

Chapter VI 微扰振动 (小振动)

§1. 问题的表述

① 自由度 $\begin{cases} \text{可数个 (小振动)} \\ \text{不可数个 (波)} \end{cases}$

② 广义坐标: 选取 $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ 为一组广义坐标, 且广义坐标变换式不显含时间

并表示出 $V(q)$ 与 $T_{ij}(q)$ (T_{ij} 为 q 的二次齐次函数)

从而, $T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$

③ 平衡位置: 满足 $(\frac{\partial V}{\partial q_i}) = 0$ (n 个方程) 且若其次则 $(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j})$ 正定.

④ 平衡位置附近的运动方程: 作为小振动, $q_i = q_{i0} + \eta_i$, $\eta_i \ll 1$, (η_i) 为新广义坐标

则有 $L = \frac{1}{2} T_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) = \frac{1}{2} T_{ij}(q_0) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} (\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j})(q_0) \eta_i \eta_j$

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 \Leftrightarrow T_{ij}(q_0) \ddot{\eta}_j + (\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j})(q_0) \eta_j = 0 \Leftrightarrow T \ddot{\vec{\eta}} + V \vec{\eta} = 0.$$

$$\text{令 } (T_{ij}) = T, \quad (V_{ij}) = V, \quad E_k = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad V_{ij} = (\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j})(q_0), \quad \vec{\eta} = \vec{q} - \vec{q}_0$$

§2. 本征方程

$$\text{令 } \vec{\eta} = C_1 \vec{a}_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 \vec{a}_2 e^{-i\omega_2 t} + \dots + C_n \vec{a}_n e^{-i\omega_n t} \quad (\text{对应对称矩阵必可对角化})$$

$$\vec{q} = (C_1 e^{-i\omega_1 t}, \dots, C_n e^{-i\omega_n t})^T \quad (\text{则有 } A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n), \quad \vec{\eta} = A \vec{q})$$

$$\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2), \quad \sqrt{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad \text{均正}$$

$$\text{因而 } T \ddot{\vec{\eta}} + V \vec{\eta} = 0 \Leftrightarrow V A \vec{q} - T A \Omega \vec{q} = 0 \Leftrightarrow (V A - T A \Omega) \vec{q} = 0.$$

实际上, 方程解为 $|V - \omega^2 T| = 0$ 因而

① 求解 (久期) 特征方程 $|V - \omega^2 T| = 0$. 求解出 n 个特征值.

可能会出现简并

② 接着求解每个特征值对应特征矢 \vec{a}_i (注意特征矢与特征值对应关系)

有简并时, 用 Gram-Schmidt 正交化 (属于 ω_i 的 \vec{a}_1, \vec{a}_2 满足 $\vec{a}_1^T T \vec{a}_2 = 0$, 不然无法归一化, $A^T T A = I$)

可以进行归一化, 使 $A^T T A = I$. 在此情况下, $A^T V A = \Omega$

Def. 简正坐标: 令 $\vec{\eta} = A \vec{Q}$, 那么有

$$\text{EOM: } A^T T A \ddot{\vec{Q}} + A^T V A \vec{Q} = 0 \text{ 或 } \ddot{\vec{Q}} + \Omega \vec{Q} = 0.$$

$$\text{L 代量: } L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^T T \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^T V \vec{\eta} = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T \dot{\vec{Q}} - \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T \Omega \vec{Q}$$

均为主分量, 因而称 $\vec{Q} = A^{-1} \vec{\eta} = A^T T \vec{\eta}$ 为简正坐标

Tip. 当 A 未归一化时有对于不同 ω_i 的特征矢 \vec{a}_1, \vec{a}_2

$$\begin{cases} V \vec{a}_1 = \omega_1^2 T \vec{a}_1 \\ V \vec{a}_2 = \omega_2^2 T \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_2^T V \vec{a}_1 = \omega_1^2 \vec{a}_2^T T \vec{a}_1 \\ \vec{a}_1^T V \vec{a}_2 = \omega_2^2 \vec{a}_1^T T \vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{又有 } V, T \text{ 对称性相成}$$

$0 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) [\vec{a}_1^T T \vec{a}_2]$, 因而满足 $\vec{a}_1^T T \vec{a}_2 = 0$.

