

Chapter VII. 平面电磁波和波的传播

Intro: 讨论无界/半无限媒质中的平面波

§1. 非导电媒质中的平面波

Maxwell Equation 存在行波解. 假设在均匀空间中的横平面波

而均匀无限介质中的平面波解为 $u = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$. u 为 \vec{B}, \vec{E} 的任一量, $k = \frac{\omega}{c}$

在均匀介质中, $v = v(k)$ or $\omega = k v(k)$ 即 k 与 ω 相关.

对于非导电介质, 利用 Fourier 变换, 并且利用平面波 $(e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t})$

\Rightarrow 通解为 $u(\vec{r}, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$, 其中 v 与 k 无关. 这里的 v 即相速度又群速度

① 横平面波: 假设波场具有如下形式 并假设 $\vec{r} \in \mathbb{R}$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad \text{对它们取叉积得到 } \vec{E}, \vec{B}$$

并且有若代入 Maxwell Equation, 在均匀介质中 (μ, ϵ 与 \vec{r} 无关, 但 k 与 ω 相关, 故 k 与 ω 相关)

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \mu \epsilon \omega^2, \quad \text{且 } k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 \text{ 为 } \mu \epsilon \omega^2 \text{ 的平方根. } \mu, \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

$$(\vec{k})^2 = \mu \epsilon \omega^2. \text{ 并有 } \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ 的横波条件})$$

并有确定了 \vec{E} 就确定了 \vec{B} ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) $\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$ (由两条件又知这种形式波构成, 在 $\vec{r} \in \mathbb{C}$ 也)

Tip: 注意在 \vec{E}_0 的不同分量间, 如果有恒定的相位差, 那么就形成了椭圆偏振

$$\text{这种平面波带来的 } \vec{S} \text{ 的时间平均为 } \vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2\mu} \text{Re}(\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0)$$

$$\text{在 } \vec{k} \in \mathbb{R} \text{ 时 } (\omega \in \mathbb{R}) \text{ 则 } \vec{E}_0 \text{ 与 } \vec{B}_0 \text{ 同相 因此有 } \vec{S} = \frac{1}{2\mu} \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0 = \frac{k}{2\mu\omega} |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \vec{k}$$

$$\text{能量流为 } u = \frac{1}{4} [\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{\mu} |\vec{B}_0|^2] = \frac{1}{4} [\epsilon + \frac{1}{\mu} |\vec{k}|^2] |\vec{E}_0|^2$$

$$\text{在 } k^2 = \mu \epsilon \omega^2 \text{ 时, } \vec{k} \in \mathbb{R} \text{ 有 } |\vec{k}|^2 = \mu \epsilon \Rightarrow u = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}_0|^2$$

Extra: 假设 $\vec{k} \in \mathbb{C}$, $\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$. 那么仍有它满足 Maxwell Equation, 但仍有 $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\text{那么根据 } \vec{k} \cdot \vec{k} = \mu \epsilon \omega^2 \Rightarrow k_R^2 - k_I^2 = k^2 = \mu \epsilon \omega^2 \text{ (因此 } k \neq |\vec{k}|) \text{ 与 } \vec{k}_R \cdot \vec{k}_I = 0$$

$$\text{相位部分 } e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} = e^{-\vec{k}_I \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{r} - i\omega t}$$

这样的波称为不均匀平面波. 等幅面与等相面仍为平面, 但二者不再平行, 二者在这样的情况下垂直.

Tip: 也可分为两种情况, 记 $\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2$, $\vec{k} = k \hat{k}$, $k \in \mathbb{C}$ 与 $\hat{k} \in \mathbb{C}$ 并产生不均匀波, 但其 \hat{k} 仍可用 $\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$ 上

§2. 线偏振和圆偏振: Stokes 参数

将 \vec{E}_0 分解到两个相互垂直方向, 不妨以 $\vec{k} \in \mathbb{R}$ 的方向为 z 方向, 那么有 E_x 与 E_y , 那么这两个方向上的单位矢量为 \hat{e}_x

1. $E_{0x} \cdot E_{0y} = 0$ or $\text{Arg}(E_{0x}) = \text{Arg}(E_{0y})$ or $|\text{Arg}(E_{0x}) - \text{Arg}(E_{0y})| = \pi$. 那么代表线偏振光.

2. $\text{Arg}(E_{0x}) \neq \text{Arg}(E_{0y})$ 那么代表椭圆偏振光 (因为相位差恒定)

(i) $|E_{0x}| = |E_{0y}|$, $|\text{Arg}(E_{0x}) - \text{Arg}(E_{0y})| = \pi/2$. 为圆偏振光

从传播方向看，顺时钟为右旋，逆时钟为左旋 (正负旋性，与角动量传播方向)

§3. 电磁波在电介质的平面分界面上的反射与折射

① 运动学性质：反射定律，折射定律 ($k \sin i = k' \sin i'$ ，其中 k 与 k' 为波数，或者 k 与 k' 有 $\sin i > 1$ ，则也有波数为虚数)

