

§1. 简化为等效的一体问题

Intro. 考虑 m_1 与 m_2 质点构成的单质系统, 力均由 U 产生, 且假设 U 是 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 的函数
or $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ or 更一般微商函数. 六自由度, 六广义坐标.

Task. 写出该系统的 Lagrangian Function

1° 以 \vec{r}_1, \vec{r}_2 为分量

$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\vec{r}}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\vec{r}}_2)^2 - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \dots)$$

2° 以 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 与 质心矢径 $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ 为广义坐标

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 - U(\vec{r}, \vec{r}, \dots) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{\vec{r}})^2 - U(\vec{r}, \vec{r}, \dots) \end{aligned}$$

显然, \vec{R} 的三个分量均为循环坐标, $\dot{\vec{R}} = \text{const.}$, L 中仍留有牵连, 记 $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m$

因而 $L' = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 - U(\vec{r}, \vec{r}, \dots)$

§2. 运动方程与初值积分

Intro. 下述假设保持有心力, 则 $U(\vec{r}, \vec{r}, \dots) = U(r)$

Task. 根据守恒定理化简运动方程

1° 系统是球对称. 则若选取转基轴角为广义坐标, 则为循环 (角为循环 \rightarrow 角动量守恒)

以 m_2 为参考点, 若球对称, 则绕 x, y, z 轴转动均守恒. 所以总角动量守恒

因而 $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L} = \text{const.}$ 因而 \vec{r} 在 Π -平面内, 不妨以 θ, r 为广义坐标.

62页第

42页第 (白 185 29)

2° $L = \frac{1}{2} m (\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{r}^2) - U(r)$. (约瑟夫有 θ 的环)

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J = m \dot{\theta} r^2$ (大小再动一下, 剩三运动常数)

对 r 的初值和 \dot{r} 的初值由 $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$ 改时就是新的初值。

由于 $T = T_2$, $U \leq \dot{r} \Rightarrow h = \frac{1}{2} m (\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{r}^2) + U(r) = E$

(实际上, 6 自由度, 12 常数, $\vec{R}_0 = \text{个}$, $\vec{R} = \text{个}$, \vec{L} 的 2 个, J 1 个, E 1 个, $r(0)$, $\theta(0)$ 各 1 个)

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2} m (\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{r}^2) + U(r) & \text{①} \\ J = m \dot{\theta} r^2 & \text{②} \end{cases}$$

为两个 - 1 个常数, $r(0)$, $\theta(0)$ 也剩条二运动常数

Tip: $J = m \dot{\theta} r^2$, $S_v = \frac{\frac{1}{2} (\dot{\theta} r^2) n}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\theta} r^2 = \frac{J}{2m} = \text{const (Kepler II)}$

接下来理(6)上已能求解 $r(t)$, $\theta(t)$

①代入②得 $\frac{dn}{dt} = \sqrt{\frac{2(E-U)}{m} - \frac{J^2}{m^2 r^2}} \Rightarrow t = \int_{r_0}^r \left[\frac{2}{m} (E-U - \frac{J^2}{2mr^2}) \right]^{-\frac{1}{2}} dr \Rightarrow t = t(r) \Rightarrow r = r(t)$

并由 $\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{J}{mr^2(t)} dt$. 得 $\theta(r)$

Tip: 实际上, 二自由度问题通常用 $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$ 表示, E, J 的守恒量是

但在量子力学中, E, J 有用, 所以在经典 \rightarrow 量子时, 需多用 E, J 作经典描述

§3. 等反-组问题以及开运动分类.

Intro. 形式上已解决, 但实际上教名教难求解, 希望从求解过程中得到一些有用结论

例如 $E = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r))}$ 为速度公式. 结合 $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U - \frac{J^2}{2mr^2})}$ 可得 $V_0 = \dot{\theta} r$

Task. 求出后问题关于 r 的等效一维问题

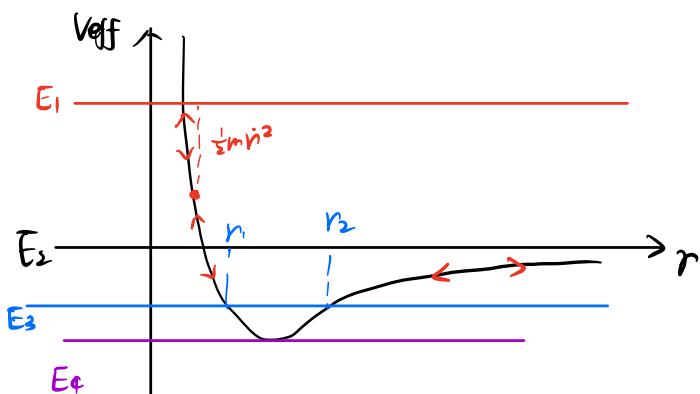
$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

即 $V_{\text{eff}}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} + U(r)$. 相当于在 r 轴上, 受力由 $V_{\text{eff}}(r)$ 产生, 动能 T 为 $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$.

Task. 根据等效一维问题, 在力为平方反比引力下给出轨道分类.

引力可表示为 $-\frac{k}{r^2}$ ($k>0$). 势能 $U(r) = -\frac{k}{r}$ (取 $r \rightarrow \infty, U \rightarrow 0$)

则 $V_{\text{eff}}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$. 画出势能曲线, 根据 $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}$, 看成点在曲线上, 点与点 E 线是 $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$



1° $E = E_1 > 0$ 此时 $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ 可以随 r 增大而大于零, 因而无限制地开放

2° $E = E_2 = 0$. 同样开放. 但在 $r \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \rightarrow 0$.