因而此可, 方程变为 $A^T T A \ddot{\vec{Q}} + A^T V A \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \Delta \ddot{\vec{Q}} + \Omega \Delta \vec{Q} = 0$, or $\ddot{\vec{Q}} + \Omega \vec{Q} = 0$.

但此代量 $L = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T \Delta \dot{\vec{Q}} - \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T \Omega \Delta \vec{Q}$. Δ 为一正反对称阵 (T 正定, $\vec{a}_i^T T \vec{a}_i$ 正)

③. 求解初值问题. 给定 $\vec{\eta}(0)$ 与 $\dot{\vec{\eta}}(0)$ (n 个 x 坐标而 $2n$ 个初值条件)

Solution 1. 不归化 A.

设 $\vec{\eta} = \text{Re}[C_1 \vec{a}_1 e^{-i\omega t} + \dots + C_n \vec{a}_n e^{-i\omega t}]$, 设 $\vec{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$. 每个 \vec{a}_i 满足 $A \vec{a}_i = -\omega_i^2 \vec{a}_i$.

$$\vec{\eta}(\omega) = \text{Re}[C_1 \vec{a}_1 + \dots + C_n \vec{a}_n] \Rightarrow A \text{Re}(\vec{C}) = \vec{\eta}(\omega) \quad \text{or} \quad \text{Re}(\vec{C}) = A^{-1} \vec{\eta}(\omega)$$

$$\vec{\eta} = \text{Re}[-i\omega_1 C_1 \vec{a}_1 e^{-i\omega t} + \dots + (-i\omega_n C_n \vec{a}_n e^{-i\omega t})]$$

$$\vec{\eta}(\omega) = \text{Re}[-i\sqrt{2} A \vec{C}] \Rightarrow \sqrt{2} A \text{Im}(\vec{C}) = \vec{\eta}(\omega) \quad \text{or} \quad \text{Im}(\vec{C}) = (\sqrt{2} A)^{-1} \vec{\eta}(\omega)$$

由上二式知 $\vec{\eta}(\omega)$ 与 $\vec{\eta}(\omega)$ 解出 \vec{C} , 进而求 $\vec{\eta} = \text{Re}[A \vec{C}]$ 即可

Solution 2. 归化 A. ($A^T T A = I$)

此时有 $\vec{\eta} = A \vec{Q}$. 同样记 $\vec{Q} = \text{Re}(C_1 e^{-i\omega t}, \dots, C_n e^{-i\omega t})$, $\vec{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$

$$\vec{\eta}(\omega) = A \text{Re}(\vec{C}), \quad \vec{\eta}(\omega) = A \sqrt{2} \text{Im}(\vec{C}) \quad \text{但不同在于 } A^{-1} = A^T T$$

$$\therefore \text{有 } \text{Re}(\vec{C}) = A^T T \vec{\eta}(\omega), \quad \text{Im}(\vec{C}) = (\sqrt{2})^{-1} A^T T \vec{\eta}(\omega)$$

$$\text{由此得 } \vec{Q}. \text{ 进而得 } \vec{\eta} = A \text{Re}(C_1 e^{-i\omega t}, \dots, C_n e^{-i\omega t})$$

§3. 耗散作用. (在下式中加入 $\nabla_i \mathcal{F}$) ($\vec{f} = -\nabla \mathcal{F}$, $\vec{Q}_f = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dq} = -\nabla_i \mathcal{F}$)

\mathcal{F} 定义为 $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij} \eta_i \eta_j$ (同样有 \mathcal{F}_{ij} 取在 q_0 处 (2))

$$\text{此时方程变为 } T\ddot{\eta} + \mathcal{F}\dot{\eta} + V\eta = 0.$$

此时一般不可对角化. 但若 $\exists \vec{\eta} = A \vec{\xi}$ 使三个矩阵同时可对角化 (一般若 \mathcal{F} 与 T_{ij})

$$\Rightarrow \ddot{\xi}_i + f_i \dot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0. \quad \text{此为二阶常微分方程, 有解}$$

特征根 $\omega_i' = \pm \sqrt{\omega_i^2 - f_i^2/4} - \frac{1}{2} f_i$, 因而实际上会出现复数

§4. 受迫共振. (运动方程中代表频率的多项式随时间同期变化, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0$)

Task 1. 对方程解形式的讨论

① 假设 $\omega(t)$ 是周期函数 (多频振荡). 那么 $\omega(t+T) = \omega(t)$

因此做变量替换 $t \rightarrow t+T$, 方程形式不变

对于一个二阶齐次线性微分方程, 设其通解为 $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$

其中 x_1 与 x_2 线性无关.

$$\text{由 } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega(t)x = 0, \quad \frac{d^2x(t+T)}{dt^2} + \omega(t)x(t+T) = \frac{d^2x(t+T)}{d(t+T)^2} + \omega(t+T)x(t+T) = 0.$$

因而 $x(t+T) = g(t)$ 也为方程的解

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

② 对矩阵 $\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}$ 的讨论.

