Chapter VIII. Hamilton Equations

§1. Legendre Transform and Hamilton Equation.

Task. 通过对 $L(q,\dot q,t)$ 进行勒让德变换，结合 E-L 方程，推导 Hamilton Equation.

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L$$ ，其中 $\dot q = \dot q(q,p,t)$, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$

$\mathcal{H}$ 即为对 L 的变量组 $(q,\dot q,t)$ 中的 $\dot q$ 进行 Legendre Transform 后的函数

$$d\mathcal{H} = \dot q dp + p d\dot q - dL = \dot q dp + p d\dot q - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial \dot q}d\dot q - \frac{\partial L}{\partial t}dt = \dot q dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

又 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ 即 $\frac{\partial L}{\partial q} = \dot p$ $\Rightarrow d\mathcal{H} = \dot q dp - \dot p dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot q & \cdots ① \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dot p & \cdots ② \\ \boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \cdots ③} \end{cases}$$

→ 实际上，我们通过对 $\mathcal{H}$ 再进行一次 Legendre 变换变回去

①② 称为 Hamilton Equation

(Def. 矩阵表示：记 $\vec\eta = (\vec q, \vec p)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, 可记为 $\dot{\vec\eta} = J\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec\eta}$)

这个方程不涉及 $\dot p$ 与 $\dot q$，非运动方程.

① $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\dot p + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\dot q + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$ ，因而若 $\mathcal{H}$ 不显含 t，那么 $\mathcal{H}$ 守恒

② 若 L 体系中，T 为二次齐次，U 不含广义速度，那么 $\mathcal{H} = T + U$，此时 $\mathcal{H}$ 为机械能.

§2. 哈密顿方程与变分原理，哈密顿主函数.

Task. 用变分原理推导 Hamilton Equation.

变分原理：在 (t_1,q_1), (t_2,q_2) 间的路径使 $\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L dt\right) = 0$.

代入 $L = p\dot{q} - \mathcal{H}$，将变分空间扩到相空间。

$\Leftrightarrow$ (t_1, q_1)，(t_2, q_2) 间 相空间 路径 使 $\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - \mathcal{H})dt\right) = 0$。（δ作用于）

令 $f = f(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t)$， 则上式实际上等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)\right)\delta q\, dt + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}}\delta p\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}}\right)\right)\delta p\, dt = 0$$

其中 δp、δq 为独立变分，由于 $\frac{\partial f}{\partial \dot{p}} = 0$，$\delta q_{t_1} = \delta q_{t_2} = 0$

则 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dot{p} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q} \end{matrix}$ 即哈密顿正则方程。

或有 $\delta L = \delta p\dot{q} + p\delta\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\delta p - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\delta q$。其中 $p\delta\dot{q} = -\dot{p}\delta q$（变分意义下，$\delta q|_{t_1} = \delta q|_{t_2} = 0$）

∴ 有 $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dot{p}$，$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}$。

因而，在 p, q 独立变分的修正哈密顿原理下，以 $\delta q|_{t_1} = \delta q_{t_2} = 0$，$\delta S = 0$ 可推出 Hamilton Equation.

Task. 对于真实路径 $(t_0, q_0) \to (t, q)$，作用量为 t, q 函数，称为哈密顿主函数 $S(q, t)$

求出 $\frac{\partial S}{\partial q}$ 与 $\frac{\partial S}{\partial t}$.

① 在 差无限小的 Δt 与 Δq 时，$(t_0, q_0) \to (t+\Delta t, q+\Delta q)$ 的路径 与 $(t_0, q_0) \to (t, q)$ 路径 差无限小

新路径为其变分路径。

②. 在 另一条路径 当为 原路径 的变分路径条件下 有.

$$\Delta S = \int_{t_0}^{t+\Delta t}(L+\delta L)dt - \int_{t_0}^{t} L\,dt \qquad (L+\delta L = L(q', \dot{q}', t).\ q' = q+\delta q,\ \dot{q}' = \dot{q}+\delta\dot{q})$$

$$= \int_{t_0}^{t}\delta L\,dt + \int_{t}^{t+\Delta t}(L+\delta L)dt. \quad (\text{下取一阶近似})$$

$$= \int_{t_0}^{t}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta \dot q\right]dt + \Delta t \times L$$

