§1. 转动惯量张量.

Thm. 刚体上任意一点的速度：取∀固定于刚体上的坐标系，设原点在 O'，Space坐标系原点为 O

设刚体上某点A相对 O' 矢径为 $\vec r$，刚体角速度为 $\vec\Omega$，则

$$\vec V_A = \vec V_{O'} + \vec\Omega\times\vec r$$

$$\vec V_A = \vec V_{O'} + \vec V_{O'r} = \vec V_{O'} + \left(\frac{d\vec r}{dt}\right)_{SO'} = \vec V_{O'} + \overset{0}{\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)_{O'}} + \vec\Omega\times\vec r = \vec V_{O'} + \vec\Omega\times\vec r$$

指不转动的随 O' 运动的系

（设刚体上二点 $\vec R_1,\vec R_2$，$\vec R_1 = \vec R_2 - \vec R$，设以 $\vec R_1$ 上为原点，角速度为 $\vec\omega_1$，$\vec R_2$ 的为 $\vec\omega_2$）

$$\left(\frac{d\vec R_1}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec R_2}{dt}\right)_s - \left(\frac{d\vec R}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec R_2}{dt}\right)_s - \underset{0}{\left(\frac{d\vec R}{dt}\right)_{R_1}} - \vec\omega_1\times\vec R = \left(\frac{d\vec R_2}{dt}\right)_s - \vec\omega_1\times\vec R$$

同理 $\left(\frac{d\vec R_2}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec R_1}{dt}\right)_s + \vec\omega_2\times\vec R$ $\Rightarrow (\vec\omega_1-\vec\omega_2)\times\vec R = 0$ 对∀$\vec R$成立，故即 $\vec\omega_1 = \vec\omega_2$?

Thm. 刚体相对某固定点的角动量：

$$\vec L = I\vec\omega,$$ I为相对刚体固定点的转动惯量张量

且有 $I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - x_ix_j)\,dm$ （同样地，可写为 $I = \int dm(r^2\mathbb{1} - \vec r\vec r)$）

由此可知 I 为张量

$$\vec L = \int dm\, \vec r\times\vec v = \int dm\, \vec r\times(\vec\omega\times\vec r)$$

$$[\vec r\times(\vec\omega\times\vec r)]_n = \epsilon_{lkn}\epsilon_{ijk} r_i r_j w_i = (\delta_{in}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jn}) r_i r_j w_i = r_l r_l w_n - r_i w_i r_n$$

$$\Rightarrow L_i = \int[(r^2 - r_i^2)w_i - r_ir_jw_j - r_ir_kw_k]\,dm$$

$$\Rightarrow I_{ij} = \int(\delta_{ij}r^2 - r_ir_j)\,dm, \quad \vec L = I\vec\omega$$

Tip. 根据质点系角动量定理，实际上，若质心运动速度为 $\vec V_1$，相对参考点也设为另一点之位矢为 $\vec r'+\vec r$（$\vec r'$ const）

则 $\vec L = \int dm\,(\vec r'+\vec r)\times(\vec v+\vec V_1) = \int dm\,\vec r\times\vec v + \vec r'\times\int dm\,\vec v + \left(\int dm\,\vec r\right)\times\vec V_1 + \left(\int dm\right)\vec r'\times\vec V_1$

若取参考点为质心，则 $\int dm\,\vec{r}=0$，$\int dm\,\vec{v}=0$ 则

$\vec{L}=\int dm\,\vec{r}\times\vec{v}+M\vec{r}_c\times\vec{v}_c$ 即角动量为质心的自身角动量＋质心角动量

所以 I 一般为质心为参考点时的角动量，计算时在刚体质心系中计算

Thm. 刚体相对其上某点转动的能量：

$$E_r=\frac{1}{2}\vec{\omega}^T I\vec{\omega}\ ,\quad I\text{为相对该点的转动惯量张量}$$

$$E_r=\int dm\,\frac{1}{2}v^2=\int dm\,\frac{1}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})=\int\frac{dm}{2}\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{v})=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}=\frac{1}{2}\vec{\omega}^T I\vec{\omega}$$

Tip. 若该点在以 $\vec{v}_1$ 运动，考虑计算刚体相对 S 系的能量.