3° $E = E_3 < 0$. 此时 r 限制在 $[r_1, r_2]$ 间, 轨道闭合, 在 r 中来回振荡

4° $E = E_4$ 此时 $\dot{r} = 0$ 即在圆轨道上运动

Tip. 散射过程中 r 变化由红箭头表示.

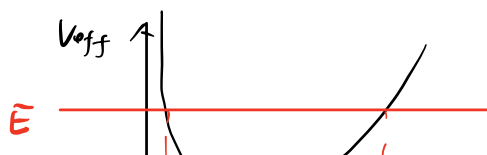
Tip. 3° 并非意味轨道闭合, 但未轨道在圆环 $[r_1, r_2]$ 内



Tip. 当 U 的指数大于 -2 又小于 -1 时, 轨道分类类似

Ex. 可以开形成有圆轨道的一个例子, 力为 $-kr$. $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$

此时 $V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{J^2}{2mr^2}$, 画出图例 易得. 在 $[r_1, r_2]$ 间往复运动.



又 $f_x = -kx$, $f_y = -ky$. 在 x, y 轴内做简谐振动且同频, 则导致椭圆轨道



§4. 维里 (位力) 定理

Thm. 维里定理: 若质点系质点坐标与速度均限制在有限范围内, 则 $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = T$

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} \quad \text{对足够长的时间平均成立}$$

证: $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ (\vec{F}_i 包括所有力)

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \Rightarrow \frac{dG}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \stackrel{\text{非SRT}}{=} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_i m_i v_i^2$$

$$G - G_0 = \int_{t_0}^t \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2T \, dt \quad \text{两侧对时间平均}$$

$$\Rightarrow \frac{G - G_0}{t - t_0} = \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} + 2\bar{T} \quad \text{若周期, 则取 } t = t_0 + T \text{ 即可, 但非}$$

取 $t \rightarrow \infty$, 由于 \vec{p}_i 与 \vec{r}_i 均有限, $\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = G$ 也有限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G - G_0}{t - t_0} = 0 = \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} + 2\bar{T} \quad \text{即 } \bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

Especially. 若 \vec{F}_i 均能从势能推导即 $\vec{F}_i = -\nabla U(\vec{r}_i)$, 则 $\bar{T} = +\frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla U \cdot \vec{r}_i}$

更若有 单位点, 有心力, 则 $\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\nabla U \cdot \vec{r}} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial U}{\partial r} r}$

根据欧拉齐次定理, 若 $U = \alpha r^k$ 则有 $\frac{\partial U}{\partial r} r = kU$

$$\Rightarrow \bar{T} = \frac{k}{2} \bar{U} = \frac{n+1}{2} \bar{U} \quad (\text{or 力} \propto r^n)$$

Task. 运用维里定理推导理想气体状态方程。

平均动能 平均势能 粒子数

$$\vec{T} = N\vec{E}_k = \frac{3}{2}NkT \quad \text{对于理想气体, } \vec{F}_i \text{ 仅为器壁作用}$$

P 本已定 $\frac{\sum F_i}{A}$ 时间平均, 相当于作用在粒子上的 $\frac{\vec{F}}{A}$, 且器壁各点均列全, 再用一个时刻计算

$$\sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \oint_S \underbrace{-PdA \cdot \hat{n}}_{\substack{\downarrow \\ \text{在 } \vec{r} \text{ 处 } dA \text{ 面积包含粒子受器壁合力}}} \cdot \vec{r} = -P \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = -P \iiint \nabla \cdot \vec{r} d\tau = -3PV$$

在 \vec{r} 处 dA 面积包含粒子受器壁合力

$$k) \quad \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}PV \Leftrightarrow PV = NkT \quad (\text{状态方程})$$

Tip. 在非理想气体中, 不在器壁上的 \vec{F}_i 不能忽略, 可运用维里定理求求的状态方程

§5. 轨道的微分方程与角动量守恒

Intro: 从求解 $r=r(t)$, $\theta=\theta(t)$ 转为求解 $\theta=\theta(r)$ or $r=r(\theta)$, 此时频率 r 与 θ 改为 $r=r$ 或 $\theta=\theta$ 与 t 无关

Task. 求解一般势 $U=U(r)$ 的轨道微分方程

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 r^2 + U(r) & + u = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{J} \sqrt{2m(E-U) - J^2 u^2} \\ J = m\dot{\theta} r^2 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{d(\frac{du}{d\theta})}{du} \frac{du}{d\theta} = -u - \frac{m}{J^2} \frac{dU(r)}{du} = -u - \frac{m}{J^2} \frac{d}{du} [U(\frac{1}{u})] \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{J^2} \frac{d}{du} [U(\frac{1}{u})]$$

$$\text{or } \frac{d}{du} [U(\frac{1}{u})] = \frac{dU(\frac{1}{u})}{d(\frac{1}{u})} (-\frac{1}{u^2}) = +f(\frac{1}{u}) \frac{1}{u^2} \quad \text{即有} \quad \frac{J^2 u^2}{m} (\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u) = -f(\frac{1}{u})$$

