

§1. Faraday's Law of Induction

Faraday's Law: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$, $\mathcal{E} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (\vec{E} 为线元处电场强度, 相对线元静止坐标系中)

$$\mathcal{E} = -k \frac{d\Phi}{dt}, \quad k \text{ 为比例系数}$$



Task: 通过低速下 Faraday's Law 的伽利略不变性确定 k

(利用 S-R 判据推导应作修改的常数)

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -k \frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \right) = -k \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad (\vec{B} \text{ 为相对 } d\vec{l} \text{ 静止})$$

① 在 ∂S 以速度 \vec{v} 运动时, 考虑与线团相对静止的坐标系. 并记 \vec{E}' 是在相对 $d\vec{l}$ 静止的坐标系中 \vec{E}'

那么 \vec{B} 可看作 $\vec{B}(\vec{r} + \vec{v}t, t)$, $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t$ (伽利略变换)

$$k \frac{d}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{convective derivative}), \quad \text{并可根据 } (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) = \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v})$$

$$\Rightarrow -k \int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r} + \vec{v}t, t)}{\partial t} \cdot d\vec{a} = -k \int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{a} - k \int_S \nabla \times (\vec{B}(\vec{r}, t) \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = -k \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} - k \oint_{\partial S} \vec{B} \times \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial S} (\vec{E}' + k \vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} = -k \int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

② 在取 ∂S 与上 ∂S 相同, 但相对 \vec{v} 静止于瞬时静止, 此时 ∂S 上场为 \vec{E}

$$\text{则有 } \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -k \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad (\text{线圈不动, 导致圈内 } \vec{B}(\vec{r}, t) \text{ 中 } \vec{r} \text{ 与 } t \text{ 无关})$$

由 Faraday's Law 在伽利略变换下的不变性有存在两坐标系内均成立. 且对 $\forall \partial S$

那么有 $\vec{E}' = \vec{E} + k \vec{v} \times \vec{B}$, 考虑该式物理含义. 在 \vec{v} 运动坐标系内, 相对其静止电荷受 $q\vec{E}'$

在另一坐标系中受为 $q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ 若在二坐标系内受力相等, 那么有 $k=1$.

(等号右边加并, 要考虑 \vec{B} 的变换与 \vec{r} 变换, 但 \vec{r} 变换差仅为 $(\vec{v})^2$ 所, 因此可忽略, \vec{B} 的变换带来的为 $(\vec{v})^2$ 所, 而 \vec{E} 变换为一阶, 故可忽略)

Faraday's Law: 由上, 在理论的相对论性协变的必要条件 (低速伽利略协变) 下, 有 $k=1$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (\vec{E} \text{ 相对 } d\vec{l} \text{ 静止中行列})$$

对于在同一相对 ∂S 静止的坐标系中 \vec{E} 与 \vec{B} , 方程即可写为

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \\ \text{根据对 } \forall S \text{ 成立} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{ Faraday's Law.}$$

§2 电磁场的能量

电磁场能量公式: 如果场仅分布在有限区域内, 那么有在空间上 \vec{B} 变化 $\delta \vec{B}(\vec{r})$ 时,

$$\delta W = \int_{All} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} d\tau$$

更进一步, 若 \vec{H} 与 \vec{B} 存在线性关系, 则有 $\delta(\vec{H} \cdot \vec{B}) = \delta \vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{H} \cdot \delta \vec{B} = 2 \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$

$$W = \frac{1}{2} \int_{All} \vec{H} \cdot \vec{B} d\tau \quad (\text{代表了场从空开始建立所存储能})$$

① 考虑一个电流环回路, 若已通电流 I , 在磁感应变化 $\frac{dB}{dt}$ 时, 感应电场 $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, 对电子作功为 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \lambda q v \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = I \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -I \frac{d\Phi}{dt}$
 因此电源为保持电流不变所作功为 $\frac{dW}{dt} = I \frac{d\Phi}{dt}$. (以后, 若 Φ 由 I 引起, 这即为自感)
 因此在变化 Φ 时, $\delta W = I \delta \Phi$ (电源作功, 转化为磁场能)

② 假设变化过程极其缓慢, 那么可认为是一系列电流分布, 使其中一板电荷为 $\Delta \sigma$, 面积 S
 那么在电流变化导致磁场变化 $\delta \vec{B}$ 时有 $\Delta(\delta W) = \Delta I \int_S \delta \vec{B} \cdot d\vec{a}$
 若用 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, 则有 $\int_S \delta \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\nabla \times \delta \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial S} \delta \vec{A} \cdot d\vec{l}$, $\Delta I d\vec{l} = \vec{j} dt$.
 $\Rightarrow \Delta(\delta W) = \oint_{\partial S} \delta \vec{A} \cdot \vec{j} dt$. 对全电流分布有 $\delta W = \int_{All} \delta \vec{A} \cdot \vec{j} dt$.

③ 再利用磁场下的安培定律 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$, 代入有 $\delta W = \int_{All} \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) dt = \int_{All} [\nabla \cdot (\vec{H} \times \delta \vec{A}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \delta \vec{A})] dt$
 若场仅分布在有限区域, $\delta W = \int_{All} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dt$.

Tip: 若假设 \vec{j} 与 \vec{A} 存在线性关系, 那么从 $\delta W = \int_{All} \delta \vec{A} \cdot \vec{j} dt$ 可得 $W = \frac{1}{2} \int_{All} \vec{A} \cdot \vec{j} dt$.

Tip: 对于场源不移动时(自由电流), 代入中间项上作功为

$$W = \frac{1}{2} \int_{All} (\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{B}_0 \cdot \vec{H}_0) dt = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\vec{B} \cdot \vec{H}_0 - \vec{H} \cdot \vec{B}_0) dt = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1}) \vec{B} \cdot \vec{B}_0 dt$$

再根据 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_1} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{M} \cdot \vec{B}_0 dt$.

而我们之前所求的一个 \vec{M} 分布在磁场中的势能为 $-W$. 反因有 \vec{j} , 这 W 与 \vec{j} 因场源有顺磁电流作功.

