

Chapter IX: 简单辐射和光, 散射和衍射

§1. 定域振荡源的场和辐射.

推迟势:
$$\begin{cases} \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} d^3r' & \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{R} d^3r' \end{cases}$$
 (满足 Lorentz 规范)

首先, 随时间变化变化的源均只作为单频分量, 因此先研究单频部分. 即

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{在此此时麦克斯韦方程可写为} \\ \nabla \cdot \vec{j}_0(\vec{r}) - i\omega \rho_0(\vec{r}) = 0 \end{array} \right)$$

再根据无界空间中满足 Lorentz 规范的推迟势.
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_0(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

并有根据 $\vec{j}_0(\vec{r}, t)$ 的时间依赖 $\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' e^{-i\omega t} = \vec{A}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$

根据场与势的关系, 得到场外场为
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

其次是空间区域的划分:

① 近区 (静区) ②: 中间区 (感应区) ③: 远区 (辐射区)

($d \ll r \ll \lambda$) ($d \ll r \ll \lambda$) ($d \ll \lambda \ll r$)

Tip: 它们均有 $d \ll \lambda$ (近似条件). 为了满足 1m 的空间线度在时间因子上基本不体现 ($e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 中令 $\vec{r}' \approx \vec{r}$)

也是与极展开取前几项近似的必要条件.

在近区内, 场有静场特征, 但位置不趋于定, 且场随距离的变化精确依赖于源分布

在远区内, 场与矢径垂直, 按平方反比依赖于源分布无关

(i) 近区, $d \ll r \ll \lambda$.

此时 $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$. 那就有 $\vec{A}_0(\vec{r})$ 仅为静场的 $\vec{j}_0(\vec{r})$ 产生的矢势.

可以取为 $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{A}_0(\vec{r}) = \mu_0 \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{1}{r^{l+1}} \int j(r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\tau'$ (这里仅用 $\lambda \gg \{d, r\}$)

即为静场, $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$. 加上一个与源分布无关的时间因子 ($k r' \ll 1$)

(ii) 远区, $d \ll \lambda \ll r$.

① 此时, 根据 $d \ll r$ (实际上在近区也成立), $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r [1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + O(\frac{r'}{r})] = r - \vec{r} \cdot \vec{r}' + O(\frac{r'}{r})$

在零阶近似下有 (略去 $O(\frac{r'}{r})$ 项), 则有
$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_0(\vec{r}')}{r} e^{ikr} e^{-ik\vec{r} \cdot \vec{r}'} d^3r'$$
 (未用到 $k \ll$ 近似)

(给定, 若 \vec{r} 与 \vec{r}' 同, 量级为 d , 则 $\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{j}_0(\vec{r}') e^{-ik\vec{r} \cdot \vec{r}'} d^3r'$ (仅用了 $r \gg d$)
不仅用了 $r \gg d$, 也用了 $\lambda \gg d$

在近场下, 随 r 变化的相因子消失. 其来不及, 并且近场时实际未用 $d \ll r$ 的近似 因为考虑 $1/r$ 衰减

若有, 则每级近场与极展开取前几项近似的有效性. (这里要用 $r \gg d$, 近区)

②. 再根据 $\lambda \gg d$, 可对 $\vec{A}_0(\vec{r})$ 作级数展开:
$$e^{-ik\vec{r} \cdot \vec{r}'} = 1 - i\vec{k} \cdot \vec{r}' + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{k} \cdot \vec{r}')^n}{n!}$$

其中不同项对应了电偶; 电四+磁偶; 电八+磁四; ... 以, 各级后带有一个 $(\frac{d}{\lambda})$ 因子.

$\Rightarrow \vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int \vec{j}_0(\vec{r}') \frac{(-i\vec{k} \cdot \vec{r}')^n}{n!} d^3r' = \sum \vec{A}_n(\vec{r})$ (取前几项近似需 $d \ll \lambda$) (伴与相因子 $r \gg \lambda$)

Extra: 利用 $\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ q 为总电荷, 守恒, 在 $r \gg d$ 下, 导线中 没有电荷积累

且 ϕ 还在非单极下成立?