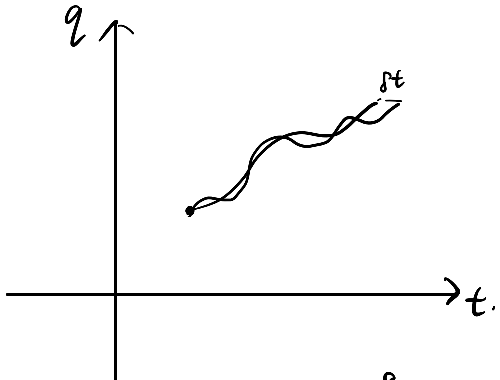
$$= p\,\delta q\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\right]\delta q\,dt + \Delta t \times L.$$ （根据 $q(t)$ 为真实路径，满足 L 氏方程，第二项为零）

$$= p(\Delta q - \Delta t\,\dot q) + \Delta t \times L = p\Delta q + (L - p\dot q)\Delta t = p\Delta q - \mathcal{H}\Delta t.$$

因而 $dS = p\,dq - \mathcal{H}\,dt$。在 S 为终点坐标的函数时

Task. 试导出满足能量守恒轨道的变分原理，端点只为 q 固定，t 不定。（莫培督原理）

连接 q_1, q_2 的轨道，若它是真实轨道，那么就有与之差别无限小的轨道



$$\delta S = + p_i \delta q_i - \mathcal{H}\,\delta t.$$ 这是二路径作用量之差

只有在其中一条是真实路径时才能成立

又 $S = \int_{q_1}^{q_2} p\,dq - \int_{t_1}^{t} \mathcal{H}\,dt = \int_{q_1}^{q_2} p\,dq - \mathcal{H}(t - t_1)$

$$\delta S = \delta\int_{q_1}^{q_2} p\,dq - \mathcal{H}\,\delta t.$$

因而有 $\delta\left(\int_{q_1}^{q_2} p\,dq\right) = 0$，其中变分轨道为满足能量守恒的首尾固定轨道，由此得到轨道方程

Tip. 真实求解时，需要将 p 化为 $p(q, dq)$。这样才得到合适的变分原理。

由 $\begin{cases} p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \\ \underbrace{E = E\left(q, \frac{dq}{dt}\right)}_{\text{体现能量守恒}} \end{cases}$ （由 $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ 可，L 不显含 t）（则 $\mathcal{H}$ 也不显含 t）

因而可解出 dt 关于 q 与 dq, E 之式

（由于一般 q 有多个，不能仅用一个 $E = E\left(q_i, \frac{dq_i}{dt}\right)$ 解出 $\frac{dq}{dt}(E, q)$，但可以解出 dt，因而一个变数）

Ex. 对于 $L = \frac{1}{2} T_{ij}\dot q_i \dot q_j - U(q)$，$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$，可用莫培督原理

$$E=\frac{1}{2}T_{ij}\dot q_i\dot q_j+U(q)\Rightarrow dt=\sqrt{\frac{T_{ij}dq_idq_j}{2(E-U)}}$$

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=T_{ij}\dot q_j\ \text{(对称)}\Rightarrow p_i dq_i=\frac{T_{ij}dq_idq_j}{\sqrt{T_{ij}dq_idq_j}}\sqrt{2(E-U(q))}$$

$$\Rightarrow S=\int_{q_1}^{q_2}\sqrt{2(E-U(q))\,T_{ij}(q)\,dq_idq_j}$$

对于单质点，以笛卡尔坐标，$E=\frac{1}{2}m\sum_i \dot x_i^2$ 则实际上 $T_{ij}dq_idq_j=m[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2]$

$$\Rightarrow S=\int_1^2\sqrt{2m[E-U(\vec r)]}\,dl$$

莫培督原理 $\Rightarrow\ \delta S=0$ 即 $\delta\int_1^2\sqrt{2m[E-U(\vec r)]}\,dl=0$.

Tip. 实际上，由此只给出轨迹方程，为确定运动

若对E变分. $S=\int pdq-E(t-t_0)$. $\Rightarrow \delta S=\frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E-\delta E(t-t_0)-E\delta t$.

又 $\delta S=-E\delta t$ $\therefore$ $\frac{\partial S_0}{\partial E}=(t-t_0)$ 由此 若已有轨迹方程，那么可得运动方程

§3. 正则变换

Def. 坐标变换：后坐标为 $(p,q,t)\to(Q,P,t)$ 其中 $Q=Q(p,q,t)$, $P=P(p,q,t)$

Def. 正则变换：若对新坐标有 $p_i\dot q_i-\mathcal{H}=P_i\dot Q_i-K+\frac{dF}{dt}$, F为相空间坐标的某个函数 即 $F(q,p,P,Q,t)$. 那么该变换称为正则变换

实际上，在此可乘一个 $\lambda\neq1$，此时称为扩展正则变换
扩展对应条件为 $MJM^T=\lambda J$

Tip. 正则变换的一些等价或必要条件 (记 $\vec\xi=(\vec Q,\vec P)$)

$\Rightarrow$ 方程形式不变，即在此变换下，由 $\dot{\vec\eta}=J\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec\eta}\Rightarrow\dot{\vec\xi}=J\frac{\partial K}{\partial\vec\xi}$

$\Rightarrow$ 泊松括号不变. Def. 泊松括号：对于某个变量组 $\vec\eta$ 的泊松括号定义为

$$[u,v]_\eta=\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^TJ\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\quad\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^TJ\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^T(M^{-1})^TJ(M^{-1})\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^TJ\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right)$$

⇒ 相空间体积元不变：即 Jocabian Matrix：$M=\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}\right)$，$|M|=1$.