引入 $n = \frac{ck}{\omega}$ ， k 与 k' 为波数，也有 $n \sin i = n' \sin i'$

② 动力学性质：反射波的与折射波的频率，位相变化与偏振 (菲涅耳定律)

①. 假设波的一般形式 $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ 并通过分界面上满足一定条件，与 $\vec{r} + \pi$ 边界条件

\Rightarrow 分界面上有 $\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r}$ ， $\omega = \omega' = \omega''$ ($\vec{k} \cdot \vec{r} = k^2$)

其中，若以法线方向为 z ，入射波 \vec{k} 与 z 构成入射面 xOz ，那么有

入射面为 $z=0$ ， $k_y=0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = xk_x \Rightarrow k_y' = k_y'' = 0$ ， $k_x = k_x' = k_x''$

or $i = i'$ ， $k \sin i = k'' \sin i''$ 即为斯涅耳定律 (费马原理 $k_x = k_x' = k_x''$ ，并定义 $k_x = k \sin i$)

Ex. 对于导体 $k''^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega$ ，则有 $k_x'' = k_x$ ，由 $k_x^2 + k_z^2 = k^2 \Rightarrow k_z''$ 再由 $e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)}$ 解出

②. 根据 Maxwell 方程组的线性性质，分别求出偏振平行于入射面与垂直于入射面的菲涅耳定律

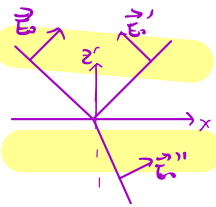
先写一般边界： $(\vec{E}_1)_\parallel = (\vec{E}_2)_\parallel$ ， $(\vec{H}_1)_\parallel = (\vec{H}_2)_\parallel$ ， $(\vec{B}_1)_\perp = (\vec{B}_2)_\perp$ (并有 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$)

Tip: 和 η 成正比， $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 由于不连续性的引入认为分界面上无自由电荷因此正确，

且上述边界条件实际并不互相独立 例如 \vec{D} 连续就不需要，且在导体存在时边界上会有 σ 。

Extra: 为了表示方便，在 $k \in \mathbb{C}$ 时，令 $\vec{k} = k \hat{k}$ ， $\hat{k} = (\sin i, 0, -\cos i)$ ， \hat{k} 也可称为波矢， $\sin i = \frac{k_x}{k}$ ， $\cos i = \frac{k_z}{k}$

(i) \vec{E}_0 与入射面平行时，记 $E_0^2 = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0$ ，其余类似，则有



$$\begin{cases} E_0 \cos i - E_0' \cos i' = E_0'' \cos i'' & (\vec{B})_\perp \text{ 连续} \\ \frac{k E_0}{\mu} + \frac{k' E_0'}{\mu} = \frac{k'' E_0''}{\mu'} & \text{并有 } k' = k, \cos i' = \cos i, k'' \sin i'' = k \sin i \end{cases}$$

$\Rightarrow E_0' = \frac{\mu k'' \cos i - \mu' k \cos i''}{\mu k'' \cos i + \mu' k \cos i''} E_0$ 再利用 $k'' \sin i'' = k \sin i \Rightarrow \cos i'' = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 i / k''^2}$

$E_0'' = \frac{2 \mu' k \cos i}{\mu k'' \cos i + \mu' k \cos i''} E_0$

$\Rightarrow \begin{cases} E_0' = \frac{\mu k''^2 \cos i - \mu' k \sqrt{k''^2 - k^2 \sin^2 i}}{\mu k''^2 \cos i + \mu' k \sqrt{k''^2 - k^2 \sin^2 i}} E_0 \\ E_0'' = \frac{2 \mu' k k'' \cos i}{\mu k''^2 \cos i + \mu' k \sqrt{k''^2 - k^2 \sin^2 i}} E_0 \end{cases}$ 若已知 k'' , μ' , μ , k , i ，即可求得

$\frac{\mu k'' - \mu' k}{\mu k'' + \mu' k} \quad \frac{2 \mu' n}{\mu n'' + \mu' n}$

(ii) \vec{E}_0 与入射面垂直 (物理上少见，假设)

$$\begin{cases} \frac{k E_0}{\mu} \cos i - \frac{k' E_0'}{\mu} \cos i' = \frac{k'' E_0''}{\mu'} \cos i'' & \text{再利用 } k'' \sin i'' = k \sin i, \cos i' = \cos i, k = k' \\ k E_0 \sin i + k' E_0' \sin i' = k'' E_0'' \sin i'' \end{cases}$$

$\Rightarrow E_0' = \frac{\mu' k \sin i'' \cos i - \mu \cos i'' \sin i}{\mu' k \cos i + \mu \sqrt{k''^2 - k^2 \sin^2 i}} E_0 = \frac{\mu' k \cos i - \mu \sqrt{k''^2 - k^2 \sin^2 i}}{\mu' k \cos i + \mu \sqrt{k''^2 - k^2 \sin^2 i}} E_0$

$$E_0'' = \frac{2k' \sin i \cos i}{k'' \cos i + k' \sin i} E_0 = \frac{2\mu' \cos i}{\mu' \cos i + \mu \sqrt{k'^2 - k^2 \sin^2 i}} E_0$$

Tip: 在 k, k'', i, i'' 均为实数时, E', E'' 与 E_0 同相或反相.