这即为 $2W$. (对于一个微小磁体, 无限远产生功为磁体势能变化两倍, 符号相反!)
 即即在磁体分布中产生 \vec{M} 分布所需作功(极化功)

§3. Maxwell's Displacement Current, Maxwell Equations

由于在电磁拉下的方程满足 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, 而实际上应满足 $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 所以将原方程改作

(库仑定律): $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_f$

(法拉第定律): $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(修正的安培定律): $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \rightarrow \text{Maxwell's displacement current.}$

(无自由磁矩) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

① 对时变场有重要意义, 导致了电磁辐射的产生

§4. 标势和矢势

引入标势与矢势: $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

且它们产生的场具有规范不变性, 即 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda$, $\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$ 变换下, \vec{E}, \vec{B} 不变

用势表示的 Maxwell Equation (根据真空中的 Maxwell Equation)

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho/\epsilon_0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

$$\left\{ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\mu_0 \vec{J} \right.$$

Tip. 规范不同导致解的 \vec{A}, ϕ 不同, 但都代表同一组解 \vec{E}, \vec{B}

例如选取 Lorenz 规范. $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. 此时有

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0 & \text{形式完全一致, 可看成一维波动方程} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

§5. 规范变换, 洛伦兹规范, 库仑规范

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda & \text{称为规范变换.} \\ \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{cases}$$

$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ 称为 Lorenz 规范, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 称为库仑规范 (静电规范, 横场规范)

Tip. 满足 Lorenz 规范的势仍不唯一, 它只有狭义规范不变性

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda \quad \text{且有} \quad \nabla^2 \lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = 0. \quad \text{那么若 } (\vec{A}, \phi) \text{ 满足 Lorenz 规范, } (\vec{A}', \phi') \text{ 也满足}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Tip. 选取 Lorenz 规范好用:

① 获得一致的势的波动方程 ② S-R 协变

Tip. 库仑规范其名字由来

$$\text{若 } \nabla \cdot \vec{A} = 0, \text{ 那么 } \nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0. \text{ 这可以解出 (库仑定律)} \quad \phi(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\text{由此, } \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \text{ 可以解出.}$$

①. \forall 矢量场均可分解为无散与无旋的矢量场叠加,

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t \quad \text{其中 } \vec{J}_t \text{ 为纵向电流 (均匀电流), 满足 } \nabla \cdot \vec{J}_t = 0, \text{ 而 } \vec{J}_l \text{ 为纵向电流, } \nabla \times \vec{J}_l = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_l = \nabla \cdot \vec{J} \quad \text{类似拉普拉斯, 得到一种 } \vec{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int d\vec{r}' \frac{\nabla' \cdot \vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{即有 } \vec{J}_t = \vec{J} - \vec{J}_l, \text{ 满足 KT 为另一种形式})$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{J}_l = 0 \\ \text{再根据 } \nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{J}) - \nabla^2 \vec{J} \text{ 有 } \vec{J}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \nabla \times \int \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \end{cases}$$

$$\text{再根据 } \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}', t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{J}_l = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi} \nabla \int d\vec{r}' \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\text{由此 } \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J}_l. \text{ 则有 } \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_t \text{ 即 } \vec{A} \text{ 波动方程的源可以用纵向电流表示}$$

② 静电规范: 纵向静电场仅由电荷给出, 与 ϕ 仅对近场有关

这种规范在 QED 中常用, 光子的 QED 描述仅用量子化矢量

Tip. 库仑规范适用于无相互作用, 此时 $\phi = 0$, \vec{A} 满足齐次波动方程 $\begin{cases} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$

§6. 波动方程的 Green Function

对于波动方程 $\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{r}, t)$ 的 Green 函数满足

由于 \vec{A}, ϕ 在 Lorentz 规范下均满足上述方程。因此研究其解具有重要意义。

① 将方程转化至频域。

$$\begin{cases} \hat{\Psi}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \hat{\Psi}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -4\pi \hat{f}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} dt \\ \hat{f}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt \end{cases}$$

再根据正交性有方程②

$$\begin{cases} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Psi}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega & (\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \hat{\Psi}(\vec{r}, \omega) = -4\pi \hat{f}(\vec{r}, \omega) \\ f(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases}$$

考虑 $\hat{f}(\vec{r}, \omega)$ 的展开 $\hat{f}(\vec{r}, \omega) = \int d^3r' \delta(\vec{r}-\vec{r}') \hat{f}(\vec{r}', \omega)$ 。由此若有特解

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \quad \text{则} \quad \hat{\Psi}(\vec{r}, \omega) = \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \hat{f}(\vec{r}', \omega)$$

② 考虑 $(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ 令 $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$ 。根据对称性 $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(R)$ 。

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 G(R)) + k^2 G = -4\pi \delta(\vec{R}). \quad \text{当 } k \neq 0, \text{ 在 } \vec{R} \neq 0 \text{ 时有}$$

$$G(R) = A j_0(kR) + B n_0(kR) \quad \text{or} \quad G(R) = A \frac{1}{R} \sin(kR) + B \frac{1}{R} \cos(kR) \quad \text{or} \quad G(R) = A G^+(R) + B G^-(R), \text{ 并记 } G^\mp(R) = \frac{e^{\pm i k R}}{R}$$

$$\text{在 } \vec{R}=0 \text{ 时, 根据 } \nabla^2 \left(\frac{h(R)}{R} \right) = \frac{h''(R)}{R} - [h(R) - R h'(R)] 4\pi \delta(\vec{R})$$

$$\Rightarrow (\nabla^2 + k^2) G^\pm(R) = -k^2 G^\mp(R) - (1 \mp R) e^{\pm i k R} 4\pi \delta(\vec{R}) + k^2 G^\mp(R) = -(1 \mp R) e^{\pm i k R} 4\pi \delta(\vec{R})$$

