63.94	65.52	2.47
	3	160	168.2	5.12	63.94	67.28	5.22
		Δf 两位有效数字		$\frac{\Delta V}{V_c}$ 两位有效数字			
二. $f-T$		$L = 60.0 \text{ cm}$		$n = 1$		$\mu = 7.192 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$	
T/N	f_c/Hz	f_e/Hz	$\left \frac{\Delta f}{f_c} \right /\%$	$V_c/\text{m/s}$	$V_e/\text{m/s}$	$\left \frac{\Delta V}{V_c} \right /\%$	
9.801	30.8	32.5	5.52	36.92	39.0	5.63	
19.602	43.5	46.4	6.67	52.21	55.7	6.68	
29.403	53.3	54.9	3.00	63.94	65.9	3.06	
39.204	61.5	63.5	3.25	73.83	76.2	3.21	
49.005	68.8	71.2	3.49	82.54	85.4	3.46	
三. $f-L$		$T = 29.403 \text{ N}$		$n = 1$		$\mu = 7.192 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$	
L/cm	f_c/Hz	f_e/Hz	$\left \frac{\Delta f}{f_c} \right /\%$	$V_c/\text{m/s}$	$V_e/\text{m/s}$	$\left \frac{\Delta V}{V_c} \right /\%$	
40.0	79.9	82.6	3.38	63.94	66.4	3.38	
47.0	68.0	71.8	5.59	63.94	67.5	5.57	
54.0	59.2	62.4	5.40	63.94	67.4	5.41	
62.0	51.6	52.6	1.92	63.94	65.28	1.97	
70.0	45.7	48.0	5.03	63.94	67.2	5.10	

图 4: 课上实验记录