

## 第二章. 变分原理和拉格朗日方程

### §1. 哈密顿原理

Intr: 达朗贝尔原理 利用的是某一点的变分, 因而也叫做微分.

而哈密顿原理是对路径的变分, 是积分原理

物体的运动处于位形空间中. 即  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  所构成的空间.

(最好加上  $t$ ? 这样更直观)

Thm. 哈密顿 (Hamilton) 原理: 在单连系<sup>虚功不为零的力</sup>统 (所有力均可由单一广义标势  $U(q, t)$  函数给出),

亦例如  $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j})$ ,  $U$  为广义标势. 中, 哈密顿原理表述为

系统从  $(q, t_1)$  到  $(q, t_2)$  的实际运动, 使线积分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = T - U \quad \text{取行平均值.}$$

求极值即为变分法:  $I = I[L]$ , 因而有  $\frac{\delta I}{\delta s} = 0$ . 变分取  $q, \dot{q}, t$  中  $V$ -个参数来作为  $s$ , 书-个取为  $t$  及  $s$ .

不妨取  $t$ . 则由 Hamilton 原理  $\Rightarrow E-L$  方程

$$\frac{\delta I}{\delta s} = 0 \Rightarrow \delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = (\quad) \delta s = 0.$$

Att: Hamilton 原理在完全约束下  $\Leftrightarrow E-L$  方程 (相当于 EoM)

而在一般相况下, Hamilton 原理是推导 EoM 的充分条件 ★ (非单连系统中  $L$  不定义为  $T-U$ )

且利用 Hamilton 表述好处大,  $L$  在力学与电磁学协变. 由 Hamilton 导出运动方程协变.

或  $L$  不变, 可直接代入 例如  $L = \frac{1}{2} m v_{\text{rel}}^2 - U = \frac{1}{2} m (\vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{rel}})^2 - U$ .

Ex 在单约束系统下, 约束约束下, 用哈密顿原理推导 E-L 方程

实际上这相当于  $\frac{\delta I}{\delta s} = 0$ . 由于取什么函数都行, 不妨取  $s$  为  $q$  并做等时变分,

$$\delta I = \delta \int_1^2 L dt = \int_1^2 \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

(Att.  $\delta L = L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)$ ,  $\delta q = \alpha \eta(t)$ ,  $\delta \dot{q} = \alpha \dot{\eta}(t)$ ,  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$  且  $\alpha \ll 1$ , (若  $\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$ )

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_1^2 \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} \right) dt = \int_1^2 \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt$$

$$\text{而 } \int_1^2 d \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_1^2 = 0.$$

所以原式 =  $\int_1^2 \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt$ . 根据变分原理, 由于  $\eta(t)$  可任意取 ( $q$  为广义坐标)

$$\text{实际上为 } \int_1^2 \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt = 0. \text{ 所以有 } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Tip. 基本变分问题还可推广到 ①  $L$  与  $\dot{q}, \ddot{q}$  等相关时 或 ②  $s$  是  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , 变分也为多正时.

当且此时有  $\frac{dq}{dt_1}, \frac{dq}{dt_2}, \dots$  等  $q$  关于不同  $s$  的不同所微分 或 ③ 端点不同之时.

## §4. 将哈密顿原理推广到非约束子

Intr: 在推导运动方程时, 若约束非完整, 则不能认为  $\delta q_j$  独立

否则仍有 Hamilton 原理成立, 即  $L = T - U$ ,  $\delta \int_1^2 L dt = 0$ , 但从中无法推导出 E-L 方程.

因而通过拉格朗日乘子法来获得运动方程

Task. 利用拉格朗日乘子法. 在拥有开约束形式  $\sum_k a_{kt} dq_k + a_{tt} dt = 0$  or  $\sum_k a_{kt} \dot{q}_k + a_{tt} = 0$  ( $k=1, 2, \dots, m$ )

的约束的系统中得出运动方程. ( $a_{tt}, a_{kt}$  均为  $q, t$  函数,  $q$  有  $n$  个,  $n > m$ )

当约束了粒时, 即可为  $dF_c = 0$  则有  $\delta F_c = \sum_k a_{ik} \delta q_k = 0$ .