§2. 电偶极场与电偶极辐射.

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}_0(\vec{r}') d\tau' = -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi} \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi} \vec{p} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

通过 $\nabla \cdot (\vec{J}_0 \vec{r}) = \vec{J}_0 \cdot \vec{r} + (\nabla \cdot \vec{J}_0) \vec{r}$. 代入上式, 假设以在无穷远处收敛为零 (库伦场) 再利用连续性方程

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times (-i\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \int \rho_0(\vec{r}') \vec{r}' d\tau' = -\frac{i\mu_0 \omega}{4\pi} \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

再由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 与 $\vec{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \vec{B}$ 得

Lemma: 若 $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$, 那么有在 $r \rightarrow \infty$ 的渐近近似下,

$$\nabla \times \vec{F} = i\vec{k} \times \vec{F}, \quad \vec{k} \text{ 沿 } \vec{r} \text{ 方向}$$

$$\text{在渐近近似时} \begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} (\hat{k} \times \vec{p}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (1 - \frac{1}{ikr}), & (\text{注意 } \vec{k} \text{ 沿 } \vec{r} \text{ 方向 } \vec{p} \perp \vec{r}) \\ \vec{E} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} (\hat{k} \times \vec{p}) \times \hat{k} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [3\hat{k}(\hat{k} \cdot \vec{p}) - \vec{p}] (\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}) e^{i(kr-\omega t)} \end{cases}$$

① 可知, 在近区内, $kr \ll 1$, 由此有 \vec{B}, \vec{E} 在渐近近似下为

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{i\mu_0 \omega}{4\pi} (\hat{k} \times \vec{p}) \frac{e^{-i\omega t}}{r^2} & \text{可看到 } \vec{E} \text{ 的空间依赖即为静电场的极远电场} \\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [3\hat{k}(\hat{k} \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \frac{e^{-i\omega t}}{r^3} & \text{而 } \vec{B}_0 \text{ 只依赖于 } \vec{E} \text{ 的 } \frac{1}{kr} \end{cases}$$

在 $k \rightarrow 0$ 的静态极限下, 电场 \rightarrow 静电场, $\vec{B} \rightarrow 0$.

② 在远区, $kr \gg 1$, 由此有 \vec{B}, \vec{E} 在渐近近似下

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} (\hat{k} \times \vec{p}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} & \text{可看到确实有随 } r \text{ 变化的因子, 而且与 } \vec{k} \text{ 垂直, 确实 } \frac{1}{r} \text{ 衰减} \\ \vec{E} = c \vec{B} \times \hat{k} \end{cases}$$

考虑辐射能量, $\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \vec{S} \cdot \hat{k} = \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 r^2$, P 为平均功率.

\vec{S} 的时间平均为 $\frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^* = \frac{c}{2\mu_0} (\vec{B} \times \hat{k}) \times \vec{B}^*$, 由于 $\vec{B}, \vec{E} \perp \hat{k}$, 所以为 $\frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$.

例极有 $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4 p^2}{32\pi^2 c} \sin^2 \alpha$, 其中 $\alpha = \langle \hat{k}, \vec{p} \rangle$

若在全空间积分, 显然与 \vec{p} 的方向无关, 不妨以 \vec{p} 为 z 轴, 则 $\alpha = \theta$

$$P = \int dP = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0 \omega^4 p^2}{32\pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 \omega^4 p^2}{12\pi c}$$

§3. 磁偶极场与电四极场.

考虑以次项上果按 $(\lambda \gg d)$ 再逼近 $r \ll \lambda$ 与远 $r \gg \lambda$ 来取起近, 那么在写出所有 $\frac{r'}{r}$ 的项 (但要有 $\lambda \gg r'$)

因此 $\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\hat{r} \cdot \vec{r}'}$. 分子上更应取关于 kr' 的项, 分母上 $\frac{r'}{r}$ 还少一个因子.