⇔ 满足辛条件：$M^TJM=J$ （or ⇔ $MJM^T=J$）

$$P=pe^{-\gamma t} \quad \frac{\partial P}{\partial p}=e^{-\gamma t} \quad \frac{\partial P}{\partial q}=0$$
$$Q=qe^{\gamma t} \quad \frac{\partial Q}{\partial p}=0 \quad \frac{\partial Q}{\partial q}=e^{\gamma t}$$

Tip. 若 F 以不同变量为变元，可得由 F 形式导出的不同变换

令 $F=F(q,P,t)$ 则 $d(F+PQ)=pdq+QdP+(K-\mathcal{H})dt$ 令 $F+PQ=F_1$

$$\begin{pmatrix} e^{\gamma t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\gamma t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t}\end{pmatrix}$$

⇒ $\frac{\partial F_1}{\partial q}=p$，$\frac{\partial F_1}{\partial P}=Q$，$\frac{\partial F_1}{\partial t}=K-\mathcal{H}$ （若已知 F，可表示 F_1 为 $F_1=F(q,P,t)+PQ(q,P,t)$）

$$qPe^{\gamma t}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{\gamma t} \\ -e^{\gamma t} & 0\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{matrix}$$

无限小正则变换.

Def. 无限小正则变换：对生成函数为 $F=qP+\epsilon G(q,P,t)$ 的正则变换，$\epsilon \ll 1$，称为无限小正则变换

Task. 给出无限小正则变换的具体形式

$\frac{\partial F}{\partial q}=p=P+\epsilon\frac{\partial G}{\partial q}$ 而 $P=p+\delta p$ （无限小） ⇒ $\delta p=-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q}$

$\frac{\partial F}{\partial P}=Q=q+\epsilon\frac{\partial G}{\partial P}$ 而 $Q=q+\delta q$ ⇒ $\delta q=\epsilon\frac{\partial G}{\partial P}$. 并且由于 ϵ 已为一阶小

若将 G 中的 P 均替换为 p，只会变为 $\frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P}=\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p}+O(\epsilon)$，略去二阶有 $\delta q=\epsilon\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p}$

因而若记 $\delta\vec{\eta}=(\delta q,\delta p)$，有 $\delta\vec{\eta}=\epsilon J\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial\vec{\eta}}$

Def. $G(p,q,t)$ 称为无限小正则变换的生成函数.

Extra. 根据泊松括号也可表为 $\delta\vec{\eta}=\epsilon[\vec{\eta},G]_{\vec{\eta}}$.

Tip. 这样的变换满足辛条件.

$\xi=\vec{\eta}+\delta\vec{\eta}$，$M=\frac{\partial\xi}{\partial\vec{\eta}}=I+\frac{\partial(\delta\vec{\eta})}{\partial\vec{\eta}}=I+\epsilon J\frac{\partial^2 G}{\partial\vec{\eta}\partial\vec{\eta}}$，$\frac{\partial^2 G}{\partial\vec{\eta}\partial\vec{\eta}}$ 对称，J 反对称

故 $M^T=I-\epsilon J\frac{\partial^2 G}{\partial\vec{\eta}\partial\vec{\eta}}$，$M^TJM=J$. 满足.

而可以证明，随时间的演变是以的无穷小正则变换，因而不依变换参量，只要正则性有持续

Thm. 若 f 为相空间坐标与时间的函数 $f(q,p,t)$

$$\frac{df}{dt} = [f, \mathcal{H}]_{\vec{\eta}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$[f,\mathcal{H}]_{\vec{\eta}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\eta}}\right)^T J \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\eta}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\eta}}\right)^T \left(\frac{d\vec{\eta}}{dt}\right)$. $\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\eta}}\right)\dot{\vec{\eta}} + \frac{\partial f}{\partial t}$，得证.

Tip. 若 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$，那么 f 是运动常数 $\Leftrightarrow [f,\mathcal{H}]=0$.

又有 $\mathcal{H}$ 是随时间的无穷小正则变换生成函数（生成元）

$$\begin{cases} d\vec{\eta} = dt\,[\vec{\eta},\mathcal{H}]_{\vec{\eta}}. \\ \delta\vec{\eta} = \vec{\eta}(t+dt) - \vec{\eta}(t) \end{cases}$$

即新变量为 $\vec{\eta}(t+dt)$，是随时间变化后的新变量组.

