第四章 刚体运动学

§1. 刚体的独立坐标

Thm. 刚体有 6 个独立坐标

固定其上三点，则三点距离为定值的点只能上确定.

固定三点间有距离产生三个约束. 自由度 $= 3\times3-3=6$

Ex. 其中一种选取：原点的位置（三坐标）+ 9个方向余弦（外加6个约束）

设为 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,3)$. $\hat{x}' = \alpha_1\hat{x}+\beta_1\hat{y}+\gamma_1\hat{z}$，参见书.

根据 $\hat{x}'\cdot\hat{x}' = \hat{y}'\cdot\hat{y}' = \hat{z}'\cdot\hat{z}'=1$. $\hat{x}'\cdot\hat{y}' = \hat{y}'\cdot\hat{z}' = \hat{x}'\cdot\hat{z}' = 0$ 可有6约束.

$\Leftrightarrow$ $\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ 的六方程.

§2. 坐标变换的主动与被动观点

Thm. A 为坐标变换矩阵. A 作用在 $\vec{r}$ 的坐标分量上. 得出一组新的坐标分量 (Q)

① 主动观点下，A 将 $\vec{r}$ 变换为 $\vec{r}'$，$\vec{r}'$ 在同一坐标系下的分量为 (Q)

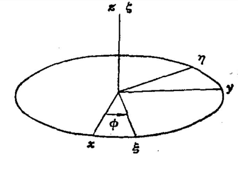
② 被动观点下，A 表示同一个矢量 $\vec{r}$ 在不同坐标系下的坐标表示的变换，(Q) 为 $\vec{r}$ 在新系中分量.

Tip. 从几何观点考虑，A 对 $\vec{r}$ 作用和对坐标系作用，几何变换效果一般相反.

§4. 欧拉角

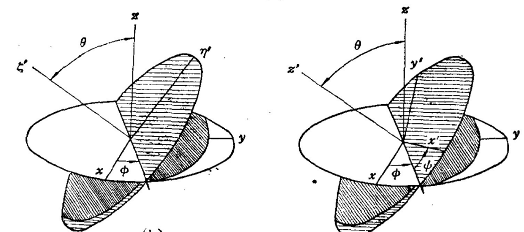
Thm. 仅有行列式为 +1 的正交矩阵可代表刚体实际位移

Def. 行列式为+1 的正交变换矩阵对应变换称为正常 cs，反之称为非正常 cs


(a)

Def. 欧拉角：
1° 先绕对 z 轴 (z') 逆时针转 ϕ
2° 再绕对 x' 轴 逆时针转 θ
3° 再绕对 z' 轴 逆时针转 ψ

如右图 (x', y', z' 轴不断变化)


(b) (c)

Thm. 经历了 (ϕ, θ, ψ) 变换后，$\vec{r}$ 在新坐标系中坐标与旧坐标间的变换矩阵

$$(\vec{r})' = A\vec{r}, \quad A = BCD.$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证明时 引用主动观点. 设旧坐标系为 S，变 ϕ 后为 $\vec{r}'$，变 θ 后为 $\vec{r}''$，变 ψ 后为 $\vec{r}'''$

$\vec{r} \to \vec{r}'$. 以 z 为轴顺时针转 ϕ. z 坐标不变. 当 y 为 0 时，变后 $y' = -\sin\phi\, x$. 由此可确认

$\vec{r}' \to \vec{r}''$ 以 x 为轴顺时针转 ϕ. x 坐标不变，将左上矩阵移至右下，ϕ 改 θ.

$\vec{r}'' \to \vec{r}'''$ 以 z 为轴顺时针转 ψ. z 不变，将 D 的 ϕ 改为 ψ 即可

于是得以证明

Extra. $A = BCD = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$, $A^{-1} = A^T$

Tip. 1° 一共有 $\underset{\text{绕 第一轴}}{3} \times \underset{\text{第二轴}\neq\text{第一轴}}{2} \times \underset{\text{第三轴}\neq\text{第二轴}}{2} = 12$ 种 Euler Angle. 选取记

2° 第二次转动绕 x 称为 x 约定，绕 y 称为 y 约定 ($z \to y \to z$)