取下一阶项为 $\frac{e^{ikr}}{r} [\frac{1}{r} - ik] \hat{r} \cdot \vec{r}'$

$$\vec{A}^{2m+4c}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} [\frac{1}{r} - ik] \int \vec{J}_0(\vec{r}') (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\tau'.$$

张量拆为两部分, 一项是 \vec{J} , \vec{r}' 反对称项, 类似 $\vec{r}' \times \vec{J}$ 的场辐射, 一项是对称的, 电四极

利用 $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}$ 的分解. $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} = \frac{1}{2} (\vec{r}' \times \vec{J}) \times \vec{r} + \frac{1}{2} [(\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}' + (\vec{r}' \cdot \vec{J}) \vec{r}]$

or 更简单一点, $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} = \vec{r} \cdot (\vec{r}' \vec{J}) = \vec{r} \cdot [\frac{1}{2} (\vec{r}' \vec{J} + \vec{J} \vec{r}') + \frac{1}{2} (\vec{r}' \vec{J} - \vec{J} \vec{r}')] =$

$\vec{A}_0^{2m}(\vec{r}) = \frac{i k \mu_0}{4\pi} (\vec{r} \times \vec{m}) \frac{e^{i k r}}{r} [1 - \frac{1}{i k r}]$, $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{J}_0(\vec{r}') d\tau'$ 为磁偶极辐射部分

又因为, 由于 $\vec{A}^{2m}(\vec{r})$ 的形式与 \vec{B}^{2e} 一致, 因此有 \vec{B}^{2m} 应与 \vec{E}^{2e} 一致 ($\vec{E} \propto \nabla \times \vec{B}$, $\vec{B} \propto \nabla \times \vec{A}$)

$\Rightarrow \vec{B}^{2m} = \frac{\mu_0 k^2}{4\pi} (\hat{k} \times \vec{m}) \times \hat{k} \frac{e^{i k r - i \omega t}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} [3 \hat{k} (\hat{k} \cdot \vec{m}) - \vec{m}] (\frac{1}{r^3} - \frac{i k}{r^2}) e^{i(kr - \omega t)}$

对称的有 $\vec{E}^{2m} = -\frac{\mu_0 c}{4\pi} k^2 (\hat{k} \times \vec{m}) \frac{e^{i k r}}{r} (1 - \frac{1}{i k r})$
 因为 $\omega \neq 0$

Tip: 对称的有, 做 $\vec{E} \rightarrow c \vec{B}$, $c \vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, $\vec{r} \rightarrow \vec{r}/c$ 将电偶极辐射情况 \rightarrow 磁偶极辐射情况.

$\vec{A}_0^{ee}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{i k r}}{r} (1 - \frac{1}{i k r}) \int \vec{r}' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \rho_0(\vec{r}') d\tau' = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{i k r}}{r} (1 - \frac{1}{i k r}) \hat{r} \cdot \mathcal{D}$

$\vec{A}_0^{ee} = -\frac{\mu_0 i k}{8\pi} \frac{e^{i k r}}{r} [1 - \frac{1}{i k r}] \int [(\hat{r} \cdot \vec{J}') \vec{r}' + (\vec{J}' \cdot \vec{r}') \hat{r}] d\tau' = -\frac{\mu_0 i k}{8\pi} \frac{e^{i k r}}{r} [1 - \frac{1}{i k r}] \hat{r} \cdot \int (\vec{J}' \vec{r}' + \vec{r}' \vec{J}') d\tau'$

利用 $\nabla' \cdot (\vec{J}' \vec{r}') = (\nabla' \cdot \vec{J}') \vec{r}' + \vec{J}' \cdot \nabla' + \vec{r}' \cdot \nabla' \Rightarrow \int \vec{J}' \cdot \nabla' + \vec{r}' \cdot \nabla' d\tau' = - \int (\nabla' \cdot \vec{J}') \vec{r}' d\tau' = -i\omega \int \rho_0(\vec{r}') \vec{r}' d\tau'$

代入的 $\vec{A}_0^{ee}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{i k r}}{r} [1 - \frac{1}{i k r}] \int (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' \rho_0(\vec{r}') d\tau'$ 而其中 $\int \rho_0(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' d\tau'$ 为二阶张量 \mathcal{D}