可以证明, 即使约束不了粒, 若  $\delta q_k$  要构成真实路径 (满足约束) 也无需满足  $\sum_k a_{ik} \delta q_k = 0$

在非穴整系中, 仍有  $L = T - U$ ,  $\delta \int_1^2 L dt = 0$ .

或称约束力虚功为零

则有  $\int_1^2 (\sum_k (\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k}) \delta q_k) dt = 0$ . 但此时  $\delta q_k$  并非独立, 而有  $\sum_k a_{ik} \delta q_k = 0$  的  $m$  个约束.

此时, 可以令  $q_1, \dots, q_{n-m}$  独立,  $q_{n-m+1}, \dots, q_n$  由  $q_1, \dots, q_{n-m}$  确定.

将约束乘上拉格朗日乘子加入变分方程

$$\int_1^2 \sum_k (\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_l \lambda_l a_{lk}) \delta q_k dt = 0.$$

此时, 对于  $k = n-m+1, \dots, n$ , 由于  $q_k$  不独立, 不必令  $\lambda_l = 0$ .

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}.$$

如此由  $m$  个方程可完全确定  $\lambda_l$ , 此时对于  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $q_k$  独立, 因而有

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}.$$

因而合并后有  $\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) ( $l = 1, 2, \dots, m$ )

这里还有  $n$  个方程  $n+m$  未知数, 因而再加上  $\sum_k a_{ik} dq_k + a_{ie} dt = 0$  的  $m$  个方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l a_{lk} \lambda_l \\ \sum_k a_{ik} dq_k + a_{ie} dt = 0 \end{cases} \quad (\text{一般 } \lambda_l = \lambda_l(q, t))$$

Tip: 求出全部  $\lambda_l$ , 考虑其物理意义.

若将约束力全加入外力, 则有  $\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k' = \sum_l a_{lk} \lambda_l$ .

$$\sum_l Q_k' \delta q_k$$

$Q_k'$  实际上是约束力的广义力, 在  $\delta q_k$  全独立时,  $Q_k'$  应为零, 否则约束力虚功不为零。

实际上, 非完整系哈密顿原理 要求 约束力虚功为零

$$\delta \int_1^2 L dt = \delta \int_1^2 T dt - \delta \int_1^2 U dt = 0 \Leftrightarrow \delta \int_1^2 T dt = \int_1^2 \sum_k \left( \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt.$$

即  $\delta \int_1^2 T dt = - \int_1^2 \sum_k Q_k \delta q_k dt$ . 即相称路径动能时间积分为零 = 路径间虚功时间积分为零。

而此功由  $Q_k$ ,  $U$  导出的广义力提供, 亦即, 约束力虚功为零. 亦即若  $L$  取为  $T-U$ , 则约束力虚功为零。

$$\text{而 } \sum_k a_{ik} \delta q_k = 0 \Rightarrow \sum_k Q_k' \delta q_k = 0.$$

非完整 ( $\sum_k a_{ik} dq_k + a_i dt = 0$ )  $\xrightarrow{\text{实际约束}}$   $\sum_k a_{ik} \delta q_k = 0$   $\xrightarrow{\text{Hamilton 原理要求}}$   $\sum_k Q_k' \delta q_k = 0$   $\xrightarrow{\text{解自由度}} \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_i \lambda_i a_{ik} \\ \sum_k a_{ik} dq_k + a_i dt = 0 \end{cases}$   $\rightarrow Q_k'$  (约束广义力, 在  $\delta q_k$  非独立时不为零, 但  $\sum_k Q_k' \delta q_k = 0$ )

②  $\xrightarrow{\text{保证}} \sum_k a_{ik} \delta q_k = 0$   $\xrightarrow{\text{解自由度}} \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_i \lambda_i a_{ik} \\ \sum_k a_{ik} dq_k + a_i dt = 0 \end{cases}$

若  $L$  取为  $T-U$  且  $U$  不含约束力

实际问题:  $\delta q_k$  不独立后, 本  $Q_k' = 0$ . 现在必须写上它, 并加上  $Q_k' \delta q_k = 0$  来约束方程.