3° 航天上用 (xyz) 三角分别为 (z. 竖直轴, 偏航角; y, 垂直于固轴, 俯仰 or 姿态角; x. 固连轴, 倾侧 or 横滚角)

有时 xyz 角也称为泰特-布赖恩角

§5. 凯莱-克莱因参量

Def. 凯莱-克莱因参量：在一个复二维空间内，u, v 为原坐标，u', v' 为新坐标

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{则 } Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

称 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ 为凯莱克莱因参量

且有如下条件（为使 8 参量 → 3 独立参量，确定取向）

1° $Q^H Q = I$ ($Q^\dagger Q = I$)

实际上 $|Q^H||Q| = 1 \Leftrightarrow |\det(Q)|^2 = 1$. 亦即 $|Q| = e^{i\theta}$

第二条件实际上 $\Leftrightarrow \theta = 2k\pi$

2° $|Q| = 1$.

$Q^H Q = I \Leftrightarrow$

$$\alpha\alpha^* + \gamma\gamma^* = 1. \quad (\text{实}) \quad -1$$

$$\beta\beta^* + \delta\delta^* = 1. \quad (\text{实}) \quad -1$$

$$\alpha\beta^* + \gamma\delta^* = 0 \quad (\text{复}) \quad -2.$$

$|Q| = 1 \Leftrightarrow$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (\text{复, 但由于保证 } |\alpha\delta - \beta\gamma| = 1) \quad -1.$$

自由度 = 8-1-1-2-1 = 3，确实有三自由参量.

Tip. $Q^\dagger Q = I \Rightarrow Q$ 幺正 若 $|Q| = 1$ 且 $Q^\dagger Q = I$，则 Q 幺模.

Tip. 可有具体表示，如 $\gamma = -\frac{\alpha\beta^*}{\delta^*} \Rightarrow \alpha\delta + \frac{\alpha\beta\beta^*}{\delta^*} = 1 \Rightarrow \alpha(\delta\delta^* + \beta\beta^*) = \delta^* \Rightarrow \alpha = \delta^*$

$\Rightarrow \gamma = -\beta^*$. 因而 $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ 且有 $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$.

Thm. 在三维实空间内的正交变换 $\vec{r}' = A\vec{r}$，$\vec{r} = (x, y, z)$

$\Leftrightarrow$ 在二维复空间内的相似变换 $P' = QPQ^\dagger$，其中 $P = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$，$Q$ 为幺模矩阵

由于在相似变换下，矩阵的迹，厄米性质，行列式均不变.

厄米 → 对角实，$Tr = 0 \Rightarrow$ 对角和为零.

则可表为 $P' = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}$，$|P'| = -(z'^2 + x'^2 + y'^2) = |P| = -(x^2 + y^2 + z^2)$

可理解为向量模长不变，因而的确对应正交变换

Def. 同形矩阵：设有二组矩阵 $\{P_i\}$ 与 $\{Q_i\}$，且它们间一一对应，即 $P_i \sim Q_i$

若有 $f(P_1, P_2, \cdots, P_n) = g(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 则有 $f(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n) = g(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)$

则称它们同形

Tip 且实际上，幺模与正交二组矩阵关于乘法封闭（$\forall P_1, P_2 \in \{P_i\}$，$P_1 \cdot P_2 \in \{P_i\}$）

若将 P 与 Q 对应，那么有 $P_1P_2 = P_3 \Leftrightarrow Q_1Q_2 = Q_3$

（实正常正交矩阵构成 $SO(3)$，复幺模构成 $SU(2)$，即 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 可对应）

Thm. 幺模矩阵的 K-C 参量与正常正交矩阵的欧拉角表示的关系.

I 用 K-C 参量表示其幺模对应正交矩阵分量.