在 $\vec{R}=0$ 时, $(\nabla^2 + k^2) G^\mp(R) = -4\pi \delta(\vec{R})$ 。符合方程。因此 $G^\mp(R)$ 即为上述方程的解。

$$\begin{aligned} \text{③ } \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{\Psi}(\vec{r}, \omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3r' e^{i\omega t} G(\vec{r}, \vec{r}') \hat{f}(\vec{r}', \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t} G(\vec{r}, \vec{r}') e^{-i\omega t'} f(\vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d^3r' f(\vec{r}', t') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} G(\vec{r}, \vec{r}') d\omega. \end{aligned}$$

$$\text{并记 } G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} G(\vec{r}, \vec{r}') d\omega.$$

$$\text{在 } G(\vec{r}, \vec{r}') = G^+(R) = \frac{e^{i k R}}{R} \text{ 时, } G^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[(t-t')-\frac{R}{c}]} \times \frac{1}{R} d\omega = \frac{1}{R} \delta[(t-t')-\frac{R}{c}], \text{ 同理 } G^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{R} \delta[(t-t')+\frac{R}{c}]$$

最终有特解为 $\Psi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ ，它们与 k 表示不同 ns 物理相当。

即 全边界条件问题 有唯一解

Tip: ① 在 $t=-\infty$ 时的解已定义为 $\Psi_{-\infty}(\vec{r}, t)$ 。那么有

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_{-\infty}(\vec{r}, t) + \int d^3r' \int dt' G^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t')$$

(注意, $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ 在 $t \rightarrow -\infty$ 时, 对 $\forall R > 0$ 均为 0, 因此第二项不产生影响)

② 在 $t=+\infty$ 时的解为 $\Psi_{+\infty}(\vec{r}, t)$ 。那么有

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_{+\infty}(\vec{r}, t) + \int d^3r' \int dt' G^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t'). \quad (\text{因为 } G^- \text{ 不影响 } t=+\infty \text{ 时的解})$$

§7. 宏观电磁学方程组的时域形式

$$\text{宏观 Maxwell Equations: } \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f & \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

其中, ρ 与 \vec{j} 为宏观电荷、流密度, \vec{D}, \vec{H} 通过本构关系与 \vec{E}, \vec{B} 关联, $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$, $\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$

在一般的介质中有 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, 线性介质中有 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

Task. 证明微观下真实 Maxwell Equation 对空间的平均得到宏观 Maxwell Equation, 并给出本构关系式.

① 引入 $\vec{b}, \vec{e}, \eta, \vec{j}$ 代表微观对应量, 则有

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{e} = \eta / \epsilon_0 & \nabla \cdot \vec{b} = 0 \quad \dots \textcircled{1} \\ \nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} & \nabla \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②. 根据题意, 对于可见光 (反射折射), 令连续电荷密度的 Maxwell Equation 予以很好描述, 但

对 X 射线衍射, 无线电波以及反射折射, 因此平均尺度为 10^2 \AA , 微观尺度 (10^6 \AA) , 宏观上的区域

另外, 由于分子间关于时间变化的相互性在 10^2 \AA 尺度下可以忽略不计, 因此有空间平均即与时间平均一致

③. 定义空间平均 $\langle F(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3 r' f(\vec{r}') F(\vec{r} - \vec{r}', t)$, 且 $\int d^3 r' f(\vec{r}') = 1$ 为归一化, 仅在 $\vec{r} = 0$ 时不为零

在此有 任意圆 $\sim 10^2 \text{ \AA}$, 并存在 1 \AA 尺度上 \vec{e} 与 \vec{b} 的 Taylor Expansion 收敛

$$\text{并有 } \frac{\partial}{\partial r_i} \langle F(\vec{r}, t) \rangle = \langle \frac{\partial F}{\partial r_i} \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle F(\vec{r}, t) \rangle = \langle \frac{\partial F}{\partial t} \rangle$$

④ 由此对 ① ② 方程两边空间平均, 定义 $\vec{B}(\vec{r}, t) = \langle \vec{b}(\vec{r}, t) \rangle$, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{e}(\vec{r}, t) \rangle$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{对 ①, ② 方程两边空间平均有 } \nabla \cdot \vec{E} = \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle / \epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

⑤. 求 $\langle \eta(\vec{r}, t) \rangle$, 并得到 $\nabla \cdot \vec{E}$ 的表达式

首先假设介质中有许多分子, 它们中心坐标为 \vec{r}_n , 分子电荷为 q_n , 电偶极矩为 \vec{p}_n , 位置为 $\vec{r}_n + \vec{r}_{nj}$ 因此 $\eta(\vec{r}, t) = \sum_n \sum_j q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_n - \vec{r}_{nj})$

其次自由电荷 $\eta_f(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, $\eta(\vec{r}, t) = \eta_f(\vec{r}, t) + \eta_b(\vec{r}, t)$

$$\langle \eta_f(\vec{r}, t) \rangle = \int d\vec{r}' q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{r}') f(\vec{r}') = \sum_i q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i) = \langle \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle \quad (\vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \dots)$$

$$\langle \eta_b(\vec{r}, t) \rangle = \sum_n \sum_j q_j f(\vec{r} - \vec{r}_n - \vec{r}_{nj}) \xrightarrow{\text{Taylor Expansion}} \sum_n \sum_j q_j [f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) \cdot \vec{r}_{nj} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\vec{r} - \vec{r}_n)}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} (r_{nj})_\alpha (r_{nj})_\beta + \dots]$$

其中 $\sum_j q_j f(\vec{r} - \vec{r}_n) = \langle \sum_j q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle = \langle Q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle$, Q_n 为一个分子的电荷, 一般为零

$$\begin{aligned} \sum_j q_j \vec{r}_{nj} \cdot \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_n) &= \sum_j q_j \vec{r}_{nj} \cdot \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_n - \vec{r}') \nabla' f(\vec{r}') d\vec{r}' = - \sum_j q_j \vec{r}_{nj} \cdot \int f(\vec{r}') \nabla' \delta(\vec{r} - \vec{r}_n - \vec{r}') d\vec{r}' \\ &= \sum_j q_j \vec{r}_{nj} \cdot \int f(\vec{r}') \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_n - \vec{r}') d\vec{r}' = \langle \nabla \cdot \sum_j q_j \vec{r}_{nj} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle = \nabla \cdot \langle \sum_n \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle \end{aligned}$$