四极张量为无迹对称张量. $\mathcal{D} = 3\mathcal{D} - \text{Tr}(\mathcal{D}) \mathbf{I}$, $D_{\alpha\beta} = \int (3r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho_0(\vec{r}') d\tau'$

此时是完整场很复杂, 因此仅考虑辐射区内场, 即 $\frac{1}{i k r}$ 项. 且根据 Lem 有

$\vec{B}^{ee}(\vec{r}, t) = i k \times \vec{A}^{ee}(\vec{r})$, $\vec{E}^{ee}(\vec{r}, t) = (\vec{k} \times \vec{A}^{ee}(\vec{r})) \times \hat{k} c$

$\vec{B}_0^{ee}(\vec{r}) = -\frac{i \mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{i k r}}{r} \hat{k} \times (\hat{k} \cdot \mathcal{D})$ 其中 $\hat{k} \times (\hat{k} \cdot \mathcal{D}) = \frac{1}{3} \hat{k} \times [\hat{k} \cdot (\mathcal{D} + \text{Tr}(\mathcal{D}) \mathbf{I})] = \frac{1}{3} \hat{k} \times (\hat{k} \cdot \mathcal{D})$

$\vec{B}_0^{ee}(\vec{r}) = -\frac{i \mu_0 \omega^2}{24\pi c^2} \frac{e^{i k r}}{r} \hat{k} \times (\hat{k} \cdot \mathcal{D})$ $\vec{E}_0^{ee}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2}{24\pi c} \frac{e^{i k r}}{r} \hat{k} \times [\hat{k} \times (\hat{k} \cdot \mathcal{D})]$

$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{r^2 c}{2\mu_0} |\vec{B}_0|^2 = \frac{\mu_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^3} [\hat{k} \times (\hat{k} \cdot \mathcal{D})]^2$, $P = \int dP = \frac{\mu_0 \omega^6}{1440 \pi c^3} (\mathcal{D} : \mathcal{D})$

角分布一般较复杂, 但总辐射功率与频率有关. $[\hat{k} \times (\hat{k} \cdot \mathcal{D})]^2 = \hat{r}_\alpha \hat{r}_\gamma D_{\gamma\beta} D_{\alpha\beta} - (\hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta D_{\alpha\beta})^2$ ($\hat{k} = \hat{r}$)

并且有 $\hat{r} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ 可以求得 $\int \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta d\Omega = \frac{4}{3} \pi \delta_{\alpha\beta}$.

$\int \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$ 由此代入得

$P = \frac{\mu_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^3} \left[\frac{4\pi}{15} \delta_{\alpha\gamma} D_{\gamma\beta} D_{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta} \right] = \frac{\mu_0 \omega^6}{1440 \pi c^3} (D_{\gamma\beta} D_{\gamma\beta}) = \frac{\mu_0 \omega^6}{1440 \pi c^3} \mathcal{D} : \mathcal{D}$

Tip: 这种多极展开的缺点是: 越来越复杂; 仅在长波 (small) 下有效, 亦即仅能作低频辐射; 人为区分电偶极

在 Chapter XVI 将对 \mathcal{D} 的取值进行处理, 并且在开始电动力学 IV 里分析.

S4. 中央电直天线 (正负近似与边界条件解法类似 (见教材) 验证).

S5. 波导中穴或屏或孔的多极子展开

S6. 长波长下的散射.

2. 小极化体内偶极子引起的散射.

尺寸小于波长的系统对电磁波以极小的 k 为由入射场产生了电多子极化波

它们与入射波保持一定相位, 并向外辐射。总辐射角分布取决于入射场与子极化波干涉

以及入射波偏振在 $\lambda \gg d$ 时只有最低阶子极化波(通常称为电偶极子极化)

并且一般 k 由边界条件或辐射条件求得

例如入射场为 $\vec{E}_i = \hat{e}_i E_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$, $\vec{B}_i = \frac{k_i}{c} \times \vec{E}_i$