1° $Q=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}$ $QPQ^{\dagger}=P' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\alpha^2-\gamma^2+\delta^2-\beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2-\alpha^2+\delta^2-\beta^2) & \gamma\delta-\alpha\beta\\ \frac{i}{2}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2+\gamma^2+\beta^2+\delta^2) & -i(\alpha\beta+\gamma\delta)\\ \beta\delta-\alpha\gamma & i(\alpha\gamma+\beta\delta) & \alpha\delta+\beta\gamma\end{pmatrix} \quad ---①$$

2° 以 $Q=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix}$, $\underbrace{\alpha=e_0+ie_3,\ \beta=e_2+ie_1}_{\text{欧拉参量}}$ $(e_i\in\mathbb{R},\ i=0,1,2,3)$ 带代,有

$(\alpha\alpha^*+\beta\beta^*=1 \Leftrightarrow \sum e_i^2=1)$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2+e_0e_3) & 2(e_1e_3-e_0e_2)\\ 2(e_1e_2-e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3+e_0e_1)\\ 2(e_1e_3+e_0e_2) & 2(e_2e_3-e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2\end{pmatrix}$$

II 1° 用欧拉角来表示 K-C 参量. (ϕ,θ,ψ 定义同上)

$\alpha=e^{\frac{i}{2}(\psi+\phi)}\cos\frac{\theta}{2}$ $\beta=ie^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)}\sin\frac{\theta}{2}$

$\gamma=ie^{-\frac{i}{2}(\psi-\phi)}\sin\frac{\theta}{2}$ $\delta=e^{-\frac{i}{2}(\psi+\phi)}\cos\frac{\theta}{2}$

2° 也可表示 e_0, e_1, e_2, e_3

$e_0=\cos\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}$　　$e_2=\sin\frac{\phi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$e_1=\cos\frac{\phi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$　　$e_3=\sin\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$\boxed{\text{I}}$ 1° 直接计算 $P'=QPQ^\dagger$，再解出 x',y',z' 各自关于 x,y,z 的对应关系

2° 同上，将 $Q=\begin{pmatrix} e_0+ie_3 & e_2+ie_1 \\ -e_2+ie_1 & e_0-ie_3 \end{pmatrix}$ 代入 $P'=QPQ^\dagger$，解出 x',y',z' 关于 x,y,z.

$\boxed{\text{II}}$ 1° 通过对应关系，$Q=Q_\psi Q_\theta Q_\phi$

对于①式，Q_ϕ 对应①式为 $D=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \gamma=\beta=0$，$\alpha\delta=1$　且 $\frac{1}{2}(\delta^2+\alpha^2)=\cos\phi$ $\Rightarrow \begin{cases} (\delta+\alpha)^2=4\cos^2\frac{\phi}{2} \\ \frac{i}{2}(\delta+i\alpha)^2=\sin\phi-1 \end{cases}$

又 $\delta=\alpha^*$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}^2\alpha=\cos^2\frac{\phi}{2}$，$\alpha=e^{i\xi}$ $\Rightarrow$ 取 $\alpha=e^{i\frac{\phi}{2}}$（事实上取 $\alpha=-e^{i\frac{\phi}{2}}$ 也可，$QPQ^\dagger$ 不变）

$Q_\phi=\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$　同理 $Q_\theta=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$　$\underset{\text{与 } Q_\phi \text{ 类似}}{Q_\psi}=\begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}$

由 $Q=Q_\psi Q_\theta Q_\phi$ 可得 $Q=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 的表达式

2° 由 1° 并由 $\alpha=e_0+ie_3$　$\beta=e_2+ie_1$ 可得

Def. 泡利(Pauli)自旋矩阵：P 可写为 $P=x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3$

$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　$\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$　$\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　此即为泡利自旋矩阵

1° 可用 $\vec{\sigma}$ 代表 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$，$P=\vec{r}\cdot\vec{\sigma}$ 表示 P矩阵，$\vec{r}\cdot\vec{\sigma}=x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3$

2° $Tr(\sigma_i)=0$

3° 再加上 I，共四个元素，$\forall$ 2x2 的四维复矩阵均可表示为它们的线性叠加，且

$$Q=e_0I+i(e_1\sigma_1+e_2\sigma_2+e_3\sigma_3)$$

$$Q=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_0+ie_3 & e_2+ie_1\\ -e_2+ie_1 & e_0-ie_3\end{pmatrix}=e_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+ie_1\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+ie_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+ie_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

4° 同样有

$Q_\varphi=I\cos\frac{\varphi}{2}+i\sigma_3\sin\frac{\varphi}{2}$，$Q_\theta=I\cos\frac{\theta}{2}+i\sigma_1\sin\frac{\theta}{2}$，$Q_\psi=I\cos\frac{\psi}{2}+i\sigma_3\sin\frac{\psi}{2}$