\vec{p}_n 为一个分子的电偶极矩

$$\sum_j q_j \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\vec{r} - \vec{r}_n)}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} (r_{nj})_\alpha (r_{nj})_\beta = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \langle Q'_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle, \quad \text{其中 } (Q'_n)_{\alpha\beta} = 3 \sum_j q_j (r_{nj})_\alpha (r_{nj})_\beta$$

$$\text{由此 } \langle \eta_b(\vec{r}, t) \rangle = \langle \sum_n Q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \sum_n \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \langle \sum_n (Q'_n)_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle$$

它们可分别解释为, 在分子中心坐标处 Q_n 电荷分布在空间上平均 + 致互 \vec{p}_n 在空间上平均 + 致互 $(Q'_n)_{\alpha\beta}$ 在空间上平均

$$\text{记 } \langle \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle + \langle \sum_n Q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle = \rho(\vec{r}, t), \quad \langle \sum_n \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle = \vec{P}(\vec{r}, t), \quad \frac{1}{6} \langle \sum_n (Q'_n)_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle = Q'_{\alpha\beta}(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle = \rho(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}, t) + \partial_a \partial_b (\alpha_{ab} \rho(\vec{r}, t)) + \dots$$

一般四极矩和更高阶的略去，并且有 $\alpha_{nn} = 0$ 为零，因此 $\rho(\vec{r}, t) = \rho_f(\vec{r}, t)$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle / \epsilon_0 \Rightarrow (\rho_f(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{P}) / \epsilon_0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \text{ 其中 } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ (总之 } \vec{D} \text{ 又复杂)}$$

⑥ 求 $\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle$ ，同样 $\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle = \langle \vec{j}_f(\vec{r}, t) \rangle + \langle \vec{j}_b(\vec{r}, t) \rangle$ ， $\vec{j}_f(\vec{r}, t) = \sum q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ ，其中 \vec{v}_i 为 \vec{v} ， $\vec{r}_i = \vec{r}_0$

$$\vec{j}_b(\vec{r}, t) = \sum_j \sum_i q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{r}_{ij})$$

$$\langle \vec{j}_b(\vec{r}, t) \rangle = \sum_j \sum_i q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) f(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{r}_{ij}) = \sum_j \sum_i q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) [f(\vec{r} - \vec{r}_i) - \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_{ij} + \frac{1}{2} \partial_a \partial_b f(\vec{r} - \vec{r}_i) r_{ij} r_{ij}]$$

其中 $\sum_j q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) f(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_j q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle = \sum_j \langle q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle$ ，一般 \vec{v}_j 内 \vec{r} 由于对称性抵消掉

$$\sum_j q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) \nabla f(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_{ij} = \sum_j q_j (\vec{v}_i + \vec{v}_j) [\vec{r}_{ij} \cdot \langle \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle] = \vec{v}_i [\nabla \cdot \langle \vec{r}_{ij} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rangle] + \sum_j \frac{d\vec{r}_{ij}}{dt} \langle \nabla \cdot (q_j \vec{r}_{ij} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)) \rangle$$

§8. 坡印廷定理，带电粒子和电磁场的联合系统的能量和动量守恒条件

Thm: 坡印廷定理 (电磁场能量守恒): u 为电磁场能量密度, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, 那么对线性介质有

$$-\int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \right) d\tau = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\omega}$$

$$\text{or } \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j}_f \cdot \vec{E}$$

$$\int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau = \int_V (\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{E} d\tau = \int_V (-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) d\tau$$

若介电线性, $u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{E} \cdot \vec{B})$ 则 $= \int_V (-\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial u}{\partial t}) d\tau$ 即为上式

Tip: 由于恒等式, 仅要求 $\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$, 因此可给 \vec{S} 附加任意项, 约定取为 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Tip: 该定理仅对线性介质成立, 对铁磁介质一般不适用

Thm: 粒子与场的能量守恒定律: 设 u_{mech} 为粒子机械能密度, 则在仅有电磁力下

$$\int_V \left(\frac{\partial u_{mech}}{\partial t} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \right) d\tau = - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\omega}$$

$$\text{or } \frac{\partial (u_{mech} + u_{em})}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S}$$

在仅有电磁力, $\vec{j} \cdot \vec{E}$ 为对粒子作功功率, 总转化为粒子机械能

Thm: 粒子与场的动量守恒定律: \vec{g}_{mech} 为粒子动量密度, $\vec{g}_{em} = \frac{1}{c^2}(\vec{E} \times \vec{H})$ 为电磁动量密度, 则在仅有电磁力下

$$\int_V \frac{\partial (\vec{g}_{em} + \vec{g}_{mech})}{\partial t} d\tau = \oint_{\partial V} T_{\alpha\beta} d\vec{a}_\beta \quad \text{or} \quad \frac{\partial \vec{g}_{mech}}{\partial t} = q_f \vec{E} + \vec{j}_f \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{g}_{em}}{\partial t} + \partial_\beta T_{\alpha\beta}$$

其中 $T_{\alpha\beta}$ 为 Maxwell 应力张量, $T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 [E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}(E^2 + c^2 B^2) \delta_{\alpha\beta}]$

Tip: 物理解释为, V 体积内 动量变化率 为 由内向外动量流密度 用台套通量积分 (电磁动量流密度与 $\frac{T_{\alpha\beta} d\vec{a}_\beta}{|\vec{a}|}$ 方向相反)

§9. 宏观电磁的守恒定律

$$v \ll \frac{d}{c}$$

电磁能量与机械能之间区别的模糊性源于场定义问题

若定义电磁量为组合系统与物质系统的能量差, 则反系统与组合系统的能量守恒

则有 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, $\vec{S}_{em} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$, $u = \frac{1}{2} [E^2(\epsilon + T(\frac{\partial \epsilon}{\partial t})_e) + H^2(\mu + T(\frac{\partial \mu}{\partial t})_e)]$

$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ \epsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} [E^2(\epsilon - T(\frac{\partial \epsilon}{\partial t})_e) + H^2(\mu - T(\frac{\partial \mu}{\partial t})_e)] \}$

是在存在物质介质的电磁场的能量, 它们满足能量守恒定律

3.10. 谐振场的 Poynting 定理, 根据场的标准形式及电阻和导纳

低频场近似: $d \ll \lambda$ (在全局中有 $\omega \ll \omega_c \sim \frac{c}{d}$)

物理诠释: 低的时间变化近似即时带带场的变化, 即时变场产生场的推迟效应在几乎不存在

Def. 集总电路 (lumped circuit): 指线度满足低频近似的交流电路, 电路由一系列集总元件间的拓扑关系描述

Tip: 元件分为二端与四端元件.