则生成了 \vec{p} 与 \vec{m} 的电偶极矩, 那就有

$$\vec{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [(\hat{k}_s \cdot \vec{p}) \times \hat{k}_s - \frac{1}{c} \hat{k}_s \times \vec{m}], \quad \vec{B}_s = \frac{k}{c} \times \vec{E}_s$$

引入微分截面 $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{k}_i, \hat{e}_i; \hat{k}_s, \hat{e}_s) = \frac{r^2 |\hat{e}_s^* \cdot \vec{E}_s|^2}{|\hat{e}_i^* \cdot \vec{E}_i|^2}$ 代表了入射在 \hat{k}_i 方向, 偏振为 \hat{e}_i 的

单位入射能流在 \hat{k}_s 方向, 单位立体角内偏振为 \hat{e}_s 的辐射功率

入射场为 \vec{E}_i , 则有 $S_{k_i} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_i \times \vec{B}_i^*) \cdot \hat{k}_i = \frac{Z_0}{2} |\vec{E}_i|^2 = \frac{Z_0}{2} (\vec{E}_i \cdot \vec{E}_i^*) = \frac{Z_0}{2} |\hat{e}_i^* \cdot \vec{E}_i|^2$ ($\hat{e}_i \in \mathbb{C}$, 含偏振因子)

由于入射与 \hat{e}_i 若不一致, 例如上例, $S_{k_s, \hat{e}_s} = \frac{1}{\mu_0 c} [(\vec{E}_s \cdot \hat{e}_s^*) \hat{e}_s \times \hat{k}_s \cdot (\dots)] \cdot \hat{k}_s = \frac{Z_0}{2} |\vec{E}_s \cdot \hat{e}_s^*|^2$

那就有与 \hat{k}_s 出射(由 \vec{E}_s 决定)与 \hat{e}_s 偏振(由 $\vec{E}_s \cdot \hat{e}_s^*$ 决定)上所有 $d\Omega$ 的辐射功率

$$S_{k_s, \hat{e}_s} \times r^2 d\Omega = \frac{Z_0}{2} r^2 |\vec{E}_s \cdot \hat{e}_s^*|^2 d\Omega = d\sigma \times S_{k_i, \hat{e}_i} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 |\hat{e}_s^* \cdot \vec{E}_s|^2}{|\hat{e}_i^* \cdot \vec{E}_i|^2}$$

Tip: 利用 \vec{p} 与 \vec{m} 产生的 \vec{E}_s , 可以得 $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{k}_i, \hat{e}_i; \hat{k}_s, \hat{e}_s) = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} |\hat{e}_s^* \cdot \vec{p} + (\hat{k}_s \times \hat{e}_s^*) \cdot \vec{m}|^2$, 其中 $k_i = k_s = k$

可以表明, 偶极辐射的总功率为微分(总)截面 $\propto \omega^4$ or $\frac{1}{\lambda^4}$, 为瑞利定律

有时称偶极辐射为瑞利辐射, 但实际上通常用于低极化辐射条件下的不相干散射

β. 自由电子对电磁波的散射

考虑在外场下的自由电子, 在辐射阻尼很小时, 据 $m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}_i$ 可以得 (假设 \vec{r} 有 $e^{-i\omega t}$ 时间依赖)

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}_i}{m\omega^2}, \quad \text{那么 } \vec{p} = -e\vec{r} = -\frac{e^2\vec{E}_i}{m\omega^2}, \quad \text{进而有 } \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}|^2}{32\pi^2 c} \sin^2\alpha, \quad \alpha \text{ 为 } \hat{k}_s \text{ 与 } \hat{e}_i \text{ 夹角}$$

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}|^2}{12\pi c} \Rightarrow \sigma_T = \frac{P}{S_{k_i, \hat{e}_i}} = \frac{e^4}{6\pi m^2 \epsilon_0^2 c^4} \text{ 为沿 } \hat{k}_i \text{ 方向, } \hat{e}_i \text{ 偏振的 } \vec{E}_i \text{ 下自由电子的截面}$$

若偏振入射光非偏振, 可以作一个平均 $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi$, 对 φ 平均 $\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}|^2}{64\pi^2 c} (1 + \cos^2\theta)$