即若 f or U 条件已知 \rightarrow 轨道 or 轨道已知 $\rightarrow f$

Tip. 从轨道方程看出, 轨道相对转折点 ($\frac{du}{d\theta}=0$) 是对称的

亦即 设转折点为 θ_0 , $\theta_0 - \Delta\theta$ 与 $\theta_0 + \Delta\theta$ 处 u 相同

可令 $\theta = -\theta$, 若在 $\theta=0$ 处 $u=u(0)$, $(\frac{du}{d\theta})_{\theta=0} = 0$

刻在变换后，轨道微分方程关于 t 形式不变 $u|_{t=0} = u|_{t=0} = 0$, $(\frac{du}{dt})_{t=0} = (\frac{du}{dt})_{t=0} = -(\frac{du}{dt})_{t=0} = 0$

刻和边界条件也不变，作 $U(t) = u(t) = u(-t)$ ，即轨道关于 t 对称

因而轨道在镜像的矢量反射下不变，因而两端给出 V 二重简并态即轨道即得到完整轨道（反射）

Task. 对于幂形式的势能 $U(r) = \alpha r^{n+1}$ 求轨道微分方程，并求出 n 对求解的符号

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{J} \sqrt{2m(E-U) - J^2 u^2} \quad , \text{ 设初始条件为 } \theta = \theta_0 \text{ 时 } u = u_0$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{J}{\sqrt{2m(E-U) - J^2 u^2}} du$$

$$\text{当 } U = \alpha r^{n+1} = \alpha u^{-n-1} \text{ 时 } \Rightarrow \theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{J}{\sqrt{2m(E - \alpha u^{-n-1}) - J^2 u^2}} du$$

考虑 n 的取值对求解的符号

1° $-n-1 = 0/1/2$. 将分母化为 $\sqrt{1-(Cu+C_2)^2}$, 可用 \arccos 表示

$n=-1$ 或 $U = C \ln r$, 无力, 类似 $\cos \theta = C$

$n=-2$ or -3 即平方或立方反比力.

2° $n=1$ 将分子分母同乘 u , 再用 u^2 换元.

$n=1$ 即线性力时

3° 表示为带有因数的整数, $n=5, 3, 0, -4, -5, -7$

Def. 椭圆积分: $\int R(x, \omega) dx$, $\omega(x) = \sqrt{P_5(x)}$ 即关于 x 的 5 次多项式.

而 $\int \frac{J}{\sqrt{2m(E - \alpha u^{n+1}) - J^2 u^2}} du$, 需要 $|2 - (n+1)| \leq 4$ & $|-n-1| \leq 4$

则 $n = 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5$ 又 $n = 1, -2, (-1 \text{ 排除}), -3$ 均为圆函数. 所以 $n = 0, -4, -5$

再将 u^2 作为变量 x , 上下同乘 u . $\int \frac{k dx}{\sqrt{2mEx - J^2 x^2 - 2m\alpha x^{\frac{n+1}{2}}}}$

则 $\frac{n+1}{2} = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 均 $\Rightarrow n = -7, \pm 5, \pm 3, \pm 1$, 得 $n = -7, 3, 5$

再往长去的一些 n 数指数, 也均为椭圆函数

综上: $n = -2, -3, 1$ 均为圆函数, $n = -7, -5, -4, 0, 3, 5$ 均为椭圆函数

§6. 闭合轨道的条件 (伯特兰定理)

Intro: 先考虑出现圆轨道条件. 再考虑微扰, 在此情况下轨道何时闭合.

若在任何初始条件均能闭合, 那么即使考虑微小扰动时也能闭合 (重要)

结果反例至少是 (两种) 力, 可解, 确有什么情况闭合

Thm. 伯特兰定理: 对于受束缚点, 只有遵循平方反比 or 胡克定律的两种有力
才能在任何初始条件下产生闭合轨道.

Task 1. 寻找圆轨道微扰 闭合条件

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + u = J(u) \quad (\text{下用 } l \text{ 表示角动量 } J, \text{ 用 } V \text{ 代表势 } U)$$

$$\rho \begin{cases} J(u) = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V(u) = \frac{m}{l^2} f(u) & \text{当 } u_0 = J(u_0) \text{ 时做圆轨道运动.} \\ \text{同时 } E = V(u_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2} & \text{这两点可以保在点做圆周运动.} \end{cases}$$

若 $V_{eff}(r)$ 极大值上 则在 r 微扰时, r 会不断发火, 导致轨道不闭合

2) u_0 是 $V_{eff}(r)$ 极大值点, (不一定有连续轨道)

3) 扰动保证在微扰下, $u-u_0 \ll u_0$, 记 $u-u_0 = x$.

$$J(u) = J(u_0) + (u-u_0) \frac{dJ(u_0)}{du} + O[(u-u_0)^2] \quad \text{微扰下, 只考虑一级近似, 轨道也近似}$$

$$\text{则轨道方程为 } \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = u_0 + (u-u_0) \frac{dJ}{du}(u_0) \Rightarrow \frac{d^2x}{d\theta^2} + x = x \frac{dJ}{dx}(0)$$

$$\text{或 } \frac{d^2x}{d\theta^2} + (1 - \frac{dJ}{dx}(0)) x = 0. \quad \text{记 } \beta^2 = 1 - \frac{dJ}{dx}(0)$$

$$\text{若需闭合, 则 } \beta^2 > 0 \text{ 即 } 1 - \frac{dJ}{dx}(0) > 0.$$

$$\frac{dJ}{du} = -\frac{m}{l^2} \left[-\frac{2}{u^3} f(u) + \frac{1}{u^2} \frac{df(u)}{du} \right] = -\frac{2J(u)}{u} - \frac{m}{l^2 u^3} \frac{df(u)}{du}$$

$$\text{在 } u=u_0 \text{ 时 } \frac{dJ}{du}(u_0) = -2 + \frac{u_0}{f_0} \left[\frac{d}{du} f(u) \right]_{u=u_0} \quad (f_0 = f(u_0))$$

$$4) \text{ 代入回 } \beta^2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{dJ}{du}(u_0) > 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{r_0}{f_0} \frac{df(r_0)}{dr} > 0. \quad \text{or } \boxed{3 + \left(\frac{r}{f} \frac{df}{dr} \right) \Big|_{r=r_0} > 0}$$