Tip: 集总条件要求元件上 $\vec{E}, \vec{B} = 0$, 因此不带电势变化等, 电流也在端口两处相等

首先根据低频条件, 假设所有场对时间依赖为 $e^{-i\omega t}$, 那么所有场也是 (1. 么取实部)

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2} [\vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \vec{E}_0^*(\vec{r}) e^{i\omega t}]$ (其中 $\vec{E}_0(\vec{r}) \in \mathbb{C}$, $\vec{E}(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}$ 取值)

$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{J}_0(\vec{r}) \cdot \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-2i\omega t}]$ 得 $\langle \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0]$

$\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{J}_0 e^{-i\omega t}] \cdot \text{Re}[\vec{E}_0 e^{-i\omega t}] = \frac{1}{4} [\vec{J}_0 e^{-i\omega t} + \vec{J}_0^* e^{i\omega t}] \cdot [\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \vec{E}_0^* e^{i\omega t}] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 + \vec{J}_0 \cdot \vec{E}_0 e^{2i\omega t}]$

由此, 任意二电磁量相乘 (点积, 叉积, 乘) 的时间平均 = 空间积分 - 一个去耦和一个不耦, 而实部是一半.

谐振场的 Maxwell Equation
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D}_0 = (\rho_f)_0 \\ \nabla \times \vec{E}_0 = i\omega \vec{B}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 = (\vec{J}_f)_0 - i\omega \vec{D}_0 \end{cases} \quad (\text{非稳态时间时})$$

Thm: 谐振场的时间平均能量守恒方程.

$$\frac{1}{2} \int_V \vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 d\tau + 2i\omega \int_V (u_{eo} - u_{mo}) d\tau + \oint_{\partial V} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a} = 0$$

其中 $u_{eo} = \frac{1}{4} \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0^*$, $u_{mo} = \frac{1}{4} \vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0^*$, $\vec{S}_0 = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*)$

其中, $\frac{1}{2} \int_V \vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 d\tau$ 的实部给出了电磁场对 V 内电荷做功的平均功率.

将方程 \rightarrow 场取 $\Rightarrow \frac{1}{2} \int_V \vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 d\tau = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{H}_0^* - i\omega \vec{D}_0^*) \cdot \vec{E}_0 d\tau = \frac{1}{2} \int_V [-\nabla \cdot (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*) + i\omega \vec{H}_0^* \cdot \vec{B}_0 - i\omega \vec{D}_0^* \cdot \vec{E}_0] d\tau$

即 $\frac{1}{2} \int_V \vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 d\tau + 2i\omega \int_V (u_{eo} - u_{mo}) d\tau + \oint_{\partial V} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a} = 0$

Tip: 实部为时间平均能量守恒, 虚部为无功功率或储能及其交流 (从 ∂V 到 V 内无功功率)

(1) 取实部, 在理想导体和无损耗元件构成系统, u_{eo} 与 u_{mo} 守恒 $\in \mathbb{R}$.

由此有 $\int_V \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0) d\tau + \oint_{\partial V} \text{Re}(\vec{S}_0) \cdot d\vec{a} = 0$.

又因上, $-\int_V \vec{J}_0 \cdot \vec{E}_0 d\tau = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \oint_{\partial V} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a}$, 在 $u = u_1 + u_2 e^{-i\omega t}$ 时 ($u_1 \in \mathbb{R}$)

有 $\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = 0$, 即有上式成立.

若有损耗, 那么 $\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} \neq 0$, 自然第二项 $2i\omega \int_V (u_{eo} - u_{mo}) d\tau$ 不为零, 且耗散.

Ex. 考虑一个二端元件的电阻与电感。

考虑通过其轴线传输电流 $I_0(z)$ 与 $V_0(z)$ ，则在其轴线上传输功率为 $Re(\frac{1}{2} I_0^* V_0)$

或对外部区域利用麦克斯韦方程，并假设传输线无损耗，则得以下结论

其轴线的电流 \vec{S}_0 仅在其表面 S_i 上有值，取一个大的 S 包围二端元件，与传输线相连，在其 S_i 处

其轴线与 S 相交，取 $d\vec{a}$ 沿 S 外法线

外: $\oint_V \vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 d\tau = -\frac{1}{2} I_0^* V_0 = -\oint_S \vec{S}_0 \cdot (-d\vec{a}) = \oint_{S_i} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a}$ (取 V 为传输线体积)

内: $-\oint_{S_i} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a} = \oint_{S-S_i} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a} + \frac{1}{2} \int_V \vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 d\tau + 2i\omega \int_V (U_{eo} - U_{mo}) d\tau$

内外两式相加 $\frac{1}{2} I_0^* V_0 = \oint_{S-S_i} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a} + \frac{1}{2} \int_V \vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0 d\tau + 2i\omega \int_V (U_{eo} - U_{mo}) d\tau$

在 $S-S_i$ 取为无穷大时，该面积分为零，表示无辐射损耗，因此只带来耗散的电阻项，它在低频下近似

引入阻抗 Z ， $V_0 = Z I_0$ ，并令 $Z = R - iX$ ， R 为电阻， X 为电感，由此有 (假设损耗在 CR)

$$R = \frac{1}{|I_0|^2} \left[\int_V Re(\vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0) d\tau + 2 \oint_{S-S_i} \vec{S}_0 \cdot d\vec{a} + 4\omega \int_V Im(U_{mo} - U_{eo}) d\tau \right]$$

$$X = \frac{1}{|I_0|^2} \left[4\omega \int_V Re(U_{mo} - U_{eo}) d\tau - \int_V Im(\vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0) d\tau \right]$$