$$E_k=\int dm\,\frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{v}_1)^2=\int dm\left[\frac{1}{2}(v^2+v_1^2)+\vec{v}_1\cdot\vec{v}\right]=E_r+\frac{1}{2}Mv_1^2+\vec{v}_1\int dm\,\vec{v}$$

此时，若仍选取该点为质心，$\int dm\,\vec{v}=0$.（$\int dm\,\vec{v}=\int dm\,\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\int(dm\,\vec{r})=0$）

此时 $E_k=E_r+\frac{1}{2}Mv_c^2$ 即动能＝质心动能＋相对质心转动动能

Def. 相对刚体某转动轴的转动惯量：$I=\hat{n}^T I\hat{n}=\int dm\,(r^2-(\vec{r}\cdot\hat{n})^2)$

记 $\frac{1}{2}\omega^T I\omega=\frac{1}{2}I\omega^2$，这个 I 为绕 $\hat{\omega}=\hat{n}$ 的转动惯量，而 $\vec{\omega}=\omega\hat{n}$ 因而有

$$I=\hat{n}^T I\hat{n}=\int dm\,(r^2-(\hat{n}\cdot\vec{r})(\vec{r}\cdot\hat{n}))=\int dm\,(r^2-(\hat{n}\cdot\vec{r})^2)$$

几何意义上，可理解为质量以到转轴距离平方为权的求和.

Thm. 关于刚体上任一点转动惯量张量与关于质心的转动惯量张量的关系.

设该点到质心的矢径为 $\vec{R}$（实际上方向正负无关），$\vec{R}=\vec{OC}$

$I_0 = I_c + M(R^2\mathbb{1} - \vec{R}\vec{R})$ or $I_{0ij} = I_{cij} + M(\delta_{ij}R^2 - R_iR_j)$

只需将计算式上的 $\vec{r}$ 代为 $\vec{r}\,' + \vec{R}$，并利用 $\int dm\,\vec{r}\,' = 0$ 即可

Tip. 即 相对O点转动惯量张量 = 质心的转动惯量张量 + 质心相对O点转动惯量张量

§2. 惯性张量的本征值和主轴变换

Intro. 由于 $I_{ij} = \int(\delta_{ij}r^2 - r_ir_j)\,dm$，显然有 $I_{ji} = I_{ij}$，又 $I_{ij} \in \mathbb{R}$，因而有 I 为实对称矩阵。

根据酉定理，∀ n×n 矩阵A，即有酉矩阵U，s.t. U^HAU 为上三角，若 $A^H = A$，则为对角的

这意味着 厄米矩阵均可酉对角化(且实)，在物理学中，自然成立。

因而 I 也可对角化；变换矩阵 可导入 坐标里构成一组新的刚体固连坐标

在此坐标下，I 具有对角形式。

Thm. 对∀刚体，总可以选取直角坐标(固连于刚体)，使相对此坐标原点的转动惯量张量对角

Def. 此时的三根轴，称为刚体的主轴

Tip. 记相对于主轴的转动惯量为 I_1, I_2, I_3 (根据 $I_{轴} = \hat{n}^T I \hat{n}$ 可知即为三对角元)

1° 若 $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ 则称刚体为不对称陀螺

2° 若三者中有二个以上相等 则称其为对称陀螺

3° 若 $I_1 = I_2 = I_3 = I_0$，则称其为球状陀螺。

↓

根据定义，球状陀螺对任何轴的转动惯量均为 $I_{轴} = \hat{n}^T I \hat{n} = I_0\,\hat{n}\cdot\hat{n} = I_0$.

Def. 回转半径：刚体总质量为 M，相对某轴转动惯量为 I，则相对于该轴的回转半径 R_0 定义为

$$I = MR_0^2$$

Def. 惯性椭球：定义 $\vec{\ell} = \frac{\hat{n}}{\sqrt{I}}$，且坐标系已为主轴坐标系

$$I = \hat{n}^T I \hat{n} \Leftrightarrow 1 = \vec{\ell}^T I \vec{\ell} \Leftrightarrow \ell_x^2 I_1 + \ell_y^2 I_2 + \ell_z^2 I_3 = 1.$$