圆轨道稳定条件

(Especially, 若 $f = kr^n \Rightarrow 3+n > 0$ 即 $n > -3$)

5) 由上, $\beta^2 = 3 + \left(\frac{r}{f} \frac{df}{dr} \right)_{r=r_0}$. 由于对于一切 r_0 , 微扰轨道均在闭合.
首先 β 作为一振动频率 \Rightarrow 力为幂形式 \Rightarrow 力为有理数. (x 为 2π 的有理数倍, 在 0 经过 $2k\pi$ 后, x 又回原处)

6) 而 β 不能为 r_0 函数, 否则 β 违反变化. 由于取无理数, 于是对于某特定力的所有圆形轨道 β 为常数.
于是 万有引力看成微分方程, 对 $\forall r_0$ 成立 $\Rightarrow \boxed{f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}}$, $\beta \in \mathbb{Q}$. \Rightarrow 圆轨道闭合条件

Task 2. 在非微扰条件下, 求圆形轨道变化后闭合条件

$$\text{加入 } J \text{ 的二次项后, 得 } \frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = \frac{x^2}{2} J'' + \frac{x^3}{6} J'''$$

把 x 展为傅里叶级数, 根据系数关系 $\Rightarrow \beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2) = 0$ 因而只有 $\beta^2 = 1$ 或 2 (0 表示圆运动)

时, 轨道形成闭合轨道, 再由角动量守恒知, 轨道在何时开始

Tip. 在双例上, 轨道的闭合性 (大多数), 力不 $\propto 1/r^2$, 因而引力平方反比吸引.

又有闭合 $\Rightarrow r$ 与 θ 呈半波为周期, 即 r, θ 有并, 轨道的周期性决定了力的形式

§7. 开普勒问题是: 平方反比力定律.

Task. 用不同方法, 在平方反比力下求解轨道方程.

1° 通过二阶方程

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{J^2 u^2} f(u), \quad f = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{mk}{J^2}$$

此解为 $u = A \cos(\theta + \varphi)$, 特解为 $\frac{mk}{J^2}$

$$\Rightarrow u = \frac{mk}{J^2} (1 + A \cos(\theta + \varphi)) \Rightarrow r = \frac{\frac{J^2}{km}}{1 + A \cos(\theta + \varphi)}$$

问题是无从直接得出 A (φ 取为 π , 意即 $\theta=0$ 为转折)

2° 通过一阶方程.

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{J^2}(E + ku) - u^2}} \Rightarrow r = \frac{\frac{J^2}{km}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta')}$$

$$\text{则有 } p = \frac{J^2}{km} = \frac{J^2(m_1+m_2)}{Gm_1m_2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2 m_1 m_2^2 m}}$$

不妨令 $\theta'=0$, 即 $\theta=0$ 为转折上, $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

Thm. 椭圆轨道时 长轴仅与能量有关

$$\frac{b^2}{a} = \frac{J^2}{km}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{mk^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{J^2}{km} \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{k}{2E}. \quad (\text{在 } E < 0 \text{ 时})$$

Tip. 利用 a 可将 e 表为 $e = \sqrt{1 - \frac{J^2}{mka}}$ $a(1-e^2) = \frac{J^2}{mk} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos \theta}$ (k, a, e 为三参数)

$$p = \frac{J^2}{mk}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}}$$

§8. 开普勒问题中的时间进程

Task. 开普勒问题解 $t(r)$ 与 $t(\theta)$ ($t=0$ at, $\theta=0$, $r=r_0$)

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{k}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} + E \right)} \Rightarrow t(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} + E}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{mr^2}, \text{ 再有 } r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow t(\theta) = \frac{J^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

Tip. 得到的关系式十分复杂, 将 θ 表为 $\theta(t)$, r 表为 $r(t)$ 更为复杂.

Ex. 计算抛物线 $t(\theta)$, 以近日点为 $t=0, \theta=0$

$$\begin{aligned} \text{抛物线 } e=1 &\Rightarrow t(\theta) = \frac{J^3}{mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{J^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \sec^4 \frac{\theta}{2} d\theta \quad \text{代换 } x = \tan \frac{\theta}{2} \\ &\Rightarrow t(\theta) = \frac{J^3}{2mk^2} \left(\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

但若直接 $\theta = \theta(t)$ 却难解 $\tan \frac{\theta}{2} \equiv \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ 并未反正切, $r(t)$ 通过 $\theta = \theta(t)$ 代入轨道方程

Ex. 计算椭圆 $t(r)$, 以近日点为 $\theta=0, t=0$.

$$\text{以 } a, e, k \text{ 表示 } E, J \text{ 的 } t(r) = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - r_0(2a) - a^2(e^2-1)/2}}$$

引入 **偏近点角** ψ , $r = a(1 - e\cos\psi)$, 而 θ 称为真近点角

$$\text{代入后代换为 } t(\psi) = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^{\psi} (1 - e\cos\psi) d\psi = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\psi - e\sin\psi)$$

$$\text{从中的 } T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}} \propto a^{3/2} \quad (\text{Kepler III})$$

Tip. 实际上, $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{M_0 m_{\odot}}{M_0 + m_{\odot}} \propto m_{\odot}$, $k = G M_0 m_{\odot} \therefore \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{1}{G M_0}}$ 与 m_{\odot} 无关.