可以看出， R 对应了 $Re(I_0^* V_0)$ ，即其中真实的能量耗散功率。其中也有 R 取为耗散电阻， X 取为对粒子做功并取为耗散项

Tip: 在低频近似下，且假设损耗为唯一能量耗散项时 $\int Im(U_{mo} - U_{eo}) d\tau \approx 0$

近似为 $R = \frac{1}{|I_0|^2} \int_V Re(\vec{J}_0^* \cdot \vec{E}_0) d\tau$ ， $X = \frac{4\omega}{|I_0|^2} \int_V (U_{mo} - U_{eo}) d\tau$
 $= \frac{1}{|I_0|^2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 d\tau \rightarrow$ 电阻项

电阻中，若 U_{mo} 占优 (线性中即 U_m 占优)，例如电容电路，那么 $X > 0$

若 U_{eo} 占优，如电感电路，那么 $X < 0$ 。

§11. 在转动、空间反射和时间反転下电磁场和源的性质

在图中

① rank of tensor: 这些物理量在转动下的变换 均遵守

张量变换规则，对应张量所级称为其 rank of tensor
 三维空间的正交变换 (含非正交转动)

② 例如 $\phi(\vec{r}_1, \dots)$ 在转动下 $(\vec{r}_1, \dots) \rightarrow (\vec{r}_1', \dots)$ (主动变换)

则 $\phi'(\vec{r}_1', \dots) = \phi(\vec{r}_1, \dots)$ 则称为标量

$\vec{V}_\alpha(\vec{r}_1, \dots) = \sum_\beta a_{\alpha\beta} V_\beta(\vec{r}_1, \dots)$ ，则称为矢量 ($a_{\alpha\beta}$ 为二阶转动矩阵)

③ 矢量做分并序也具有矢量性质，标量做分并序也具有标量性质。

④. 两个矢量叉积 $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ ，其中 \vec{B}, \vec{C} 为实(假)矢量按照变换

$$A_\alpha = \epsilon_{ij\alpha} B_i C_j, A'_\alpha = \epsilon_{ij\alpha} a_{il} B_l a_{jk} C_k = \det(a) a_{\alpha\beta} A_\beta$$

Table 6.1 Transformation Properties of Various Physical Quantities under Rotations, Spatial Inversion and Time Reversal^a

Physical Quantity		Rotation (rank of tensor)	Space Inversion (name)	Time Reversal
I. Mechanical				
Coordinate	\mathbf{x}	1	Odd (vector)	Even
Velocity	\mathbf{v}	1	Odd (vector)	Odd
Momentum	\mathbf{p}	1	Odd (vector)	Odd
Angular momentum	$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$	1	Even (pseudovector)	Odd
Force	\mathbf{F}	1	Odd (vector)	Even
Torque	$\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$	1	Even (pseudovector)	Even
Kinetic energy	$p^2/2m$	0	Even (scalar)	Even
Potential energy	$U(\mathbf{x})$	0	Even (scalar)	Even
II. Electromagnetic				
Charge density	ρ	0	Even (scalar)	Even
Current density	\mathbf{J}	1	Odd (vector)	Odd
Electric field	\mathbf{E}	1	Odd (vector)	Even
Polarization	\mathbf{P}			
Displacement	\mathbf{D}			
Magnetic induction	\mathbf{B}	1	Even (pseudovector)	Odd
Magnetization	\mathbf{M}			
Magnetic field	\mathbf{H}			
Poynting vector	$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	1	Odd (vector)	Odd
Maxwell stress tensor	$T_{\alpha\beta}$	2	Even (tensor)	Even

^aFor quantities that are functions of \mathbf{x} and t , it is necessary to be very clear what is meant by evenness or oddness under space inversion or time reversal. For example, the magnetic induction is such that under space inversion, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{B}'(\mathbf{x}, t) = +\mathbf{B}(-\mathbf{x}, t)$, while under time reversal, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{B}_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{B}(\mathbf{x}, -t)$.

亦即 $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ 的变换 (2) 与 \vec{B}, \vec{C} (1) 及仅在 正转动下一致

α -空间反射或空间反演 ($\det \alpha = -1$, 反射仅对平面)

Def. 反演变换: $\vec{x}_i' = -\vec{x}_i$, $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ (显然也 $\vec{x}_i'(\vec{x}_i') = \vec{x}_i' = A \vec{x}_i(\vec{x}_i) = A \vec{x}_i = -\vec{x}_i$)

Def 极矢量: 按 $\vec{V}'(\vec{x}_i') = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \vec{V}_{\beta}(\vec{x}_i, \dots)$ 变换的极 \vec{V} (变换后的 \vec{V} 在变换后的 轴系 下取值为反的标系轴系和 (2) 一致且 如时间)
 $\vec{V}'_{\alpha}(\vec{x}_i', \dots) = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} V_{\beta}(\vec{x}_i, \dots) = -V_{\alpha}(\vec{x}_i, \dots)$ (在反下)

Def. 轴矢量: 按 $\vec{A}'(\vec{x}_i') = \det(\alpha) \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \vec{A}_{\beta}(\vec{x}_i, \dots)$ 变换的 \vec{A}

$\vec{A}'_{\alpha}(\vec{x}_i', \dots) = \det(\alpha) \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} A_{\beta}(\vec{x}_i, \dots) = A_{\alpha}(\vec{x}_i, \dots)$ (在反下)

Tip. 轴矢量也可称为赝矢量, 极矢量的为矢量, 对任何所张量均有以上定义的推广, 即赝张量与张量.

若量为 N 阶张量, 则其在反下因子为 $(-1)^N$ 则为张量, $(-1)^{N+1}$ 则为赝张量

β . 时间反演

经典物理方程的时间反演不变性指: 在系统变换后在变换后的轴系下的各物理量仍满足相同规律

Ex. 4: $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nabla U(\vec{r})$. 在时间反下, $\vec{r}'(\vec{r}) = \vec{r}(\vec{r}) = \vec{r}$, $\vec{p}'(\vec{r}, t) = -\vec{p}(\vec{r}, t)$ (从 $\vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{d\vec{p}}{dt}$)

$U(\vec{r}) = U(\vec{r})$ (标量), $\nabla' = \nabla$. 由此 $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nabla U(\vec{r}) \Rightarrow \frac{d\vec{p}'}{dt'}(\vec{r}', t') = -\nabla' U'(\vec{r}')$ 可知方程形式不变

$\vec{r}(t)$ 为方程的解, 则 $\vec{r}'(t')$ 为方程的解. $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t')$ 从 $(\vec{r}_0, t_0) \rightarrow (\vec{r}, t) \xrightarrow{\text{反}} (\vec{r}_0, -t_0) \leftarrow (\vec{r}', -t')$ 时间反演

γ . 电荷量

如同力学方程, 电磁学方程 (Maxwell Equation) 在转动, 反演与时间反下不变.