可以判 ① E'' 与 E_0 同相 (折射波无相位变化)

② $n' > n (k' > k)$ 时, 反射波 均反向 $n < n'$ 时, 反射波均无相位变化 (n 与 n')

Extra: 在 $\mu' \sim \mu$ 时有

$$\text{平行} \begin{cases} E_0' = \frac{\tan(i-i'')}{\tan(i+i'')} E_0 \\ E_0'' = \frac{2n \cos i}{n' \cos i + n \cos i''} E_0 \end{cases} \quad \text{垂直} \begin{cases} E_0' = \frac{\sin(i-i'')}{\sin(i+i'')} E_0 \\ E_0'' = \frac{2n \cos i}{n' \cos i'' + n \cos i} E_0 \end{cases}$$

Extra: 在 $i=0$ 时, $i''=0$

$$\text{平行} \begin{cases} E_0' = \frac{\mu n' - \mu' n}{\mu n' + \mu' n} E_0 \\ E_0'' = \frac{2\mu n'}{\mu n' + \mu' n} E_0 \end{cases} \quad \text{垂直相同 (除 } E_0' \text{ 加个负号)}$$

§4. 反射引起的偏振和全内反射

①. 布儒斯特角: 在 $\mu \sim \mu'$ 时, 在入射角为 $i_B = \arctan(\frac{n'}{n})$ 时, 平行分量反射波为 0.

(Tip: 用于起偏, 使反射光为线偏振)

$$\begin{cases} i + i'' = \frac{\pi}{2} \\ n \sin i = n' \sin i'' \end{cases} \Rightarrow i_B = \arctan(\frac{n'}{n}), \quad \text{此时 } E_0' \rightarrow 0, E_0'' = 0.$$

透 射 平 同 分 析

Tip: 有一些光学现象良好的解释, 例如干涉与衍射 (各自异于干涉).

② 全内反射. (内代表 $n > n'$)

$i_0 = \arcsin \frac{n}{n'}$ 为临界角, 在 $i > i_0$ 时, 发生全内反射.

这时, 不妨令两侧均为不导电的电介质, 那么 $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \epsilon}$, $k'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu' \epsilon'}$.

再根据菲涅耳条件. $k_x = k_x'' \Rightarrow k_x'' = k \sin i \Rightarrow k_z'' = \sqrt{k'^2 - k_x'^2} = i k \sqrt{\sin^2 i - (\frac{n'}{n})^2}$

\Rightarrow 折射波为 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{r} - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-k \sqrt{\sin^2 i - (\frac{n'}{n})^2} x} e^{i(k \sin i) x - i\omega t}$

可以看到沿 x 方向传播, 振幅会随 x 衰减.

再证明折射例 Poynting 矢量 \vec{S} 方向与波矢同平均为 0. (全内反射无能量耗散)

$\vec{S} \cdot \hat{n} = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E}_0^* \times \vec{H}_0 \cdot \hat{n}]$, $\vec{H}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega \mu} \Rightarrow \vec{S} \cdot \hat{n} = \frac{1}{2\omega \mu} \vec{k} \cdot \hat{n} |\vec{E}_0|^2$, $\vec{k} \cdot \hat{n} = k \cos i''$ 为纯虚数, 因此 $\vec{S} \cdot \hat{n} = 0$

(\vec{E}_0 为 $\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$, $\vec{H}_0 = \vec{H}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$)

Tip: 从菲涅耳公式中也可以得到, 由于 $|\vec{E}'| = |\vec{E}|$, 但 \vec{k} 与 \vec{k}' 不同, 并且 \vec{k} 与 \vec{k}' 不同, 相位变化不同

因此可以借此来无损耗地起偏振. 例如菲涅耳棱镜, 通过多次全内反射, 将

p.s 自然光的偏振 \rightarrow 圆偏振

§5. 电介质、导体和半导体中的频率色散特性

以上讨论对介质在单色光的作用条件下成立，但如未考虑外加叠加，那么应考虑色散，即 μ, ϵ 对 ω 的依赖

Tip: 这时 $\epsilon(\omega)$ 并非实数，^(传导电子) 自由电子产生的贡献可看成电导率

★. 束缚电子模型. 假设物质单位体积内有 N 个分子. 每个分子中有 f_j 个不同的束缚电子，近似为谐振子

即在 ω_j 下有 f_j 个，考虑电子在 ω 的电磁场力下的 $\epsilon(\omega)$

列出运动方程，在 $\vec{E}(e^{i\omega t})$ 作用下: $m[\ddot{\vec{r}} + \gamma_j \dot{\vec{r}} + \omega_j^2 \vec{r}] = e\vec{E}$ 在稳态响应下， \vec{E} 可近似为外场，所以位移为 \vec{r}