Def. 圆频率: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{ma^3}}$

Thm. Kepler Equation: $\omega t = \psi - e \sin \psi$

ωt 开物近之角 ψ 偏近之角 $(\omega, e \text{ 对于 固定轨道均为常数})$
 $r = a(1 - e \cos \psi)$

Tip. 求解 $r(t)$: 1° 根据 t 求 ψ 2° 根据 ψ 求 r , 即 $r(t) = r(\psi(t))$

$$\text{用 } r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = a(1-e \cos \psi) \Rightarrow 1+e \cos \theta = \frac{1-e^2}{1-e \cos \psi} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\cos \psi - e}{1-e \cos \psi} \Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\psi}{2}$$

§9. 拉普拉斯-龙格-格吕夫量 (LRL 矢量)

Thm: LRL 矢量在开普勒问题中守恒, $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \hat{r} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{Gm_1 m_2}{m_1 + m_2} \hat{r}$

$$\vec{p} = f(r) \hat{r}, \quad \vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{p} = m \vec{v} \quad \vec{L} = m \vec{v} \times \vec{v} + m \vec{r} \times \vec{a} = m \vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} - \vec{p} \times \dot{\vec{L}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} - \vec{p} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} = m f(r) [\dot{r} \vec{r} - r \dot{\vec{r}}] = -m f(r) r^2 \frac{d\hat{r}}{dt}$$

若 $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ 则 $\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L} - km \hat{r}) = 0$ 即 $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \hat{r}$ 为常量.

Tip. \vec{A} 的更多性质

1° $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$ 因而 \vec{A} 在轨道平面内

$$2^\circ \theta = \langle \vec{A}, \vec{r} \rangle \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) - kmr = \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) - kmr = J^2 - kmr = Ar \cos \theta$$

$$\Rightarrow r = \frac{J^2/km}{1 + (A/km) \cos \theta} \quad \text{与开普勒轨道一致.}$$

因而 \vec{A} 沿焦点与近日点连线方向

$$3^\circ A/km = e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^2}} \Rightarrow A = kme = \sqrt{k^2 m^2 + 2mEJ^2}$$

若 E 成为 0 或 h 则 $e=1$, 椭圆

因此 \vec{A} 也可作为运动常数, 原第 6. \vec{L} 方向 2, L 大小 1, E 1, $[0, \pi, 2]$, 共 6

而 \vec{A} 方向大小可有 3. 但 \vec{A} 方向不取, 则 \vec{L} 方向只剩 1 种, 且确定 \vec{A}, \vec{L} 后, $E = \frac{A^2 - L^2 m^2}{2m\hbar^2}$

因而 $\vec{A}_{(s)} + \vec{L}_{(s+1)}$ 可确定轨道

Tip. 在有心力运动中 确实可以构造类似守恒量

但问题在于, 它们轨道一般不闭合, 而守恒量 + E 与 L 可确定轨道

因而 守恒量是 (r, θ) 的无限值函数. (因为 r 本身是 θ 的无限值函数, 若 $\theta \in [0, 2\pi]$)

在胡克力中存在一个守恒量 (二阶守恒量), 只有在轨道闭合时才可作为守恒量, \vec{r}, \vec{L} 的代数形式

§10. 中心力场中的散射

Def. 散射: 运动最终速度与入射方向不同的现象

Def. 微分散射截面: 微分散射截面 $\sigma(\Omega)$ 定义为

$$\sigma(\Omega) = \frac{\text{单位时间进入 } d\Omega \text{ 内的散射粒子数}}{\text{入射流量 } d\Omega}$$

Def. 瞄准距离: 力心到入射方向的垂直距离 (也称碰撞参数)

Tip. 对于有心力, 且仅与 r 有关, 则 $\sigma(\Omega)$ 是轴对称的.



$$d\Omega = 2\pi R \sin\theta R d\theta / R^2 = 2\pi \sin\theta d\theta, \quad \theta \text{ 称为偏转角, } (\theta \in [0, \pi])$$

Tip. 用 θ 表示 $\sigma(\Omega)$, 记瞄准距离为 b . 若根据 b 确定轨道, 则有 $b(\theta)$

在均匀入射时, 落在 $d\Omega$ 内粒子为 $\downarrow -2\pi b db(\theta) I$. ($\theta \uparrow b(\theta) \downarrow$)

则 $\sigma(\Omega) = -\frac{2\pi b db(\Theta) I}{I 2\pi \sin\Theta d\Theta} = -\frac{b(\Theta)}{\sin\Theta} \frac{db(\Theta)}{d\Theta}$ 总为单位时间落在 Θ 处单位立体角内的粒子数

or 由于 $\sigma(\Omega) > 0$ 则 $\sigma(\Omega) = \frac{b(\Theta)}{\sin\Theta} \left| \frac{db}{d\Theta}(\Theta) \right| = \sigma(\Theta)$