$\downarrow$ 绕z　　$\downarrow$ 绕x　　$\downarrow$ 绕z

同样，绕y轴由的逆时针旋转 φ 的 $Q_\varphi=I\cos\frac{\varphi}{2}+i\sigma_2\sin\frac{\varphi}{2}$

因而 σ_i 可看成绕 x_i 轴单位转子。

5° 若用矩阵指数表示，

$$Q_\theta=e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_1},\quad Q_\varphi=e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_2},\quad Q_\phi=e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_3}$$

利用级数展开 $e^A=I+A+\frac{1}{2}A^2+\cdots$

$$Q_\theta=I+i\frac{\theta}{2}\sigma_1-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2I-i\frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3\sigma_1+\frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4I\cdots\qquad(\sigma_1^2=I)$$

$$=I\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4+\cdots\right)+i\sigma_1\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3+\cdots\right)=I\cos\frac{\theta}{2}+i\sigma_1\sin\frac{\theta}{2}$$

又 $\sigma_2^2=I$，$\sigma_3^2=I$，因而同有如上关系式

Thm. 若 $B^\dagger=B$，则 $A=e^{iB}$，$A^\dagger A=I$.

$$A^\dagger=\left(I+iB-\frac{1}{2}B^2-\frac{i}{3!}B^3+\cdots\right)^\dagger=I-iB-\frac{1}{2}B^2+\frac{i}{3!}B^3+\cdots=I+i(-B)-\frac{1}{2}(-B)^2-\frac{i}{3!}(-B)^3+\cdots$$

or $A^\dagger=e^{-iB^\dagger}=e^{-iB}$，$A^\dagger A=e^{-iB+iB}=I$.

Tip. σ_i 均厄米，因而猜出 $Q_\theta, Q_\varphi, Q_\phi$ 均幺正.

§6 Thm. 关于刚体运动的欧拉定理：有一固定点的刚体的一般位移是绕某一轴的转动

由于绕固定点的一般位移可以通过 A (正交矩阵) 表示

若对 $\forall A$，均 $\exists \vec{R}$ s.t. $A\vec{R}=\vec{R}$，那么有 $\vec{R}$ 即在轴上，剩一个自由度即为绕该轴的转动.

Thm. $\forall$ 实正常正交矩阵均有本征值 $+1$，则仅有仅有一个本征值为 $+1$ 的实正常正交矩阵表示有轴转动

A 正交 $\Leftrightarrow A^TA=I \Rightarrow |A|^2=1$.（实际上，由于 A 正常，$|A|=1$）

若 λ 为 A 本征值，则 $|A-\lambda I|=0$. $A(A-I)=I-A \Rightarrow |A|\,|A-I|=|I-A|$

又由于 $|A|=1$ $\therefore |A-I|=|I-A|$，$|I-A|=(-1)^n|A-I|$，$n=3$（三维转动）$\Rightarrow |A-I|=0$

在偶数维空间中，转动不一定在本空间中有轴，但在奇空间中，转动均有轴

因而 1 必为其一本征值

由于 A 元素均实，因而其本征方程为实方程.

且次数为 3，至少有一实根 1. 且实根必为 ± 1

1° 三实根

① 均为 1，则 A 为 I，无意义.

② 1 和 2 个 (-1) 有意义（若和 1 个 -1，行列式为 -1，不成立）

2° 一实根，二共轭复根. 3个

Tip. 可经过正交变换，使z轴沿$\vec{r}$方向，此时 A 变为

$$A' = \begin{pmatrix} +\cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

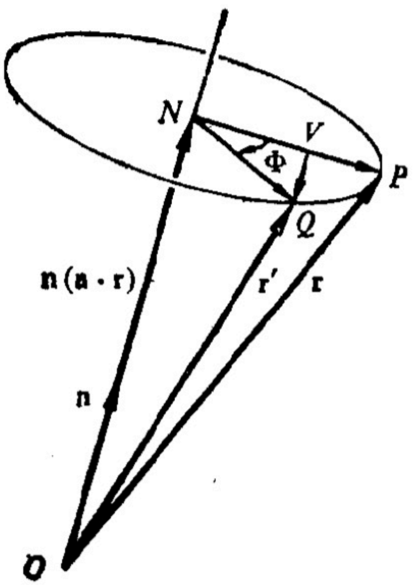
，$\mathrm{Tr}\,A' = \mathrm{Tr}\,A = 1+2\cos\Phi$，由此可以解出 $\Phi = \arccos\left(\frac{1}{2}(\mathrm{Tr}A-1)\right)$