\vec{r} 的稳态解也有 $e^{-i\omega t}$ 的时间依赖，那么有 $m[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_j^2] \vec{r}_0 = e\vec{E}_0$

(实际上， \vec{r} 的稳态解中会有衰减项，齐次通解以及 \vec{E} 振荡一项的齐次解，在 $t \rightarrow \infty$ 后，仅有 $e^{-i\omega t}$ 项)

$$\Rightarrow \vec{r}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m(\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2)} \Rightarrow \vec{p}_0 = \frac{e^2\vec{E}_0}{m(\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2)}, \text{ 因此有}$$

$$\vec{P} = N \sum_j f_j \frac{e^2\vec{E}}{m(\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2)}, \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2)}, \quad \sum_j f_j = Z$$

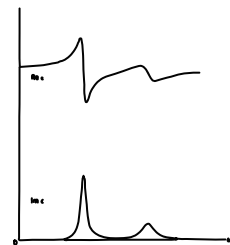
$\text{Im}(\epsilon)$ 代表了介质介质的能量损耗，在 $\omega \sim \omega_j$ 的各频段内， $\text{Im}(\epsilon)$ 总是比较大，出现反常色散 ($\text{Re}(\epsilon)$ 随 ω 而减小)

例如，根据 $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ ，并假设 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ 的解

$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ ，其中 $v = (\frac{Ne^2}{m\epsilon_0})^{1/2} c$ ，假设为无损耗介质， m, m_0 ，则有

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r$ ，令 $k = \beta + \frac{\alpha}{2}i$ ， α 为衰减系数，波的强度经过一个 $\frac{1}{\alpha}$ 变为 $\frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \text{Re}(\epsilon) & \text{在衰减系数上，即 } \text{Im}(\epsilon) \neq 0, \text{ 或 } \alpha \ll \beta \text{ 时 (即 } \text{Im}(\epsilon) \text{ 较大或 } \text{Re}(\epsilon) < 0 \text{ 时)} \\ \alpha\beta = \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \text{Im}(\epsilon) & \Rightarrow \alpha \sim \frac{\text{Im}(\epsilon)}{\text{Re}(\epsilon)} \beta \end{cases}$$



又由于 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，则有在波传播一个波长的，波强度为原来的 $e^{-2\pi \frac{\text{Im}(\epsilon)}{\text{Re}(\epsilon)}}$

α. 低频特性，电导率.

在 $\omega \rightarrow 0$ 时，除了 $\omega_{j0} = 0$ 的项，其他项均趋近于零，

$$\text{则 } \epsilon_0' = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_{j \neq 0} \frac{f_j}{\omega_j^2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon(\omega) = \epsilon_0' + i \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Ne^2 f_0}{m\omega c^2 \epsilon_0' - i\omega}$$

假设介质具有正常介电常数 ϵ_0' ，即 $\vec{D} = \epsilon_0' \vec{E}$ ， $\epsilon(\omega)$ 中有一项是产生电流项，代表了 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon_0' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

另一种解法是 $\epsilon(\omega)$ 即为导数项的介电常数， $\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$ ，那么没有电流项

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{二式相减} \Rightarrow \sigma = \frac{Ne^2 f_0}{m(\gamma - i\omega)}, \text{ 即为电导率的 Drude 公式.}$$

Tip: 只在 $\omega \rightarrow 0$ 下测量 σ ，即直流电 f_0/ω_0 ，并且得到例如在铜内 $f_0 \sim 10^{13}$

因此在微波及红外光的波段， σ 近似为 $\sigma \in \mathbb{R}$ (电场与 \vec{E} 同相)

但在更长的，例如红外，可见光， $\text{Im}(\sigma)$ 较大，

σ 根本上是量子力学，电阻率由能隙结构决定 (如绝缘体)，电子与光子相互作用 (如)

Tip: 因此在 ω 很大时, 所给条件与中价反比例不大, 均有 $I_m(\epsilon)$ 与 $I_e(\epsilon)$ 近似

仅在 $\omega \rightarrow 0$ 时, 导体中由于有自由电子, 会产生不同

β. 高频极限, 等离子体频率

在 $\omega \rightarrow \infty$, 远大于任何 ω_p 时, $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 - \frac{Ne^2 Z}{\epsilon_0 m \omega^2}] = \epsilon_0 [1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}]$, $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2 Z}{\epsilon_0 m}}$ 称为等离子体频率

当 $Z=1$, 若 $NZ = n$ (电子数密度) $\Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

并且在 μ, μ_m 的近似中有 $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ or $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$. $\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}$ 为色散关系

Tip: 等离子体情况 (在全为自由电子, $\omega_p \neq 0$, 且电阻很小, $\gamma \rightarrow 0$ 的稀薄电子等离子体, 如电离层中)

那么 $\epsilon = \epsilon_0 [1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}]$ 在 $\omega < \omega_p$ 的一个很窄范围内近似成立

但此时, 在 $\omega < \omega_p$ 时, ϵ 变为纯虚数, 对应了一个衰减的波 (也称为纯虚数).