Task. 求库仑斥力的微分散射截面 (散射粒子由 Ze , 被散射粒子为 ze)

首先 $\alpha = -kzz'e^2$, $E = \frac{1}{2}mv_0^2$, $J = mv_0 b = \sqrt{2mE} b$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{4E^2 b^2}{\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{4E^2 b^2}{\alpha^2}} \quad \frac{1}{\epsilon} = \cos\psi \quad \pi - 2\psi = \Theta$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{\epsilon^2} = \cos\Theta \Rightarrow b = \frac{-\alpha}{2E} \cot \frac{\Theta}{2} = \frac{kzz'e^2}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}$$

$$\sigma(\Omega) = \sigma(\Theta) = \frac{k^2 z^2 z'^2 e^4}{16E^2} \csc^4 \frac{\Theta}{2}$$

Def. 散射总截面: σ_T 为散射总截面, 定义为 $\sigma_T = \int \sigma(\Omega) d\Omega = \int_0^\pi \sigma(\Theta) 2\pi \sin\Theta d\Theta$

Task. 计算库仑斥力的散射总截面, 并解释结果

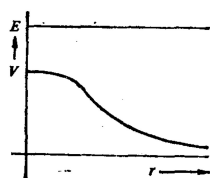
$$\sigma_T = \frac{k^2 z^2 z'^2 e^4}{4E^2} \int_0^\pi \frac{\cot^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^3 \frac{\Theta}{2}} d\Theta = \frac{k^2 z^2 z'^2 e^4}{2E^2} \int_0^1 \frac{dt}{t^3} \quad \text{在 } \Theta \rightarrow 0 \text{ 时, } \sigma(\Theta) > \pi \sin\Theta d\Theta \text{ 发散}$$

说明了库仑力长程, 在 $b \gg 1$ 时, 仍有较大 Θ . 并归入 $\Theta \rightarrow 0$ 发散

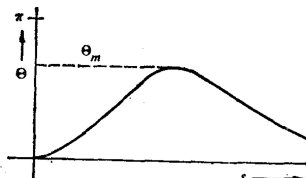
由于散射粒子不为无穷, 积分必收敛

Att. 在量子力学中, 类似电力, 若势能减小速度快于 $\frac{1}{r}$, 则截面收敛

现实情况下, 非奇异势垒中, 势能 V 关于 (a) 和偏转角 Θ 与 S 关系. ↑ 势能 V 与 b



(a)



(b)


(a) 势能并未 $\rightarrow \infty$, 在取 $E > V_{max}$ 时, V 趋近于 0, 此时 $\Theta = 0$.

(b) 如图, 该势能仅在 E 大于 V_{max} 时, 在 $S \rightarrow 0$ 时 $\Theta \downarrow$

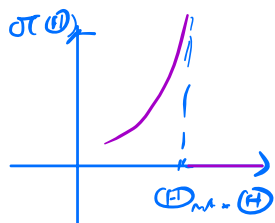
此时, $\sigma(\Theta)$ 的表达式仍正, 因为同一个 Θ 子所有 S 与 $\pm \pi \pm$

$$\sigma(\Theta) = \sum_i \frac{b_i(\Theta)}{\sin \Theta} \left| \frac{db_i(\Theta)}{d\Theta} \right| \quad \text{例如上图就需分三段.}$$

Task. 据上图, 求第 $\Theta = \Theta_{\max}$ 处的 σ

1° 此处 $\frac{db}{d\Theta} = 0 \Rightarrow \frac{db}{d\Theta} \rightarrow \infty$.  , 此时的偏角散射截面 $\sigma(\Theta)$ 发散.

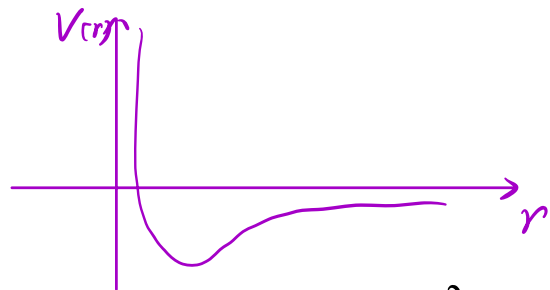
2° 在 $\Theta > \Theta_{\max}$ 处, 无粒子 亦即 $\sigma(\Theta) = 0$. 所以 $\sigma(\Theta)$ 图系又限于



此现象类似于雨滴引起对阳光的散射, 被称为 **虹霓散射** (条件: Θ 存在 Θ_{\max} !)

Task. 利用等效一维势, 求第对于不同 J 值的运动 (例如同 V_0 , 让 b 变化)

首先给出 $J=0$ 亦即 $b=0$ 时的 $V_{\text{eff}}(r)$ 亦即 $V(r)$.