Tip. $\delta\vec{\eta}$ 既可看成新旧变量与旧变量间的联系，又可看成对系统的某种操作

①对于同一个物理量，不同变量组实际在不同位置对应同一个点.

即 $(P(p_0,q_0,t), Q(p_0,q_0,t))$ 与 (p,q) 对应同一点，因而是从被动观点看.

物理量的值在对应点上数值相同. $\begin{cases} P(p,q,t) = p + \delta p \\ Q(p,q,t) = q + \delta q \end{cases}$

②从主动观点看，δp. δq 也可看成对系统的一个操作，例如平移旋转等.

此时，物理量数值会变化. $\delta u(q,p) = \frac{\partial u}{\partial q}\delta q + \frac{\partial u}{\partial p}\delta p = \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}}\right)^T \delta\vec{\eta}$.

代入 $\delta\vec{\eta} = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial \vec{\eta}} \Rightarrow \delta u = \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}}\right)^T J \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{\eta}}\right) = \epsilon\,[u,G]_{\vec{\eta}}$.

③例如对于 取 $u=\mathcal{H}$. . $\delta\mathcal{H}$ 表示进行操作后 $\mathcal{H}$ 改变的量. 即 $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\delta p$. ，若 $\frac{\partial G}{\partial t}=0$.

$\delta\mathcal{H} = \epsilon[\mathcal{H},G]_{\vec{\eta}} = -\epsilon\frac{dG}{dt}$. 因而

$\frac{dG}{dt}=0 \Leftrightarrow [\mathcal{H}, G]_{\vec{\eta}}=0 \Leftrightarrow \boxed{\delta\mathcal{H}=0}$ 而这有着明显的意义，在操作下不变。

因而若在某正则变换生成函数生成的无限小正则变换代表的操作下，$\mathcal{H}$不变

那么你的生成函数是守恒量。

例如平移对称时，$\delta\mathcal{H}$若为平移操作，那么对应的G守恒。

若旋转对称，那么旋转操作对应G守恒。

Task、寻找平移操作与旋转操作的生成函数。

① q_i 方向平移不变。 $\delta\vec{\eta}=(0,\cdots,\delta q_i,\cdots 0)$

$\delta\vec{\eta} = \epsilon J \frac{\partial G}{\partial\vec{\eta}}$ 由此得 $G=p_i$， $\delta q_i=\epsilon$ （当然，此处q_i取了x方向，对应了长度）

因而对应q_i方向平移变换的生成函数为其共轭的p_i

同理，对应p_i方向平移变换的为$-q_i$

② 对于旋转操作，设为质点系统，绕z轴 $d\theta$

$\Rightarrow \delta x_i=-y_i d\theta$， $\delta y_i = x_i d\theta$， $\delta z_i=0$ ，p_i同理

可验证，生成函数 $G=x_i p_{iy}-y_i p_{ix}$， $\epsilon=d\theta$.

实际上 $G=L_z$. 因而体系角动量为旋转变换生成函数

Tip. 2pn 之例：从证明 L 为生成函数，$\delta\vec{\eta}=d\theta J\frac{\partial L}{\partial\vec{\eta}}$. 再由此证明 $\vec{\eta}\to\vec{\eta}+\delta\vec{\eta}$ 为正则变换

§4. Hamilton-Jacobian Equation.

Task. 寻找使 $K=0$ 的母函数 $F(q,p,t)$

$K = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}$. $\frac{\partial F}{\partial q} = p$ 因而 F 满足

$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{H}(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t) = 0$.

Def. 哈密顿方程： $\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{H}(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t) = 0$、其中 $F = F(q, \alpha, t)$ α 为积分常数，与 q 一样有 n 个

$F(q, \alpha, t)$ 又写作 $S(q, \alpha, t)$. 其中 S 称为哈密顿主函数

Tip. $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}$, $\frac{\partial S}{\partial q} = p$. 恰满足作为坐标与时间的作用量定义，因而二者实为一物

Tip. 实际上，F 应该为含 P. $\frac{\partial F}{\partial P} = Q$, 但有 $\frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} = 0$, $\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P} = 0$ 所以实际上，P, Q 均为常数

所以可以取 F 中的 n 个 α 作为新的 P. $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = Q = \beta$ 为新的 Q. 它们均为常数

从 $\frac{\partial F(q, \alpha, t)}{\partial \alpha} = \beta$ 的 n 个方程中，就应可反解出 $q(\alpha, \beta, t)$. 因而得出运动的解

再从 $\frac{\partial F}{\partial q} = p$ 中可得 $p(\alpha, \beta, t)$.

Task. 求解 H-J 方程 (一般通过分离变量法)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}.$$