因而，特征值为 三个1 对应 $\Phi=0$，一个1两个-1 对应 $\Phi=\pi$，一个1 一对 $e^{i\phi}\,e^{-i\phi}$ 对应 $\phi=\Phi$

Thm. 以转轴取向与绕转轴转角Φ为参量的转动表示：被动下沿转轴逆时针，主动下为顺时针

主动观点下，转轴为 $\hat{n}$（单位矢），原矢为 $\vec{r}$，转后为 $\vec{r}\,'$，转角为Φ

$$\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\Phi + \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{r})(1-\cos\Phi) + (\vec{r}\times\hat{n})\sin\Phi.$$



$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}$$

沿转轴的分量 $\overrightarrow{ON} = \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{r})$ 不变.

$$\overrightarrow{NV} = \left(\vec{r} - \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{r})\right)\cos\Phi$$

$$\overrightarrow{VQ} = (\vec{r}\times\hat{n})\sin\Phi$$

$$\Rightarrow \vec{r}\,' = (1-\cos\Phi)\,\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{r}) + (\vec{r}\times\hat{n})\sin\Phi + \vec{r}\cos\Phi.$$

Tip. $\hat{n}$ 与 Φ 对应的参量 e_0, e_1, e_2, e_3　　$x_i' = x_i(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_0 e_j x_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 x_j e_k.$

$\Updownarrow$

$e_0 = \cos\frac{\Phi}{2}$，$(e_1, e_2, e_3) = \vec{e} = \hat{n}\sin\frac{\Phi}{2} \Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r}(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2\vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{r}) + 2(\vec{r}\times\vec{e})e_0$

$\Downarrow$

$A = (a_{ij})$，$a_{ij} = \delta_{ij}(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_i e_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 e_k$

Tip. 取 $Q = e_0 I + i(e_1\sigma_1 + e_2\sigma_2 + e_3\sigma_3)$ 与 $Q_\theta = I\cos\frac{\theta}{2} + i\sigma_1\sin\frac{\theta}{2} = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_1}$

实际上有 $Q = I\cos\frac{\Phi}{2} + i\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\frac{\Phi}{2}$，为绕任意转轴的幺旋矩阵

表为矩阵指数，$Q = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$

$(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) = (n_1^2+n_2^2+n_3^2)I + n_1n_2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1)\cdots$ $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 反对易，因而 $(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) = I$.

§7. 无限小转动

Intro. 由于取向由三个角度标记，想用一个矢量对转动进行描述

但有限小转动并不满足交换律，因而无法用矢量表示、

然而对无限小转动可以用矢量表示

Thm. 无限小转动可用一无限小反对称矩阵 + 单位阵表示，无限小反对称矩阵三分量构成矢量

记 $x_i' = x_i + \sum_j \epsilon_{ij}x_j$ 记 $\epsilon = (\epsilon_{ij})$. $\vec{r}' = (I+\epsilon)\vec{r}$

第一步转动为 ϵ_1，第二步为 ϵ_2.

$(I+\epsilon_1)(I+\epsilon_2) = I + I(\epsilon_1+\epsilon_2) + \epsilon_1\epsilon_2 \simeq I + I(\epsilon_1+\epsilon_2)$ （略去二阶）

同理有 $(I+\epsilon_2)(I+\epsilon_1) = (I+\epsilon_1)(I+\epsilon_2)$ 因而无限小转动可对易

无限小转动矩阵逆矩阵为 $(I-\epsilon)$. $(I+\epsilon)(I-\epsilon) = I$.