因而 $\vec{\ell}$ 在一个椭圆球上，该椭球称为惯性椭球。

$\vec{\ell}$ 的方向与转轴一致，$\vec{\ell}$ 的长度反比于绕该轴转动惯量的平方

§3. 欧拉运动方程

Intro. 刚体的 L 可分，分为描述平动的 L_c 与描述转动的 L_r

$$L = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I_c \vec{\omega} - V(\vec{r})$$

$$L_c = \frac{1}{2} M v_c^2 - V(\vec{r}), \quad L_r = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I_c \vec{\omega}$$，相当于 $\vec{r}$ 与 θ 的二组。

Thm. 刚体绕定点转动的欧拉运动方程：$\vec{L}$ 为选取定点在随动系下的角动量

①参考系选取

Space 系相对定点坐标平动，随刚体运动，而 Rigid 系相对刚体静止，$\vec{\omega}$ 为刚体角速度，$\vec{N}$ 为相对定点力矩

当该定点选取为质心时，平动非惯性力力矩为 0，$\vec{N}$ 即为外力矩。

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N} \quad (\text{牛顿运动方程}), \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

若 Rigid 系选刚体主轴系，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$，$N_1, N_2, N_3$ 为 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{N}$ 的主轴分量，I_1, I_2, I_3 分别为对应主轴转动惯量

分解方程得到

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) = N_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) = N_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j\omega_k I_k = N_i$$

$$I_3\frac{d\omega_3}{dt}+\omega_1\omega_2(I_2-I_1)=N_3$$

此即为欧拉运动方程，描述 $\vec{\omega}$ or $\vec{L}$ 在主轴系内的变化

Att. 利用 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i$ 也可推导出 Euler Equations.

广义坐标选取 Euler Angle (θ,ϕ,ψ)，$\vec{\omega}$ 的分量在主轴系内已知，$Q_i=\sum \vec{F}_j\cdot\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$ 与 N_i 相关

但只有一个 Q_i 表示沿轴的力矩，但由于最终，运动方程不含广义坐标

因而可根据广义坐标来获得三个对称方程

应用实例

§4. 自由不对称陀螺 ($\vec{N}=0$)

方程：在主轴系内（体系相对自己静止，不然任何自己静止，以自己为标准）

$$\begin{cases} I_1\frac{d\Omega_1}{dt}=\Omega_2\Omega_3(I_2-I_3) \\ I_2\frac{d\Omega_2}{dt}=\Omega_3\Omega_1(I_3-I_1) \\ I_3\frac{d\Omega_3}{dt}=\Omega_1\Omega_2(I_1-I_2) \end{cases}$$

1° 两个守恒量：能量与角动量（是值，在主轴系内可以转动）

$$\begin{cases} E=\frac{1}{2}I_1\Omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\Omega_2^2+\frac{1}{2}I_3\Omega_3^2 \\ L^2=I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2+I_3^2\Omega_3^2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} E&=\frac{L_1^2}{2I_1}+\frac{L_2^2}{2I_2}+\frac{L_3^2}{2I_3} \\ L^2&=L_1^2+L_2^2+L_3^2 \end{aligned}$$

理论上，用此二守恒式，从某式子中消去2个角速度，然后再用椭圆函数求解

2° 不求完全解时，考虑其运动，从几何上 ($\vec{\omega}=\vec{\Omega}$)

定义 $\vec{e} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$ 在主轴系中，$\vec{e}^T I \vec{e} = 1 \Leftrightarrow I_1 e_1^2 + I_2 e_2^2 + I_3 e_3^2 = 1 = F(e_1, e_2, e_3)$

因而在主轴系中，$\vec{e}$ 位于一个固定的椭球上.

该椭球在 $\vec{e}$ 处的法向量为 $\nabla_e F = 2(I_1 e_1, I_2 e_2, I_3 e_3) = \sqrt{\frac{2}{T}}\, I\vec{\omega} = \sqrt{\frac{2}{T}}\, \vec{L}$

因而在 $\vec{e}$ 处法线在 space 系中方向不变.

又有 $\vec{e}\cdot\vec{L} = \sqrt{2T}$，因而 $\vec{e}$ 在 $\vec{L}$ 上投影不变.