因此在 $\omega < \omega_p$ 时, 波无法通过等离子体. 且 ω 越小, 衰减率越大, $\omega \rightarrow 0$ 时, $\alpha_{\text{等离子体}} = \frac{2\omega_p}{c}$. $\alpha^{-1} = \frac{c}{2\omega_p}$

而在电离层中, $n \sim 10^{18} \sim 10^{22}$ 因此 $\omega_p \sim 10^{11} \sim 10^{12}$ 则有 $\alpha^{-1} \sim \text{mm}$ 量级.

这是用场的未等离子体的一种近似

Tip: 金属情况: 例如铜原子, $\omega_p \sim 4 \times 10^{15}$ 量级, $n \sim 10^{29}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ 为传导电子等离子体频率

(m_e^* 是由于计入相互作用而变为有效质量) 得 $\omega_p \sim 1.6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (较为接近?)

$\epsilon(\omega) = \epsilon_0'(\omega) - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, ω_p 为传导电子等离子体频率 (为什么不包含其他电子?)

在 $\omega \ll \omega_p$ 时, 有无穷衰减, $\omega > \omega_p$ 可以传播 (紫外透明), 可以则频率越高给出 m_e^* (nB22)

Tip: 复数的 ϵ : 若从解析为复数函数 ϵ 来讨论的话, 那么就有 $n = \frac{c}{\omega} \text{Re}(\epsilon) = \frac{c\beta}{\omega}$.

但也引出一复数折射率, 这导致 $n = \frac{c\beta}{\omega}$ 的成立更为普遍

β. 水的 β 与 α 随 ω 的变化 (图2)

§6. 在电离层和磁层中传播的简化模型

在近似下, 电离层可视为等离子体, $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}]$, $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$, n 为电子数密度

但因为 \vec{B}_0 的存在 (地磁场), 波的传播要经过重大修正

写出电子运动方程, $m \ddot{\vec{r}} = -e \vec{E} - e \dot{\vec{r}} \times \vec{B}$

作一近似, 例如让 $\vec{B} = \vec{B}_0$ 沿 \vec{z} 方向, 并且很强, 足以掩盖电磁波 \vec{B} 的影响

不妨先考虑圆偏振电磁波, $\vec{E} = (\vec{E}_1 \pm i \vec{E}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, $\vec{E} = (\vec{E}_1 + i \vec{E}_2) E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

例如取 $\vec{E}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{E}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 可以看作, \vec{r} 的 z 分量为常数 ($\vec{r}_z = 0$) 那么有

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{e}{m} (E_1 + i E_2) = 0 & \text{在平面内时, } \ddot{x} = -\omega^2 x, \dot{x} = -i\omega x, \ddot{y} = -\omega^2 y, \dot{y} = -i\omega y \end{cases}$$

$$\ddot{y} + \frac{e}{m} (\pm iE - \dot{x} B_0) = 0 \Rightarrow x = \frac{eE}{m\omega} \frac{1}{\omega \mp \omega_B}, y = i \frac{eE}{m\omega} \frac{1}{\omega \mp \omega_B} \omega_B = \frac{eE}{m} \frac{\omega_B}{\omega(\omega \mp \omega_B)}$$

$\omega_B = \frac{eB_0}{m}$ 为带电子在磁场中运动频率

在不考虑z方向运动, $\vec{r} = \frac{eE}{m\omega} \frac{1}{\omega \mp \omega_B} (1, i, 0) = \frac{eE}{m\omega(\omega \mp \omega_B)} \hat{e}$

Tip: 张量为在 ω_B 旋转参考系中, B_0 消失, $\omega \mp \omega_B$ 为旋转后的 \vec{E}' 频率, 由左右旋而定

由有 $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_B)}]$

Tip: 当 ω 远大于 ω_B 时, 但从中可以看出, 左右旋电磁波传播的 ω 不同, 即双折射现象

若 \vec{E} 与 \vec{B} 不平行, 在 $\omega_B \ll \omega$ 时仍有 $\epsilon(\omega)$ 由上式给出.

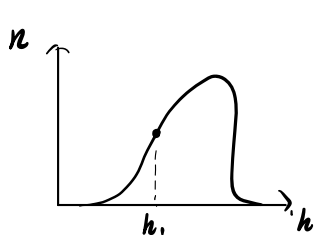
但 ω_B 在量级为 $\frac{eB \cdot \vec{k}}{m} = \omega_B$, 此时 ω_B 与传播方向有关, $\epsilon(\omega)$ 同时成为各向异性介质

Tip: $n \approx 10^{10} \sim 10^{12}$, $\omega_p \approx 10^6 \sim 10^7$. 若取 $B_0 = 3 \times 10^{-5} T \Rightarrow \omega_B \approx 10^6$

在 ω_p/ω_B 的不同值时, $\epsilon_- < \epsilon_+$, 有可能会出现 $\epsilon_- < 0 < \epsilon_+$ 的情况. 此时, 右旋介质, 左旋