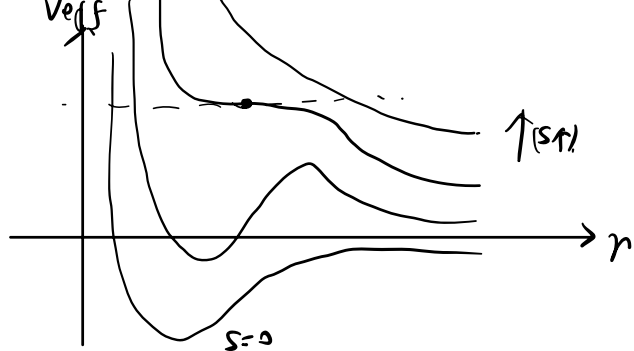


有在 $r \rightarrow \infty$, $V(r)$ 收敛速度快于 $\frac{1}{r^2}$ } 典型分子相互作用势
 $r \rightarrow \infty \quad V(r) \rightarrow \infty$

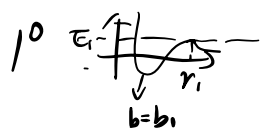
证: $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{J^2}{2mr^2}$ ($J = m v_0 b$, 同 V_0 , 即同 E , 改变 b)

此时对于不同的 b 会有不同的曲线

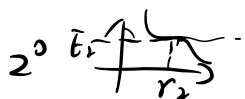
变化情况为



考虑 $V_0, s.t.$



此时恰在 $r=r_1$ 时, $\dot{r}=0$, 但这里不满足 $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} > 0$, 所以做往返运动
但有无穷绕行, 即 φ 变化 $> k\pi$. 在此位置 $\dot{\theta} = \frac{J}{mr^2} = \frac{V_0 b_1}{r^2} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{b_1}{r^2}$



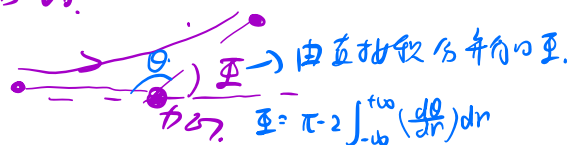
此为拐点, 同上

在 1° 之前 和在 2° 之后 均不会 产生 绕行问题.

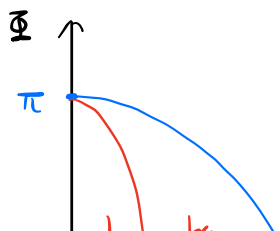
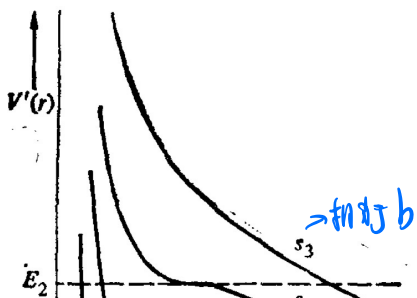
Tip. 倘若为了固定, 让 E 变化 (同时固定 b) 可得 对于 J 的曲线 (固定)

在什么 b 入射时 会出现 绕行: 总之, 是一系列 b 与 V_0 .

Task. 以 π 为绕行角, 初始值为 π . 顺时针. 求 Φ



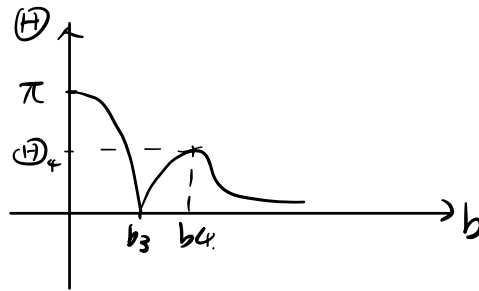
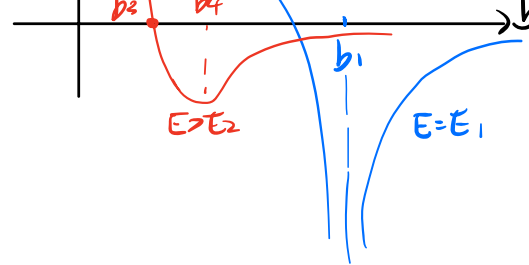
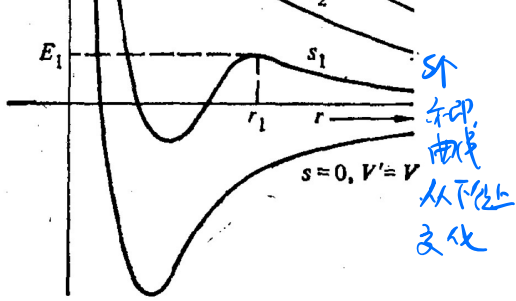
寻找 固定 E 时的 随 b 变化的 Φ . (分取 $E > E_2$ 与 $E = E_1$ 情况) (Att. 绕行 k 大于 π 所以 $\Phi = |\Phi + 2k\pi| \in [0, \pi]$)



特殊值

b_3





对于 $E > E_2$ 曲线, 在 $\Delta = -\pi$ 处, Δ 轴以下,
若 $\Delta > \pi$, 则有 $\Delta = -\pi$, 相位所后, 变化

在 b_4 处 $\frac{d\Delta}{db} = 0$ 则为虹霓散射 (是列在 $\Delta > \Delta_4$ 时, 散射截面非零, 但 $\sigma(\Delta_4) \rightarrow \infty$)

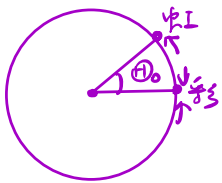
在 b_3 处 $\Delta = 0$ 而 $\sigma(\Delta) = \sum_i \frac{b_i(\Delta)}{\sin \Delta} \left| \frac{db_i(\Delta)}{d\Delta} \right|$ 在 $\Delta = 0$ 时, $b_i(\Delta) = b_3$, $\left| \frac{db_i(\Delta)}{d\Delta} \right| = k$, $\sin \Delta = 0$

同有 $\sigma(\Delta) \rightarrow \infty$, 此散射截面发散称为彩虹光散射。(与气态光子中的现象类似)

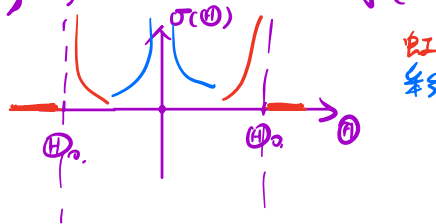
Tip. 虹霓散射与彩虹光散射异同.