截面积有 σ_T 仍为线偏的 σ_T . 因此总的 σ_T 为Thomson截面

记 $\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_e^2$, $r_e = \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m} \approx 2.8 \text{ fm}$ 为电子经典半径

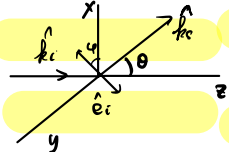
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2 e^4}{16\pi^2 m^2} |\hat{e}_s^* \cdot \hat{e}_i|^2 \text{ 若取 } \hat{e}_s \text{ 取为 } (\hat{k}_s \times \hat{e}_i) \times \hat{k}_s, \text{ 则为全偏截面 } \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2 e^4}{16\pi^2 m^2} \sin^2\alpha \Rightarrow \sigma = \frac{e^4}{6\pi m^2 \epsilon_0^2 c^4}$$

γ. 一个带电小球引起的散射

利用边界条件的边界条件, 可得, $\vec{p} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \vec{E}_i$ ($\epsilon(\omega)$ 假设为 ϵ), 且假设其无磁性

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) a^3 \vec{E}_i \Rightarrow \sigma = \frac{8\pi k^4}{3} a^6 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right)^2, \text{ 不失起见 } \vec{p} = \lambda \vec{E}_i$$

不失选取垂直于 \hat{k}_i 与 \hat{k}_s 平面又垂直于 \vec{p} 的 $\hat{e}_s = \hat{e}_\perp$, \hat{e}_i 来求微分截面, 注意到电介质的所有原子, 它们均 $\in R$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_i)^2} |\hat{e}_s \cdot \hat{p}|^2 = \frac{k^4 \lambda^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} |\hat{e}_s \cdot \hat{e}_i|^2 = \frac{k^4 \lambda^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{k^4 \lambda^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} |\hat{e}_s \cdot \hat{e}_i|^2 = \frac{k^4 \lambda^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \sin^2 \varphi \quad (\text{因为用了互相垂直的偏振矢分解 } \vec{E}_s)$$

若入射非线偏, 则对 \$\varphi\$ 平均 \$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{1}{2} k^4 a^6 \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0}\right)^2 \cos^2 \theta, \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{1}{2} k^4 a^6 \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + 2\epsilon_0}\right)^2\$

由它们求和再求微分得到 \$\sigma\$ 与 \$k\$ 上的一致. 引入偏振度 \$\Pi(\theta) = \frac{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\perp} - (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\parallel}}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\perp} + (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\parallel}} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}\$

可以看到, 在 \$\theta = \pi/2\$ 时, 偏振度最大, 成为 \$y\$ 方向的线偏光, 其余方向是部分偏振, \$\theta = 0\$ 或 \$\pi\$ 时自然光

8. 一个束缚电子的散射

束缚电子的运动方程为 \$m\ddot{\vec{r}} + m\omega_0^2 \vec{r} - m\tau \ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}_i\$, 其中 \$\tau\$ 为辐射阻尼 \$R\$

在 \$\tau \ll \omega_0^2\$ 时, 可近似认为 \$\vec{r}\$ 的稳态解有 \$e^{-i\omega t}\$ 的时间依赖, 因此 \$-m\tau \ddot{\vec{r}}\$ 近似用 \$m\tau \dot{\vec{r}}\$ 替代, \$\gamma = \omega^2 \tau\$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{e}{m} \frac{e^{-i\delta} \vec{E}_i}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}, \quad \delta = \arctan \frac{\omega \gamma}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad \text{则有 } \vec{p} = -e\vec{r}$$

$$\sigma = \frac{e^4}{6\pi c^4 \epsilon_0^2 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad \text{可以看到在 } \omega_0 \rightarrow 0 \text{ 时 退化为 Thomson 散射截面, } \omega \rightarrow 0 \text{ 时 退化为瑞利散射 (类汤姆逊)}$$