这会导致左旋波无法通过而右旋波可以通过 因此线偏振光的入射面偏振

Tip: 平常大气中电子密度随高度变化



当电磁波频率为 ω , 介质透明时, 在 $\omega_p(h) = \sqrt{\frac{ne(h)e^2}{m\epsilon_0}} \sim \omega$ 时, 电子在波长的四分之一

处会出现反射面, 可以推断 h_1 , 进而推断 $\omega_p(h_1) \sim \omega$, 得到 $ne(h_1)$

在 ω 大到一定程度, 反射面处, 折射率 $n(h)$ 的极大值

Tip: 介电常数 $\epsilon(\omega)$

此时仅有 $\epsilon_- \rightarrow 0$, $\epsilon_- \propto \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_B}$, $k \approx \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_B}}$ ($\mu \approx \mu_0$)

那么又一种情况, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2c^2\omega_B}{\omega_p^2} k$, 随着 ω 增加而减小.

在电离层中引起反射现象, 在无线电传播中, 一部分电磁波在电离层中传播

并被吸收, 另一部分反射, 再反射回地面 (听起来像回声) 且在距离为 $10^7 m$ 时, 会有反射面间隔为 $1s$ 量级。

§7. 导电媒质或耗散媒质中的波

(1) ϵ 为复数, $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$

$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}] \Rightarrow k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0 + i \omega \mu \sigma$, 在非磁性介质中, $\mu = \mu_0$

令 $k = \beta + i\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \sqrt{\frac{\mu \epsilon_0 \omega^2}{2}} [\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0})^2} + 1]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha = \sqrt{2\mu^2 \epsilon_0 \omega} [\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0})^2} - 1]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$ (or α 与 β 互换)

(i) 不良导体, ($\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \ll 1$, 忽略上式按 ϵ 的实虚部不同大小关系而定)

$\beta \approx \sqrt{\mu \epsilon_0 \omega^2}$, $\alpha \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} \sigma$, 其中 $\alpha \ll \beta$, 衰减与 ω 无关, $k = (\sqrt{\mu \epsilon_0} \omega + i \frac{\sqrt{\mu}}{\epsilon_0} \sigma) + o(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} \sigma)$

(ii) 良导体, ($\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \gg 1$) 良导体中, $\frac{\alpha}{\beta} = \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$ 约为趋肤深度

$\beta \approx \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}}$, $\alpha \approx \sqrt{2\mu \sigma \omega}$, 衰减与 ω 相关, $k = \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}} (1 + i) + o(\sqrt{\mu \sigma \omega})$

Tip: 在导体中 \vec{E}, \vec{B} 不同相

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{其中 } \vec{k} \cdot \vec{k} = k^2, \text{ 并且设 } \vec{k} = k \hat{k}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\alpha}{2} \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{又有 } \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{k}{\omega} (\hat{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{其中 } k E_0 \text{ 不再与 } E_0 \text{ 同相}$$

例如在 $k \in \mathbb{R}$ 时 若 $k \in \mathbb{R}$, \vec{E}, \vec{B} 同相, 那么 $k = |k| e^{i\phi}$ 且 \vec{B} 有 ϕ 的相位?

$$\phi = \arctan \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} \text{Arg}(k^2) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)$$

$$|k| = \sqrt{|k^2|} = \omega \sqrt{\mu \epsilon_0} [1 + (\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0})^2]^{1/4}$$

$$\frac{|\vec{B}|^2}{|\vec{E}|^2} = \frac{k^2}{\omega^2} = \mu \epsilon_0 [1 + (\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0})^2]^{1/2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2\mu} |\vec{B}|^2}{\frac{1}{2\epsilon_0} |\vec{E}|^2} = [1 + (\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0})^2]^{1/2}$$

在良导体内 $\sigma \gg \omega \epsilon_0 \Rightarrow$ 电场 E

且有 $\phi \approx \frac{\pi}{4}$

$k \perp$ 方向为波矢入射的方向变化

Tip: 在导体平面的反射与折射

根据斯涅耳定律, $k_x = k_x'' = k_x'$, 且有 $k^2 = k'^2 \in \mathbb{R}$ (-波有 σ 为导体), $k''^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0 + i \sigma \omega \mu$

利用 $k''^2 = k_x''^2 + k_z''^2$, $k_x''^2 = k_x^2$ 所以 $k_z'' = c + di$

$$\text{则有 } \vec{E}'' = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + (c + di)z - \omega t)} e^{-dz}$$

§8. 一维波的叠加; 群速度

现实的波有展宽, 简单的平面波解及其叠加后时间依赖于 $(r - ct)$ 的相干性进行无展宽.