## §5. 变分原理表述的优点

- 1° 在力学中, 定义拉氏量用  $T$  与  $U$ , 这不随坐标系变化, 因而 Hamilton 原理不因坐标不同变化
- 2° 易推广到力学中一般不予考虑的电学, 场论系统中

(Tip: 以变分原理作为表述基础的场有什么, 当其中一个的物理含义改变时, 其他也能改变)

Task. 证明在上变换下, E-L 方程形式不变.

Def. 点变换: 将一组独立广义坐标变换到另一组的变换, 例如

$$q_i = q_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{不变} \Leftrightarrow \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_i} = 0 \text{ 的二组等价} \right]$$

自然, 对对称性知, 只需要推一侧, 那么就有  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ . ( $j=1, 2, \dots, n$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_i} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial s_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial s_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i} \right) \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} \quad (\text{对 } j \text{ 求和}) \end{aligned}$$

而对  $j=1, 2, \dots, n$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$  因而  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_i} = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

## §6. 守恒定理和对称性

Intro: 主要介绍 通过对称性或方程特殊形式观察来降低解方程难度。

或碰到不完全约束的方程, 也能得到解的一定性质

Def. 广义动量: 与广义坐标  $q_j$  共轭的广义动量  $p_j$  定义为

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Tip: 一般可以找到对应, 当  $L$  与  $q_j$  无关时,  $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ , 当选用直角坐标时, 一般为线动量

当选用角坐标时, 一般为角动量

Def. 循环坐标: 若系统拉氏函数不含  $q_j$ , 则称  $q_j$  为循环坐标 (当然, 可能有  $q_i$ )

Tip: 也有将此类坐标称为可遗坐标, 将  $T$  中不含的坐标定义成循环坐标。

守恒 Thm 1. 共轭于循环坐标的广义动量守恒。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \text{ 若 } q_j \text{ 循环, 则 } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (p_j) = 0 \Rightarrow p_j \text{ 守恒}$$

Tip. 这可以看成对  $L$  的修正, 将  $L$  中循环坐标的广义速度  $\dot{q}_j$  替换为  $p_j$ , 并将其看作独立变量.

Tip. 由于之前两个关于能量(线+角)的定理, 角动量守恒也至少要满足, 但这个定理不需要

例如在存在电磁力时<sup>带电粒子</sup>若以  $x, y, z$  为广义坐标, 且若  $\phi, A$  即不含  $x$ .

$$\text{则 } \frac{d}{dt} (p_x) = \text{const. 即 } \frac{\partial L}{\partial x} = \text{const.} \Leftrightarrow m\dot{x} + qAx = \text{const.}$$

Task. 由守恒 Thm 1, 得出线动量与角动量守恒定理(反过子)

1° 线动量守恒, 此时  $q_j$  作为循环坐标,  $dq_j$  代表系统整体沿  $\hat{n}$  的平动量(此时  $T$  不变, 且假设  $U$  不含  $q$ )

$$\text{由带广义力的 D-L 方程, } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad \text{与 } T \text{ 和 } Q_j \text{ 有关.}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \vec{p} \cdot \hat{n} \quad \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \text{ 指 } q_j \text{ 在 } dq_j \text{ 中, } \vec{r}_i \text{ 变化是 } p_j dq_j \right)$$

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \vec{F} \cdot \hat{n} \quad \text{若 } U \text{ 不含 } q, \text{ 则 } Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0.$$

此即 循环 +  $U$  不含  $q$  +  $dq_j$  表平动  $\Rightarrow$  外力在平动方向合力为零 则有 线动量在该方向守恒

2° 角动量守恒. 若此时  $dq_j$  表示系统绕某轴的  $dq_j$  角度转动 此轴方向为  $\hat{n}$ .

$$\text{同上. } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \hat{n} \cdot \vec{L}$$

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \hat{n} \cdot \vec{N}, \quad \text{同样由于 } q_j \text{ 循环, } Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$$

也即在转轴内, 以质心为参考点 方向上力矩为零 则在转轴内角动量守恒

Tip. 循环意味着系统在  $q_j$  上有对称性 ( $L$  在  $dq_j$  下不变), 也对应了守恒律 (依赖于  $q_j$  的  $p_j$  守恒)

守恒 Thm 2. 若拉氏函数不显含时间, 则能量函数守恒.