因而作出一个惯性椭球，主轴系相对它固定，刚体运动相当于该椭球

不可变平面

在以 $\vec{L}$ 为法向，距 $\vec{L}$ 起点 $\frac{\sqrt{2T}}{L}$ 的一个平面上作无滑滚动

由于接触点为 $\vec{e}$ 终点，而 $\vec{e}$ 终点在刚体 $\vec{\omega}$ 的瞬轴上，因而该点瞬时静止

接触点在惯性椭球上描出本体极迹，在平面上描出空间极迹

运动可描述为本体极迹沿不可变平面上的空间极迹作无滑滚动

3° 以上说明 $\vec{\omega}$ 运动，但无 $\vec{L}$ 运动，下说明 $\vec{L}$ 运动

从 $\begin{cases} E = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \\ L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \end{cases}$ 可知 $\vec{L}$ 在动能椭球与球交线上运动（主轴系内）

假设 $I_1 \le I_2 \le I_3$

且要有交线，$\sqrt{2I_1E} < L < \sqrt{2I_3E}$ 才可.

从球扩张来看，在轴1附近与轴3附近运动稳定，轴2附近运动不只能在2附近

轴2附近的球在半径大于一个方向，小于另一个方向，一部分在外，一部分在内

Tip：绕轴时，$T = \frac{L^2}{2I_i}$，若 L 不变，T 减小，则最后会绕 I 最大的轴旋转，直至 T 无法再减

4° 特殊情况（对称，例如 $I_1=I_2$）

$$\begin{cases} I_1\dfrac{d\omega_1}{dt} = -(I_3-I_1)\,\omega_3\omega_2 \\ I_2\dfrac{d\omega_2}{dt} = (I_3-I_1)\,\omega_3\omega_1 \\ I_3\dfrac{d\omega_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

$\omega_3 = \text{const}$ 则代入 1, 2 方程得到

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_1 + \dfrac{(I_3-I_1)^2\omega_3^2}{I_1I_2}\,\omega_1 = 0 \\ \ddot{\omega}_2 + \dfrac{(I_3-I_1)^2\omega_3^2}{I_1I_2}\,\omega_2 = 0 \end{cases}$$

因而均以角频 $\Omega = \dfrac{(I_3-I_1)\,\omega_3}{I_1}$ 作振动

且 ω_1 与 ω_2 反相，因而 $\omega_1^2+\omega_2^2 = \text{const}$

若设 $\omega_1 = A\cos\Omega t$，$\omega_2 = A\sin\Omega t$，以 A，ω_3 表示二守恒量

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2}I_1A^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \\ L^2 = I_1^2A^2 + I_3^2\omega_3^2 \end{cases}$$

在 $I_3 \sim I_1$ 时，$\Omega \ll 1$，转轴进动周期较长。地球 $\frac{I_3-I_1}{I_1}$ 约 0.00327

$\therefore \Omega = \frac{\omega_3}{306}$ 约 $\frac{\omega}{306}$。但地球非刚体，作为弹性体，它的一部分会随转轴移动

使 I_3-I_1 变小，因而（地球所受力矩几乎为零）T 大于 300 天（大约为 420 天）。这种进动称为钱德勒摆动

注意：这进动周期 ≪ 二分点进动周期（万年）

§5. 有一固定点的对称重陀螺

Intro. 许多实际物体，均可近似看为定点对称重陀螺

① 量化描述

取对称轴（也为主轴）为主轴系的 z 轴，以静止点为原点，选取 x, y 轴

并以欧拉角作为主轴系取向参量（意欲以 Langrange 方程求解）

由于力矩在主轴系内方向并不固定，且它在主轴系内的取向难以用 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 等表示，一般会引入欧拉角

② 写出物理量，列出方程。

$\omega_1 = \dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi \qquad \omega_2 = -\dot\theta\sin\psi + \dot\phi\sin\theta\cos\psi \qquad \omega_3 = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi$, $I_1 = I_2$

$$T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2$$

$U = mgl\cos\theta$, l为质心到原点长度, m为总质量

$$\Rightarrow L = T - U = \frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgl\cos\theta$$

先观察有 $\frac{\partial L}{\partial \phi}$, $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$, 因而 p_ϕ, p_ψ 均为守恒量. 分别表示 ϕ 与 ψ 方向上的角动量

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1\sin^2\theta\,\dot\phi + I_3\cos\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = I_3\omega_3 \qquad \left(\omega_3 = \frac{p_\psi}{I_3}\right)$$

记 $p_\phi = bI_1$, $p_\psi = aI_1$ 以 a, b 为新引入的常数, 可解得

$$\begin{cases} \dot\phi = \dfrac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ \dot\psi = \dfrac{I_1}{I_3}a - \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(b - a\cos\theta) \end{cases}$$