记该矩阵为 R , 则可写为 $\vec{x}(t+T) = R(T) \vec{x}(t)$. $T = 2\pi/\omega$

若取特解为 $x_1(t), x_2(t)$ s.t. $x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 1$.

$$\text{那么有 } \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(T) & \dot{x}_1(T) \\ x_2(T) & \dot{x}_2(T) \end{pmatrix}$$

又, $W[x_1, x_2](t) = W(0) e^{-\int_0^t P(\xi) d\xi}$, 若 $P(\xi) = 0$ 因而 $W(t) = W(0) = 1$

\therefore 在基 $x_1(t), x_2(t)$ 下 (标准基), $\det R = 1$. (实际上对任意基也成立)

特征方程可解得特征值在 μ_1, μ_2 为 $\mu_{1,2} = \frac{x_1(T) + \dot{x}_2(T) \pm \sqrt{[x_1(T) + \dot{x}_2(T)]^2 - 4}}{2}$, 且有 $\mu_1 \mu_2 = 1$.

由此可知 $\mu_1 = \mu_2^*$ (非实), $\mu_1 = \frac{1}{\mu_2} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 与 $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \pm 1$

③ 在特征值下的解的形式

设特征值为 $\xi_1(t)$ 与 $\xi_2(t)$ 分别对应 μ_1, μ_2 . 则在基下, R 变为对角. (有对应的 R

$\vec{\xi}(t+T) = R \vec{\xi}(t)$ 则 $\xi(t)$ 一般具有 $\xi_i(t) = \mu_i^{\frac{t}{T}} \pi_i(t)$ 形式. $\pi_i(t+T) = \pi_i(t)$

① $\mu_1 = \mu_2^*$, $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ 均为非实数. 记 $\mu_1 = e^{i\lambda T}$ ($\lambda = \lambda(T)$)

此时 $\xi_1(t) = e^{i\lambda t} \pi_1(t)$, $\xi_2(t) = e^{-i\lambda t} \pi_2(t)$

是指振振荡因而运动有界.

② $\mu_1 = \frac{1}{\mu_2}$, $\mu_1 \neq \mu_2$. 则有 (不妨设 $|\mu_1| > 1$)

$\xi_1(t) = \mu_1^{\frac{t}{T}} \pi_1(t)$, $\xi_2(t) = \mu_1^{-\frac{t}{T}} \pi_2(t)$

其中一指数增长, 另一指数衰减.
 此即多支大振.

③ $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \pm 1$ 时, 有矩阵 R 有两种情况

1° 若代为 $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, 则可并入有实情况

2° 若代为 $\begin{bmatrix} \mu & e^{i\theta} \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ 此时矩阵不可对角化. 仍记大振为 ξ_i .

$\vec{\xi}(t+nT) = R^n \vec{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \mu^n & n\mu^{n-1}e \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} \vec{\xi}(t)$. 因而运动也无界.

Task 2. 对微分方程振动的参数 $\omega(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \nu t)$, $h \ll 1$ 分析解发生多支大振条件

假设 γ 接近 $2\omega_0$ (实际上这是共振位置) 即 $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$. $\varepsilon \ll 1$. (且实际上, 共振发生在 ε 与 h 同阶数量级时)

那么 根据上述对解性质的讨论 该解的周期为 $2T$. 则为

$$x = a(t) \cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t + b(t) \sin(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t \quad (\text{因为 } \omega \text{ 与 } \omega_0 \text{ 差别不大, 解的频率也与 } \omega_0 \text{ 差别不大,})$$

其中, $a(t), b(t)$ 变化很慢, 即 若 $a(t), b(t) \propto e^{st}$ (S 为复数 $\text{Im} S > 0$ 的指数解, $\text{Re} S$ 则决定振幅)

$$s \ll 1, \text{ 且假设 } s \sim \varepsilon. \therefore a \text{ 与 } b \sim \varepsilon a \text{ 与 } \varepsilon b$$