1° 均有 $\sigma \rightarrow \infty$ (这导致该方向上发亮强, 容易被看到, 虹霓, 彩虹等)

2° 虹霓为单侧 (σ 只从 Δ 一侧趋于无穷), 而彩虹为双侧 (σ 从 Δ 两侧趋于无穷)



亦即若考虑 Δ 正负



Tip. Δ 的计算公式. $\Delta = \pi - 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b dr}{r \sqrt{n^2(1 - V/E) - b^2}}$

§11. 散射问题变换到实验室坐标系

Intro: 在二体有心力问题中, 为了通过坐标变换为单体问题, 但在单体问题中的 Θ 并非大角坐标系中的偏转角, 记为 θ

Task. 引入 $l = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_0}{v}$, m_1 为入射点质量, m_2 为靶质量 (靶质速度为 0), v_0 为入射速率, v 为质心相对速率
求以 $\vec{r} = |\vec{r}|$ 的偏转角 Θ 表示的入射点在大角坐标系内的偏转角 θ .

由于在大角系中 \vec{r} 的偏转角难判断, 则在小角系中考虑 (非相对论近似)

$$v_{10}' = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_0, \quad v_{20}' = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 \quad v_c = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0$$

$$v_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2} v, \quad v_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2} v \quad (\text{类似碰撞, 只有动能})$$

$$\vec{v}_1' = (v_1' \cos \Theta + v_c) \hat{x} + (v_1' \sin \Theta) \hat{y} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + l}$$

$$\text{or } \cos \theta = \frac{\cos \Theta + l}{\sqrt{1 + l^2 \sin^2 \Theta}} = \frac{\cos \Theta + l}{(l^2 + 2l \cos \Theta + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad 2 \cos \frac{\Theta}{2}$$

$$\text{若 } m_1/m_2 \rightarrow 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\cos \Theta + 1}{\sqrt{2(1 + \cos \Theta)}} = \cos \frac{\Theta}{2}$$

1° 弹性相互作用 (万有引力, 库仑斥力之类) $l = \frac{m_1}{m_2}$, $\tan \theta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + m_1/m_2}$ ($m_1/m_2 \ll 1$ 时, 有近似为 $\theta \approx \Theta$)

2° 非弹性相互作用 (例如某动能 \rightarrow 靶内粒子激发能) 动能变化为 Q (负)

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 + Q \Rightarrow l = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_0}{v} = \frac{m_1}{m_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Q}{\mu v_0^2}}}$$

$$\text{记 } E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \text{ (入射粒子在大角系主系动能)} \Rightarrow l = \frac{m_1}{m_2} \left(1 + \frac{m_1+m_2}{m_2} \frac{Q}{E}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Task. 求解微分截面 $\sigma(\theta)$ 与 $\sigma(\Theta)$ 的关系

在立体角中 落入 $2\pi \sin\theta d\theta$ 的粒子现在落入 $2\pi \sin\theta d\theta$ 中.

$$\text{即 } 2\pi \sin\theta d\theta \sigma(\theta) = 2\pi \sin\theta d\theta \sigma'(\theta) \Rightarrow \sigma'(\theta) = \frac{\sin(\theta(\theta))}{\sin\theta} \left| \frac{d\theta(\theta)}{d\theta} \right| \sigma(\theta(\theta))$$

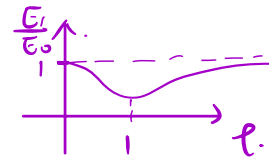
$$\sigma'(\theta) = \left| \frac{d(\cos\theta)}{d\cos\theta} \right| \sigma(\theta) \Rightarrow \sigma'(\theta) = \left[\frac{(\ell^2 + 2\ell \cos\theta + 1)^{\frac{3}{2}}}{\ell \cos\theta + 1} \sigma(\theta) \right]_{\theta=\theta(\theta)}$$

Tip. 由于 入射粒子仍将一部分动能传输给靶, 即使该过程(类为弹性)弹性. 所以慢化入射粒子在介质中, 入射粒子的 E_0 与出射粒子的 E_1 比例为

$$\frac{E_1}{E_0} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 (1 + \ell^2 + 2\ell \cos\theta)$$

当 弹性时, $\ell = \frac{m_1}{m_2}$, $\frac{E_1}{E_0}$ 化为

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + 2\ell \cos\theta + \ell^2}{(1 + \ell)^2}, \quad \frac{d(\frac{E_1}{E_0})}{d\ell} = 0 \Leftrightarrow \ell = 1, \quad \frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$



且 $\cos\theta$ 的取值范围为 $-1 \leq \cos\theta \leq 1 \Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = \cos^2\theta$, 则在 实验室系中 ($\theta = \pi$) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $E_1 = 0$. 失去动能

应用: 反应堆中子减速, 利用氢为 中子减速 ($\ell=1$) 效果较好

且 动能足够低以改与 相对论效应, 上述经典公式均可使用

(仅用到动能与质量守恒, 不涉及经典过程是粒子过程, 只考虑初末状态)