列出θ方向的 E-L 方程: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\Rightarrow I_1\ddot\theta - I_1\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\sin\theta + mgl\sin\theta = 0$$

or 利用能量守恒 (第一守恒量) $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = E$, $\mathcal{H} = T + U$

$$\frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_1\frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{I_1^2}{I_3}a^2}_{=\frac{1}{2}I_3\omega_3^2} + mgl\cos\theta = E$$

记 $E' = E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_1\frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = E' = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + V_{eff}(\theta)$$

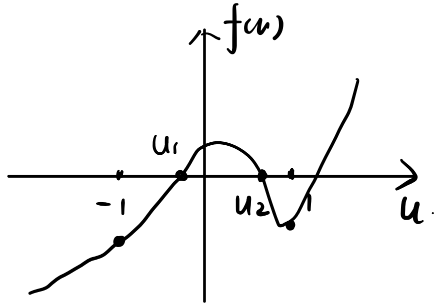
③ 定性处理方程

替换变量: $u = \cos\theta$. 添加新变量 $\alpha = \frac{2E'}{I_1}$, $\beta = \frac{2mgl}{I_1}$

原方程 $\Leftrightarrow \dot u^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$

由此，$t=\int\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(\alpha-\beta u)-(b-au)^2}}du$，这是椭圆积分，那么可以把 u 表为 t 的椭圆函数，进而了解到 $\theta(t)$

若不解出方程，观察其右侧，化为 $f(u)$，画出图象。



$f(1)=-(b-a)^2<0$ $f(-1)=-(b+a)^2<0.$

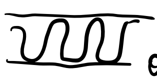
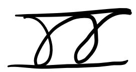
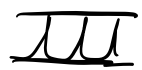
又因为方程有解（实际运动存在，此时 $\dot{u}^2>0$，所以在 $u\in[-1,1]$ 内必有大于0）

因而方程实际在 (u_1,u_2) 代表角度间来回运动

θ 位于 $\theta_1=\arccos u_1$ 与 $\theta_2=\arccos u_2$ 二圆间

当轴在环绕运动时，同时也有章动（轴的 θ 运动）

在 u_1,u_2 处的 $\dot{\phi}$ 状态？轴在圆上投影点的运动形状：

若 $\dot{\phi}$ 在 u_1,u_2 处同号， $\theta=\theta_1$ $\theta=\theta_2$. 若异号  $\theta=\theta_1$ $\theta=\theta_2$ 若有一个为零  $\theta=\theta_1$ $\theta=\theta_2$（但 $\dot{\phi}\neq0$，否则会进动）

例如对应 $\dot{u}=0$ 时，$\dot{\phi}=0$ 即一根为 $u=\frac{b}{a}$ 一致于 θ_1

根据一些特殊情况

1° $\frac{1}{2}I_3\omega_3^2\gg 2mgl$. 且 $\dot{\theta}=\dot{\phi}=0$ ($t=0$ 时)，又 $\dot{\theta}$ 与 $\dot{\phi}$ 均为重力产生效应，因而它们相对小来说，是十分小的

这样的陀螺称为快陀螺

设初始角度为 θ_0，$\dot{\phi}$ 为零（放手时刻）

$E'=mgl\cos\theta_0 \iff \alpha=\beta u_0,\ u_0=\cos\theta_0$

$f(u) = (u_0 - u)\{-\beta^2 u^2 + a^2 u - a^2 u_0 + \beta\}$，另一条由 $-\beta^2 u^2 + a^2 u - a^2 u_0 + \beta = 0$ 给出

or $\quad (u_0 - u)^2 + \left(\frac{a^2}{\beta} - 2\cos\theta_0\right)(u_0 - u) - \sin^2\theta_0 = 0 \qquad \frac{a^2}{\beta} = \frac{I_3}{I_1}\,\frac{I_3 \omega_3^2}{2mgl} \gg 1$

因而 $\Rightarrow u_0 - u \simeq \dfrac{\sin^2\theta_0}{\frac{a^2}{\beta} - 2\cos\theta_0} \simeq \dfrac{2mglI_1}{I_3^2\omega_3^2}\sin^2\theta_0$ （确实有随 $\omega_3\uparrow$，$(u_0-u)\downarrow$）