Def. 能量函数: 定义  $h = \sum_j q_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$  为能量函数

Prop 1.  $h$  在数值上等于  $T$ , 而  $h$  是  $n$  个独立变量  $q_j$  与  $\dot{q}_j$  对时间导数函数

但  $h$  是  $2n$  个独立变量  $q_j, \dot{q}_j$  与  $t$  的函数

Prop 2. 在坐标变换方程不含  $t$  ( $T=T_2$ ), 势中不含  $\dot{q}$  时,  $h=T+U$ . 为总能量.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

$$\frac{dh}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

因而在  $L$  不显含  $t$  时,  $h$  守恒.

Tip. 若  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  则  $h = \text{const}$ , 这是一种守恒积分, 有时称为雅可比积分

(雅可比积分多指受限三体问题中的守恒积分, 实际上, 它只是  $h$  的特例)

Att. 以上守恒律均以系统单值为前提 ( $L=T+U$  形式)

Task. 对  $h$  的 Prop 2 补充证明

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = T_1 + 2T_2 \quad (\text{欧拉齐次定理})$$

① 在  $U$  不含  $\dot{q}$  时,  $\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$

$$h = T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2 - U) = T_2 - T_0 + U.$$

② 当坐标变换不显含  $t$  时  $T_0 = T_1 = 0, T = T_2, \quad h = T_2 + U = T + U$ . 为总能量

Tip. 同一系统的能量函数, 大小与形式一般均与广义坐标组有关 (单位消去  $\frac{dL(q, \dot{q})}{dt}$ )

Extra. 当非单位, 例如存在耗散时有

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} - 2\mathcal{F}$$

证明同上, 不过需在  $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$  那里替换为  $-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}$

则  $\frac{dh}{dt} = -\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial t}$  又  $\mathcal{F}$  为  $\dot{q}_j$  二次齐次,  $\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 2\mathcal{F}$

于是  $\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} - 2\mathcal{F}$  若  $L$  不显含  $t$ ,  $L$  不显含  $\dot{q}$ , 坐标反演不显含  $t$ , 则  $\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F}$

Ex. 在一定情况下, Especially - 1D, 不用引入耗散函数, 也可组合守恒函数

例如考虑  $L = e^{rt} [\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}]$  的 EOM.

$$\text{EOM: } \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow re^{rt}m\dot{q} + me^{rt}\ddot{q} + ke^{rt}q = 0$$

$$\text{即 } \ddot{q} + r\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \quad (\text{阻尼系数为 } r, \text{ 固有频率为 } \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$\text{若取 } s = e^{\frac{r}{2}t} q \text{ 作变量替换, } L = \frac{1}{2} [m(\dot{s} - \frac{r}{2}s)^2 - ks^2]$$

$$\text{此时 EOM: } \ddot{s} + (\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4})s = 0 \quad \text{为谐振子}$$

$$\text{此时有守恒量, 因为 } \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \Rightarrow h = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \dot{s} - L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + (\frac{k}{2} - \frac{1}{8}mr^2)s^2 = \text{const.}$$

$$\text{代入 } s = e^{\frac{r}{2}t} q \Rightarrow h = \frac{m}{2} e^{rt} (\dot{q}^2 + r\dot{q}q + \frac{k}{m}q^2)$$

Ex. 若  $L$  的势能含与  $\psi$  相关的项, 则若广义坐标中有角动坐标  $\theta$ .

$$\text{则 } p_\theta \text{ 不再为 } L_\theta. \text{ 而为 } p_\theta = L_\theta - \sum_i \hat{n} \cdot \vec{r}_i \times \nabla_{\vec{r}_i} U \quad (\hat{n} \text{ 为转动轴的单位向量})$$

$$\text{Especially, 若为电荷势, 则 } U = q\phi - q\vec{A} \cdot \vec{v}, \quad p_\theta = L_\theta + \sum_i \hat{n} \cdot \vec{r}_i \times q_i \vec{A}_0$$