将 x 代入方程 $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$. 并仅保留 ε 的一阶项, 并利用 $\dot{a} = sa, \dot{b} = sb$

Tip. 在 $x(t)$ 的表达式中, 应也含有 $(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}) + (2\omega_0 + \varepsilon) \times k$ 为频率的项, 但实际上,

$(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}) + (2\omega_0 + \varepsilon)$ 频率项与振幅依赖于 $a_0(t)$ 与 $b_0(t)$, 且它们同阶 (见后面)

所以在 $h \ll 1$ 时可忽略, 因而实际上, 共振区间与 h^n 成正比

还需考虑到 $(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}) + (n-1) \times (2\omega_0 + \varepsilon)$ 频率项.

$$\Rightarrow \begin{cases} sa + \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2})b = 0 \\ \frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2})a - sb = 0 \end{cases} \text{ 要有解, 行列式为 } 0 \Rightarrow s^2 = \frac{1}{4}(\frac{h\omega_0}{2})^2 - \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{h\omega_0}{2} > \varepsilon > \frac{h\omega_0}{2}$$

因而所有 ε 是 h 的同阶无穷小, 且共振区间在 $2\omega_0$ 附近很窄的范围内

共振区间宽度 = 相对振幅变化 \times 共振频率

Tip. 对于同一频率 $2\omega_0$ 附近的振动, 令使 x 产生 $\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, $(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}) + k(2\omega_0 + \varepsilon)$ 的项为 k 共振, 共振区间与 $h\omega_0$ 成正比.
对于不同频率 $\frac{2\omega_0}{n}$ 的振动, 共振区间会按 h^n 减小. 约为 $h^n \omega_0$

Tip. 对于有序排列, 阻尼使扰动按 $e^{-\lambda t}$ 减小, 则发生共振事件变为 $s^2 > \lambda^2$

即共振区间变窄, 宽度变为 $2\sqrt{\frac{\hbar^2 \omega^2}{4} - 4\lambda^2}$, 且仅在 $\hbar > \frac{4\lambda}{\omega}$ 时才可能出现共振峰

§5. 非谐振效应 (非简谐振动)

Task. 探究若在近似平衡位置附近时考虑更高阶的近似, 那么全势

拉氏量与 EOM 发生什么样的变化 (无外力情况)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} T_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_0) q_i q_j \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k}(q_0) q_i q_j q_k \right] + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(T_{ij}(q_0) + \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} q_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial q_k \partial q_l} q_k q_l + \dots \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial^m V}{\partial q_{k_1} \partial q_{k_2} \dots \partial q_{k_m}} q_{k_1} q_{k_2} \dots q_{k_m} \times \frac{1}{m!} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m T_{ij}}{m! \partial q_{k_1} \partial q_{k_2} \dots \partial q_{k_m}}(q_0) q_{k_1} q_{k_2} \dots q_{k_m} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial^m V}{m! \partial q_{k_1} \partial q_{k_2} \dots \partial q_{k_m}}(q_0) q_{k_1} q_{k_2} \dots q_{k_m} \end{aligned}$$

由此可选择保留不同阶数的项, 来近似 L . 并有, 根据小扰动 q_i 均 $\ll 1$.

不妨保留三阶项, $L = \frac{1}{2} T_{ij}(q_0) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} q_k \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_0) q_i q_j - \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k}(q_0) q_i q_j q_k \right]$

找一组新正交基 将二阶项角动矩阵对角化. 如此约化后记为

$$L = \frac{1}{2} \sum (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma + \Delta_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma.$$

由此得 EOM: $\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f(Q, \dot{Q}, \ddot{Q})$. 其中, f 为三阶非线性项.

即 f 中以 $\ddot{Q}Q$, \dot{Q}^2 , Q^2 项组成

Task. 利用逐阶近似求解非谐振方程.

由于 Q, \dot{Q}, \ddot{Q} 均为小量, 则方程右侧实际上为二阶小 (相对左侧), 不妨取一个阶数 n .