又 $(I+\epsilon)^T = (I-\epsilon) \Rightarrow \epsilon^T = -\epsilon$，因而 ϵ 反对称

把 ϵ 写为 $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ 下证明 $d\vec{\Omega} = (d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3)$ 确构成矢量

$$\vec{r}' = (I+\epsilon)\vec{r} \Rightarrow (\vec{r}'-\vec{r}) = d\vec{r} = \epsilon\vec{r} = (r_2d\Omega_3 - r_3d\Omega_2,\ r_3d\Omega_1 - r_1d\Omega_3,\ r_1d\Omega_2 - r_2d\Omega_1)$$
$$= \vec{r}\times d\vec{\Omega}$$

而 $d\vec{r}$ 与 $\vec{r}$ 均为矢量，则 $d\vec{\Omega}$ 实际上也应为矢量.

or. 在某正常正交变换下，$\epsilon' = B\epsilon B^{-1}$ $\Rightarrow d\Omega_i' = |B|\, b_{ij}\, d\Omega_j$，而 $|B|=1$. 则有 $d\Omega_j$ 符合矢量的变换

（$d\vec{\Omega}$ 实际指转动轴向，$d\vec{\Omega} = \hat{n}\, d\Phi$）

Tip. 由于 $d\Omega_i' = |B|\, b_{ij}\, d\Omega_j$，若 $|B|=-1$（反演时，例如），有 $d\vec{\Omega}' = -d\vec{\Omega}$（赝矢量）

Extra. 若 ϵ 表示主动观点下，则轴逆时针旋转.

$d\vec{\Omega}$ 不变，$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Q = I\cos\frac{\Phi}{2} - i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\Phi}{2} = e^{-i\frac{\Phi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$

$d\vec{r} = d\vec{\Omega}\times\vec{r}$ $\quad$ （$d\vec{r} = \epsilon\vec{r} = \vec{r}\times(-d\vec{\Omega}) = d\vec{\Omega}\times\vec{r}$）

$\frac{d\vec{r}}{d\Phi} = \hat{n}\times\vec{r} = N\vec{r}$， $\quad N = (n_{ij})$，$n_{ij} = -\epsilon_{ijk} n_k$.

Tip. 可记 ϵ 表为 $\epsilon = n_i M_i\, d\Phi$.

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

其中 $[M_i, M_j] = M_iM_j - M_jM_i = \epsilon_{ijk}M_k$. M_i 称为无限小转动生成元

§8. 矢量在不同坐标系下的变化率 以及应用（科里奥利力）

Thm. 在空间坐标系（space）S 固定于刚体上的系（rigid）中矢量变化率的关系

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{G}$$

其中，$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$，（注意，$\vec{\omega}$ 不是矢量的变化率，$d\vec{\Omega}$ 不代表矢量微分），$d\vec{\Omega}$ 指转动轴向

且朝着 $d\vec{\Omega}$ 看，刚体逆时针转动

$(d\vec{G})_s = (d\vec{G})_r + (d\vec{G})_{转}$ $\quad (d\vec{G})_{转} = d\vec{\Omega}\times\vec{G}$

or 从变换 $G_i = a_{ji}G_j'$ $\quad$ ($A=(a_{ij})$, $\vec{G} = A^T\vec{G}'$ ，但实际上不妨取 $A=I$ 如何 $\vec{G}=\vec{G}'$)

$dG_i = da_{ji}\,G_j' + a_{ji}\,dG_j'$ $\qquad (da_{ji}) = \epsilon = (\epsilon_{ji})$

$\quad = -\epsilon_{ij}G_j' + a_{ji}\,dG_j'$

指$\vec{G}$在系中的$\vec{G}'$变化量

而 $\epsilon\vec{r} = \vec{r}\times(d\vec{\Omega}) = -d\vec{\Omega}\times\vec{r}$, $\quad a_{ji}dG_j' = (d\vec{G}')_i$ (指 $d\vec{G}'$ 在原坐标系内分量)

$\Rightarrow d\vec{G} = d\vec{\Omega}\times\vec{G} + d\vec{G}'$ [illegible]

Att. 矢量变化率与坐标系相关，先求出变化率再变换到其它坐标系，不能先变换再求.

Ex. 取 $\vec{\omega}$ 用欧拉角表示.