9. 一个理想导体球引起的散射

对于理想导体球, 在均匀 \$E\$ 下有 \$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_i\$. 但同时, 由于要保证磁通恒定为零, \$\mu = 0\$. 因此可利用

$$\text{磁化球模型, } \mu \text{ 的伴征了外场 } B \text{ 场的生为定, 因此 } \vec{M} = (-\frac{1}{2}) \times 3 \frac{\vec{B}_i}{\mu_0}, \quad \vec{m} = -2\pi a^3 \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} = -2\pi a^3 \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\mu_0 c}$$

且有 \$\vec{p}\$ 与 \$\vec{m}/c\$ 同量级, 因此二者都不可忽略. 并有 \$\vec{p}\$ 沿 \$\hat{e}_i\$, \$\vec{m}\$ 与 \$\hat{e}_i\$ 垂直

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_i)^2} |\hat{e}_s^* \cdot \vec{p} + (\hat{k}_s \times \hat{e}_s^*) \cdot \vec{m}|^2. \quad \text{同样分解为 } \hat{e}_s_{\parallel} \text{ 与 } \hat{e}_s_{\perp}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{k^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2} |4\pi\epsilon_0 a^3 (\hat{e}_s_{\parallel} \cdot \hat{e}_i) - 2\pi a^3 \epsilon_0 (\hat{k}_s \times \hat{e}_s^*) \cdot (\hat{k}_i \times \hat{e}_i)|^2 = \frac{k^4 a^6}{4} \cos^2 \varphi (1 - 2\cos \theta)^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{k^4 a^6}{4} |2(\hat{e}_s_{\perp} \cdot \hat{e}_i) - (\hat{k}_s \times \hat{e}_s^*) \cdot (\hat{k}_i \times \hat{e}_i)|^2 = \frac{k^4 a^6}{4} \sin^2 \varphi (2 - \cos \theta)^2$$

$$\text{再进行非偏振平均 } \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\parallel} = \frac{k^4 a^6}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \theta\right)^2, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\perp} = \frac{k^4 a^6}{2} \left(1 - \frac{\cos \theta}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{un}} = \frac{k^4 a^6}{8} [5\cos^2 \theta - 8\cos \theta + 5]$$

$$\text{总的散射截面 } \sigma = \int d\Omega \left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\parallel} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\perp} \right] = \frac{10}{3} \pi k^4 a^6, \quad \Pi(\theta) = \frac{3\sin^2 \theta}{5\cos^2 \theta - 8\cos \theta + 5}$$

Tip: \$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\$ 在 \$\theta \rightarrow \pi\$ 时 取较大值, 由于电场与磁场的干涉引起

Tip: 低频率近似, 极点上 \$ka \ll 1\$ 或低频率近似结果, 在 \$ka \gg 1\$ 时, 需考虑高阶的散射

10. 散射体集团

如上所述, 入射波为平面波

如果有 \$N\$ 个散射体, 它们的位置为 \$\vec{r}_j\$. 那么总的散射场为它们各自产生散射相加, 相位因子为 \$e^{i\vec{k} \cdot \vec{R} \cdot \vec{r}_j}\$, \$\vec{R} = \vec{k}_i - \vec{k}_s\$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{k}_i, \vec{e}_i; \vec{k}_s, \vec{e}_s) = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_i)^2} \left| \sum_j [\hat{e}_s^* \cdot \vec{p}_j + (\hat{k}_s \times \hat{e}_s^*) \cdot \frac{\vec{m}_j}{c}] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j} \right|^2 \quad (\text{这里已经考虑了取向})$$

若散射体全同, 则 \$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \mathcal{F}(\vec{R})\$, \$\mathcal{F}(\vec{R}) = \left| \sum_j e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j} \right|^2\$ 为几何结构因子.

$$\mathcal{F}(\vec{R}) = \left| \sum_j e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j} \right|^2 = \sum_j e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}$$

若 \$\vec{r}_j\$ 无规则分布, 则 \$i \neq j\$ 的项 随着 \$N\$ 增加而抵消, \$\mathcal{F}(\vec{R}) = \sum_j 1\$. 若 \$N\$ 个, 则 \$\mathcal{F}(\vec{R}) = N\$

亦即无规则分布的集团, 散射只是散射体散射的不相干叠加