因此, 不同电荷量在这些变换下具有确定性质

电荷具有伽利略与洛伦兹变换不变性, 且在空间转动下为标量 (标量)

并假设电荷具有反演偶性 (真标量) 与时间反演偶性.

由电荷的变换性质 + 电磁学方程的转动反不变性可得电荷量变换性质

① \vec{E} 为极矢量, 时间反演下偶性

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$. 空间转动下, ∇ 为矢量, ρ 为标量 $\Rightarrow \vec{E}$ 为矢量

Tip: 从 $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$ 也看出, $\frac{q}{r^2}$ 标, \vec{r} 为时间反演偶性

空间反下, ∇ 为极矢量, ρ 为真标量 $\Rightarrow \vec{E}$ 为极矢量

时间反下, ∇ 偶, ρ 偶 $\Rightarrow \vec{E}$ 偶

② \vec{B} 为轴矢量, 时间反演下奇性

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 空间转动下, ∇ 为矢量, \vec{E} 为矢量, $\Rightarrow \vec{B}$ 为矢量

Tip: 从 $\vec{B} = \int d\vec{l} \times \frac{\vec{r} \times \vec{z}}{r^2}$, \vec{r} 极, \hat{z} 极 $\Rightarrow \vec{B}$ 轴

空间反下, ∇ 为极, \vec{E} 为极 $\Rightarrow \vec{B}$ 为轴

时间反下, ∇ 偶, \vec{E} 偶, $\frac{\partial}{\partial t}$ 奇 $\Rightarrow \vec{B}$ 奇.

②. \vec{J} 为极矢量, 时间反以下奇性

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. 空间转动下, ∇ 矢, \vec{E} 矢, \vec{B} 矢 $\Rightarrow \vec{J}$ 矢.

Tip: 从 $\vec{J} = e \vec{v}$, e 为标, 偶. \vec{v} 为矢, 奇 $\Rightarrow \vec{J}$ 为矢

空间反以下, ∇ 为标, \vec{E} 为标, \vec{B} 为轴 $\Rightarrow \vec{J}$ 为标

时间反以下, ∇ 为偶, \vec{B} 为奇, \vec{E} 为偶, $\frac{\partial}{\partial t}$ 为奇 $\Rightarrow \vec{J}$ 为奇.

并有 $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ 为极性矢-改, $\vec{M}, \vec{B}, \vec{H}$ 为轴性矢-改.

$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta - (\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2) \delta_{\alpha\beta}$. 极并极 真(偶) $\Rightarrow T_{\alpha\beta}$ 为张量 (反比 l^2 , 偶), 时间反以下偶

Ex. 在右么右么张量为 \vec{B} 的均匀恒矢外场中 \vec{A} 为白同性线性无耗材料中 \vec{A} 为空间反域的 \vec{P} 中物矢材料, $\vec{P} = \vec{P}(\vec{B}, \vec{E})$.

(写成 \vec{B} 幂开级, 写 \vec{E} 为级数, 并假设与材料性质-所产生, 且不令空间微分).

\vec{P} 为时间反以下偶性极矢量, \vec{E} 同, \vec{B} 反. \vec{P} 中仅含 \vec{E} , 不含 \vec{E}^2 奇项, 且仅含与 \vec{B} 平行 \vec{E} 的时间导数项才与 \vec{B} 同反以下

对于含 \vec{B} 阶项, 只能由叉乘构成^轴矢量. 例如 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$, $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \times \vec{B}$ 等项

对于含 \vec{B} 二阶项, 例如 $(\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{E}$, $(\vec{B} \cdot \vec{E}) \vec{B}$ (三阶又含 \vec{E} 为二阶项), $(\vec{B} \cdot \vec{B}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, $(\vec{B} \cdot \vec{E}) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ...

并且由于, 价级项, \vec{P} 反比 \vec{E} 引起, 仅含与 \vec{B} 平行 \vec{E} 项, 因此 \vec{B} 阶项与 \vec{E} 同反以下

$\vec{P} = \chi_0 \vec{E} + \chi_1 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \chi_2 (\vec{B} \cdot \vec{B}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \chi_3 (\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \vec{B}$ (对 \vec{B} 各阶项写级数改(低阶项/高阶项))

它用于理解 \vec{B} 下白同性材料中使用的圆转特性

§12. 磁单极问题

存在磁单极下的 Maxwell Equations. 其中 $\nabla \cdot \vec{J}_{mf} + \frac{\partial \rho_{mf}}{\partial t} = 0$.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ef} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J}_{mf} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = \rho_{mf} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ef} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Tip: 假如所有粒子具有同样的磁荷电荷比, 那么通过对所有场进行相同 u 元变换, 可构造与不含 ρ_{mf} 的方程组

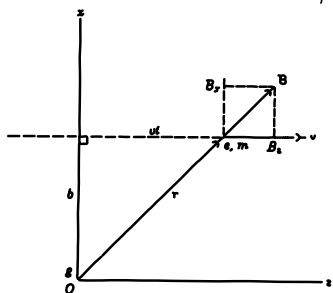
Tip: ρ_m 为磁荷量, 时间反以下奇性, \vec{J}_m 为轴矢量, 时间反以下偶性. (根据 Maxwell 方程的时间反以下与空间反以下)

Dirac 量子化条件: $e = \frac{h}{g} n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 其中 g 为磁单极子的磁荷
 (SI)

§13. 关于狄拉克量子化条件的讨论

①. 通过磁荷的经典理论 + 量子角动量量子化 得到狄拉克条件

考虑一个电子被磁单极散射问题. 并且假设在磁单极 $b \gg 1$ 时粒子几乎不偏转(这一点之后会证明)