$\vec{\omega}$ 在 Space 中分解为 $\vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\psi$

$\vec{\omega}_\phi = (0, 0, \dot{\phi})$ $\quad \vec{\omega}_\theta' = (\dot{\theta}\cos\psi, -\dot{\theta}\sin\psi, 0)$ $\quad \vec{\omega}_\psi' = (0, 0, \dot{\psi})$ $\quad$ (后令使用 $\vec{\omega}_i'$ 与 $\vec{\omega}_i$)

利用 $\vec{\omega}_\phi' = A\vec{\omega}_\phi$ $\Rightarrow$ $\vec{\omega}_\phi' = (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi, \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi, \dot{\phi}\cos\theta)$

$\Rightarrow \vec{\omega}' = (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \ \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \ \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$

Thm. 在地球系中的运动方程：设质点质量为 m ，受力为 $\vec{F}$ ，在地球系中速度为 $\vec{v}_r$ ，矢径为 $\vec{r}$ ，地球的转动角速度为 $\vec{\omega}$

$\vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}_r) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\vec{a}_r$ ，可记 $\vec{F}_{eff} = \vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}_r) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ 为等效力

在空间系中有 $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{r} \Leftrightarrow \vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_s = \vec{a}_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_s = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_r + \left(\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

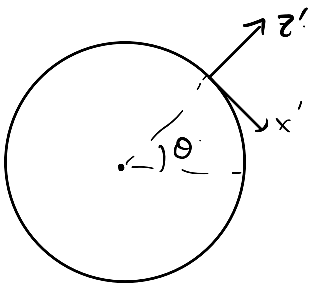
地球的 $\vec{\omega}$ 近似恒定. $\left(\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}\right)_n = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_n\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_n = \vec{\omega}\times\vec{v_r}$

$\Rightarrow \vec{a_s} = \vec{a_r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v_r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

又 $\vec{F} = m\vec{a_s}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v_r}) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\vec{a_r}$.

Ex. 求科里奥利力对自由落体物体影响.

取竖直向上轴为 z'，$\omega_z' = +\omega\sin\theta$ $\omega_x' = -\omega\cos\theta$.



因而有 $-mg\hat{z}' - 2m(\omega_x', 0, \omega_z')\times(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = m(\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}')$

略去 " ' " 符号 (略去 ω^2 项)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\sin\theta\,\dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega\cos\theta\,\dot{z} - 2\omega\sin\theta\,\dot{x} \\ \ddot{z} = 2\omega\cos\theta\,\dot{y} - mg \end{cases}$$

有 $mg \gg \dot{y}\omega$, $\dot{z} \gg \dot{x}, \dot{y}$ 因而可简化为

$\ddot{y} = -2\omega\cos\theta\,\dot{z}$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{z} = -mg$ ($\dot{z}_0 = \dot{y}_0 = \dot{x}_0 = x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = h$)

$\Rightarrow \dot{y} = +2g\omega\cos\theta\, t \Rightarrow y = \frac{1}{3}g\omega\cos\theta\, t^3$

当 $z_0 = h$ 时, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}\omega\cos\theta\sqrt{\frac{(2h)^3}{g}}$

Ex. 求科里奥利力对平面摆的影响

此时 $\dot{z} \approx 0$. 取在 xoy 平面内运动

$$\begin{cases} \ddot{x} + \overset{\text{回复力}}{\omega_0^2 x} = 2\omega\sin\theta\,\dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega\sin\theta\,\dot{x} \end{cases}$$

取 $\xi = x + iy$, $\ddot{\xi} = \ddot{x} + i\ddot{y}$ $i\dot{\xi} = i\dot{x} - \dot{y}$

$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = 2\omega\sin\theta(\dot{y} - i\dot{x}) = -2\omega\sin\theta\, i\dot{\xi}$

or $\ddot{\xi} + 2\omega\sin\theta\, i\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 \xRightarrow{\omega_0 \gg \omega} \xi = e^{-i\omega t\sin\theta}(A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) = e^{-i\omega t\sin\theta}C\sin(\omega_0 t + \varphi)$

实际上，$x+iy$ 相当于在平面内的一个矢量，它在以 $\omega\sin\theta$ 旋转，且在平面内以 ω 振荡

所以 $T=\frac{2\pi}{\omega\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$(天)在极上，$\theta=\frac{\pi}{2}$，周期1天。在赤道上 $\theta=0$，平面不转。