求解时将 Q 分解为 $Q = Q^1 + Q^2 + Q^3 + \dots$ 其中, $Q^n \sim Q^n$

Tip. 下边示一种错误解法

代入 x 的一阶近似 $\ddot{x}' + \omega_0^2 x' = 0 \Rightarrow x' = a \cos \omega_0 t$ (此处只用了初始值条件, 不够的)

代入 x 的二阶近似 $\Rightarrow \ddot{x}'' + \omega_0^2 x'' = f(x, \dot{x}, \ddot{x})$

由于右侧有 $\cos^2 \omega_0 t$, $\sin^2 \omega_0 t$, $\cos \omega_0 t \sin \omega_0 t$, \dot{x} 和 \ddot{x} 的项, 组合起来并化简, 此时不能在 x' 上加通解。

因此本方程的 x'' 中会有 $2\omega_0$ 的项

每本 x'' 会求其中会有 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0$ 等, 但 ω_0 是共振项。

不可能出现, 会使 $x'' \rightarrow \infty$ 。

原因在于, ω 也会改变, 出现在 x 中的频率并非只 ω_0 及其倍数

$$\omega = \omega_0 + \omega' + \dots, \quad \omega'' \sim \alpha''$$

在一阶近似, $\ddot{x}' = -\omega^2 x'$, 而 $\omega_0^2 - \omega^2$ 本身是一阶小, 求上式是二阶小因而开不了方

但在二阶近似中, 方程右边就漏掉了可能出现的 ω' 的项。

正相反, 反而为, 通过共振项不存在来求 ω''

$$x = x' + x'' + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \omega' + \dots, \quad \omega'', x'' \sim \alpha'' \quad (\alpha \text{ 为一阶振幅 } \alpha \ll 1)$$

其中, 各级 x^n 中出现均为 ω , 只有在近似计算时近似处理

① 一阶近似, $x = x' = a \cos \omega_0 t$, 现在一阶下尚大存在

② 二阶近似 $x = x' + x''$

$$a(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \dot{x}^2 + \omega_0^2 x_2 = f(x, \dot{x}, \ddot{x}).$$

并在右侧保留 x^2, \dot{x}^2 与 $x\dot{x}$ 项 左侧 $\omega a(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2a\omega'\omega_0$, 在二阶近似下
若需无长振, $\cos \omega t$ 项系数为零.

例如在右侧是 $-\alpha x^2 - \beta x^3$ 时, 右侧保留为 $-\alpha a^2 \cos^2 \omega t$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = 2a\omega_0\omega' \cos \omega t - \alpha a^2 \left(\frac{\cos 2\omega t + 1}{2} \right) \Rightarrow \omega' = 0.$$

$$\text{且给出解 } x^2 = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t, \text{ 系数为 } a^2 \text{ 项}$$

③ 三阶近似, 类似地可得

$$x^3 = \frac{a^3}{16\omega_0^3} \left(\frac{\omega'}{3\omega_0} + \frac{\beta}{2} \right) \cos(3\omega t), \quad \omega^2 = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2$$

Ex. 求相对论性摆微幅振荡周期的二阶修正.

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{l}$$

$$\Rightarrow \text{EOM: } \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) + mg \frac{x}{l} = 0 \quad \text{or 实际上就是}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{其中, } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = [1 - (1 - \dot{x}^2/c^2)^{3/2}] \ddot{x}, \quad \text{右侧是非线性项}$$

$$\text{设解为 } \omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \dots, \quad x = x^{(1)} + \dots$$

在保留一阶项时, $x^{(1)} = A \cos \omega t$, 其中 $A \ll 1$.

$$\text{在保留二阶项时, } (\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \omega t + \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = 0 \Rightarrow \omega^{(1)} = 0, \quad x^{(2)} = 0.$$

$$\text{在保留三阶项时, } (\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \omega t + \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = \frac{3A^3 \omega_0^4}{2c^2} \sin^2 \omega t \cos \omega t.$$

$$\sin^2 \omega t \cos \omega t = \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) \cos \omega t = \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{1}{4} [\cos 3\omega t + \cos \omega t] = \frac{1}{4} \cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 3\omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = \left[2\omega_0 \omega^{(2)} A + \frac{1}{4} \times \frac{3A^3 \omega_0^4}{2c^2} \right] \cos \omega t - \frac{3A^3 \omega_0^4}{8c^2} \cos 3\omega t.$$

$$\text{If frequency is } \omega \Rightarrow \omega^{(2)} = -\frac{3A^2 \omega_0^3}{16c^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \propto \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{3A^2 \omega_0^2}{16c^2} \right)$$