① 色散媒质: ω 并不正比于 k , 用波速 v 的相速度随 ω 变化, 不同频率以不同速率前进, 波会扩散, 且会及波相干性相

同时的相速度与相速大不相同. 甚至无明确含义

② 耗散媒质: 无耗散媒质那么反波

以下仅考虑一个一维耗散媒质, 可以认为 \vec{E}, \vec{B} 的性质

引入 $\omega = \omega(k)$, 满足 $k^2 = \omega^2 \mu(\omega) \epsilon(\omega)$, 因此有 $\omega(k) = \omega(-k)$, 并且 k 下波速 $\omega, k \in \mathbb{R}$ (无耗散)

由于这里是一维情况, 所以可设 $\omega = \omega(k)$, 表明了我们出现 (S 各向异性)

此时平面波解为 $u = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$. 若初始条件 (为 $u = u(x, 0)$)

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}, \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx u(x, 0) e^{-ikx} \quad (\text{这里 } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \text{ 忽略})$$

这里即为 Fourier 变换

$$\text{Lem: } \sigma_x = \sqrt{\frac{\int |u(x, 0)|^2 (x-a)^2 dx}{\int |u(x, 0)|^2 dx}}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{\int |A(k)|^2 (k-b)^2 dk}{\int |A(k)|^2 dk}} \quad \text{有 } \sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2} \quad \text{对 } \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(证明较为复杂), σ_x, σ_k 为最大位置 k 是波峰位置或写为频率

Tip: 对于色散媒质 (ω 随 k 变化) 或高维媒质中不处理, k 下近似为

$A(k)$ 在 k_0 处有一个峰且展宽不大, $\omega(k)$ 在 k_0 附近近似为

$$\text{对 } \omega(k) \text{ 在 } k_0 \text{ 处展开 } \omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} \bigg|_{k_0} (k - k_0) + \dots$$

在 $A(k)$ 在 k_0 附近足够尖锐时, $u(x,t)$ 就为时仅在一个 k_0 小邻域内有意义.

由 $u(k)$ 后面的因子 k_0 峰, 同时 $u(k)$ 较平缓那也较小, 因此

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 \frac{dw}{dk}|_{k_0} - \omega)t} \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) e^{ik(x - \frac{dw}{dk}|_{k_0} t)} = u(x - \frac{dw}{dk}|_{k_0} t, 0) e^{i(k_0 \frac{dw}{dk}|_{k_0} - \omega)t}$$

在 $A(k)$ 尖锐, $u(k)$ 较平缓时的近似 $u(x,t) \approx u(x - \frac{dw}{dk}|_{k_0} t, 0) e^{i(k_0 \frac{dw}{dk}|_{k_0} - \omega)t}$

由此有, 波包形状不发生畸变. 若定义了 $W \propto |u|^2$, 那么有 $S = Wv \propto |u|^2 \frac{dw}{dk}$.

波包的群速 $v_g = \frac{dw}{dk}|_{k_0}$, 能量以群速传递

$$\text{对于光波, } \omega(k) = \frac{kc}{n(k)}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} = \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega=\omega(k_0)} = \left(\frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} \right)_{\omega=\omega(k_0)}, \quad v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(k)}$$

在大多数介质中, $n(k) > 1$, 因此 $v_p < c$. 对于正常色散, $dn/d\omega > 0$, $n > 1$, $v_g < c$. 对于反常色散, $dn/d\omega < 0$ 且 $|dn/d\omega| > n$, $v_g > c$.
如有 ω 色散快, 则波包不扩散

§9. 脉冲在色散介质中传播时扩展的例证

考虑一阶偏微分方程定值初值问题, $u(x,t)|_{t=0} = u(x,0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ 且有 $u(x,0)$ 属于 L^2 .

$$\text{那么有 } \begin{cases} A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} [u(x,0) + \frac{i}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)] dx \\ u(x,t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk \right] \end{cases}$$

$u(x,t)$ 满足方程 $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u(x,t) = 0$. 对 $u(x,t)$ 作傅里叶变换

$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx. \quad \text{那么有 } \hat{u}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) e^{-ikx} dx, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) e^{-ikx} dx$$

方程变为 $\left[(ik)^2 - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2} \right] \hat{u}(k,t) = 0$ or $\left[\omega^2 + \frac{d^2}{dt^2} \right] \hat{u}(k,t) = 0$ 根据初值

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0) \cos \omega t + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k,0) \sin \omega t \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\hat{u}(k,0) \cos \omega t + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k,0) \sin \omega t \right] e^{ikx}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\hat{u}(k,0) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k,0) (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right] e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{u} + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) e^{i(kx - \omega t)} + \left(\hat{u} - \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) e^{i(kx + \omega t)} dk \end{aligned}$$

又有 $A = \hat{u} + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$, 因此前半为 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{u}^* - \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial t} \right) e^{i\omega t - i k x} dk &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}(-k,0) - \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(-k,0)] e^{i\omega(-k)t - i(-k)x} dk \quad (\text{利用 } \omega(-k) = -\omega(k)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}(s,0) - \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(s,0)] e^{i\omega t + i s x} ds \quad \text{即为 } \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A^* e^{-i(kx + \omega t)} dk \end{aligned}$$

$$\text{由此有 } u(x,t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\hat{u} \cos \omega t + \frac{i}{\omega} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \sin \omega t \right] e^{ikx}$$

Special Situation: 取 $u(x,0) = e^{-x^2/2L^2} \cos k_0 x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. (两个高斯波包在 $x=0$ 处叠加, 相位相反)

并给出 $\omega(k) = v(1 + \frac{d^2 k^2}{2})$, v 为波速 (即色散在波包下方明显), v 为恒久频率

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x,0) + \frac{i}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)] e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{L^2(k_0 - k)^2}{2}} + e^{-\frac{L^2(k_0 + k)^2}{2}} \right]$$

可以认为, $A(k)$ 有两个高斯峰, 在 $k = k_0$ 处.