产生磁场 $\vec{B} = \frac{g \vec{r}}{4\pi r^2}$, 根据洛伦兹力公式, $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

得到 y 方向的力 $F_y = \frac{egbv}{4\pi r^2}$ 并取 x 轴为时间轴. 由于力臂为 b , 则有

$\Delta L = b \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt = b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{egbv dt}{4\pi (b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{eg}{2\pi}$, 与 b, v 均无关

因此让 b 很大, 带电的 U_y 很小, 几乎无偏转, 这长也几乎无关, 但角动量有一个确实改变

若令 $\frac{eg}{2\pi} = n\hbar \Rightarrow e = \frac{\hbar}{g} \times n$ 为 Dirac 条件

②. 通过计算磁场的角动量来验证上述内容

同样假设在空间中有 - 个不带电粒子与元电荷粒子. 假设位置 \vec{r}_m 与 \vec{r}_e 处

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{g(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}, \quad \vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_e)}{|\vec{r}-\vec{r}_e|^3}$$

根据动生么么么, $\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}$ 并根据对称性可知, $\vec{p}_{em} = \int \vec{g} d\tau = 0$.

由此考虑 $\vec{L}_{em} = \int \vec{r} \times \vec{g} d\tau$, 假设改变位置, $\vec{L}'_{em} = \int \vec{r} \times \vec{g} d\tau = \int (\vec{r} + \vec{\Delta}) \times \vec{g} d\tau = \int \vec{r} \times \vec{g} d\tau$

即角动量为 0, 那么角动量与坐标选取无关, 可取 \vec{r}_e 在 e 处, m 在 \vec{R} 处

$$\Rightarrow \vec{L}_{em} = \frac{1}{c^2} \int \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{H}) d\tau = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int \vec{r} [(\vec{r} \cdot \vec{H}) \vec{r} - \vec{H} r^2] d\tau$$

根据 $(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{r} = \frac{1}{r} [\vec{r} - r(\vec{r} \cdot \vec{r})] = \frac{\vec{r}}{r}$ $\Rightarrow \vec{L}_{em} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} \int (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{r} d\tau$

利用分部积分, $\vec{L}_{em} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} [\oint_S (\vec{r} \cdot \vec{r}) d\vec{\alpha} - \int r(\nabla \cdot \vec{r}) d\tau]$

取 \vec{r} 为半径为 R 的球面, 为 \vec{r} , 第二项, $\nabla \cdot \vec{r} = \frac{1}{r} g(\vec{r}-\vec{r}_e) \Rightarrow \vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \times \frac{1}{\mu_0} g \vec{R} = \frac{eg}{4\pi} \vec{R}$ (仅与 \vec{r} 的方向有关)

在从 $-10 \rightarrow +10$ 过程中, \vec{R} 反向, 半径 \vec{r} , $\vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r}$, $\Delta \vec{L}_{em} = -\frac{eg}{2\pi} \vec{r}$, 而 $\Delta \vec{L} = \frac{eg}{2\pi} \vec{r}$, $\Delta \vec{L} = 0$. 角动量守恒

Tip. 由此若假设没有场的角动量为半量子化, 也可得到 Dirac 条件

③. 量子力学的讨论 (规范不变性与 ψ 单值性的要求),

考虑由 S-E 的物理系统引入的规范不变性.

在规范变换 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda(\vec{r}, t)$, 则有 $\psi'(\vec{r}, t) = e^{ie\lambda/\hbar} \psi(\vec{r}, t)$

例如考虑一个不带电粒子产生的矢量, $\vec{B} = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla \times \vec{A}$, 在球坐标下.

若假设 \vec{A} 仅有 $\hat{\phi}$ 分量, $\vec{B} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin\theta) \hat{r}$ 且由于 $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ 正交, 故有 $A_\phi \propto \frac{1}{r} f(\theta, \phi)$

$\Rightarrow \vec{A} = \frac{g(1-\cos\theta)}{4\pi r \sin\theta} \hat{\phi}$ or $-\frac{g(1+\cos\theta)}{4\pi r \sin\theta} \hat{\phi}$ 均可以, 第一个在 $\theta = \pi$ 时奇异, 第二个在 $\theta = 0$ 时奇异 (与奇异性相反)

或 $\psi(\vec{r}, t)$ 只存在这些区域为 0.

这二区间仅差一个规范变换, $\Delta \vec{A} = \frac{g}{2\pi r \sin\theta}$ $\nabla \lambda = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \phi} = \frac{g}{2\pi r \sin\theta}$ 则 $\Delta \lambda = \frac{g}{2\pi} \phi$ 可以

由此假设在一个规范下为 $\psi(\vec{r}, t)$, 则有另一个规范下为 $e^{ie g \phi / (2\pi \hbar)} \psi(\vec{r}, t)$

根据 $\psi(\vec{r}, t)$ 在 $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ 时的周期性, 必须有 $\frac{eg}{2\pi \hbar} = n \in \mathbb{Z}$ 才有 $e = \frac{\hbar}{g} n$

Tip. 实际上, Dirac 引入了奇异弦, 可以证明, 这跟不同奇异性 \Rightarrow 这跟不同规范, 这跟一根为 $0=0$, 一根为 $0=\pi$ 的奇异性

假设 Ω 为二奇异性弦或曲面, 对 \vec{r} 上的点, $\vec{A}' = \vec{A} + \frac{g}{4\pi} \nabla \Omega$

当电子越过二奇异性弦或曲面时, \vec{A}' 对波函数 $\psi' = e^{ie g \Omega / (4\pi \hbar)} \psi$ 的 Ω 改变了 4π .

(在这上, 奇异性为一个半平面) 因此有 $\frac{eg}{\hbar} = n \times 2\pi \Rightarrow e = \frac{\hbar}{g} n$

Len: 载电流 I 的闭合回路在 P 上产生的 \vec{B} 为 $\vec{B} = I \nabla \Omega$, Ω 为回路对 P 上点的位

(若 PS 同时不为 0 则 $\vec{PO} \cdot \hat{n} > 0$ 且 $\Omega > 0$, \hat{n} 根据右旋定义)