再利用 $\omega(k)$ 计算 $u(x,t)$. 同时注意到 $\omega(k)$ 大 $\epsilon \omega = \epsilon_0 [1 - \frac{v_0^2}{\omega^2}]$ 为近似, 若 $v_p \ll \omega$ 则

$$u(x,t) = \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \right], \quad \text{波包不扩散}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\exp \left[-\frac{(x - v_0 t_0)^2}{2L^2(1 + i\omega^2 t/L^2)^{1/2}} \right]}{(1 + i\omega^2 t/L^2)^{1/2}} \times e^{i(k_0 x - \omega t + \frac{\omega^2 t}{2L^2})} + (k_0 \rightarrow -k_0) \right]$$

Tip: ① $u(x,t)$ 第一取为正向行波, 第二取为反向行波.

② 波峰速度 $v_g = v_0^2 k_0$, 波高为 $\frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0}$.

③ $L(t) = [L^2 + (\frac{\omega^2 t}{L})^2]^{1/2}$, 得到波包的半宽在 $t=0$ 时为 L , 在 $t \rightarrow \infty$ 时 $L(t) \rightarrow \frac{\omega^2 t}{L}$, 随时间线性

且不断扩散以 $\frac{L(\frac{x}{L})}{L}$ 的速率, 亦即波包的相间距 x 的相对扩散 (与 x 成正比)

$$\lambda = [1 + (\frac{x}{k_0 L})^2]^{1/2} \quad \text{在 } x=0 \text{ 时}, \quad \lambda(x) = 1 + \frac{x^2}{2k_0^2 L^2}$$

因此有 对于相同 L , k_0 越大波包扩散越快, 对于相同 k_0 , L 越小波包越快, 甚至对于波包也一样在 $x=L$ 的位置, 若 $L \gg 1$ 时波几乎不扩散, 而若 $L \leq 1$ 时波已有明显扩散

Tip: ① 从上述针对波包形状与物理比较而言, 但结果具有一致性

波的扩散 σ_x 可看成 $\sqrt{(\sigma_{x0})^2 + (\sigma_v \times t)^2}$, 而 $v = \frac{d\omega}{dk}$, 因此 $\sigma_v = \frac{d^2\omega}{dk^2} \sigma_k \propto \omega''(k_0) \sigma_k$

并利用 $\sigma_k \sim \frac{1}{\sigma_{x0}} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{(\sigma_{x0})^2 + (\frac{\omega''(k_0)t}{\sigma_{x0}})^2}$, 与 $L(t) = [L^2 + (\frac{\omega^2 t}{L})^2]^{1/2}$ 一致

即 $\omega'' \neq 0$ 时, 窄脉冲中由于 σ_k 的扩散导致其快速扩散, 反之亦然

② 既有扩散又有耗散的问题很复杂, 见 Stratton p301~309

§10. \vec{D} 与 \vec{E} 的关系中的因果性: Kramers-Kronig Relations

α. 时间非局域性

利用 Fourier Transform, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 可表示为 $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ 的叠加, $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ 与 $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$ 有正比关系

$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$, 并且定义 $\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$ (与一般定义相符, 但非 $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$)

由此有 $\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \epsilon(\omega) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \vec{E}(\vec{r}, t') e^{i\omega t'}$

若为实数 $\vec{D}(\vec{r}, t)/\epsilon_0 = \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t-\tau) d\tau$, $G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1] e^{-i\omega\tau} d\omega$

以上方程给出了 \vec{D} 与 \vec{E} 的时间非局域关系, $\vec{D}(\vec{r}, t)$ 与所有时刻 $\vec{E}(\vec{r}, t')$ 相关

Tip: 实际上, 对于 Fourier 变换, 若有 $C(\omega) = a(\omega) b(\omega)$ 且 $C(t) = (a \times b)(t)$ 在延拓为 $\epsilon(t)$ 与 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 的关系

① 若有 $\epsilon(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon$, 则 $G(\tau) = (\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1) \delta(\tau)$, $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\vec{E}(\vec{r}, t) + (\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1) \vec{E}(\vec{r}, t)] = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t)$, 退化为时间局域

β. $G(\tau)$ 的简单模型; 极限情形

例如考虑 $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$ 且不妨考虑单束情形, 且定义 $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$, $n = \text{电子数密度}$

$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}]$ (若 $\gamma \neq 0$) 由此得到 $G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} e^{-i\omega\tau} d\omega$

利用围道积分, 可看成带正负电荷的元电荷分布, 取上半面围道或下半面围道按 $\tau > 0$ 或 $\tau < 0$ 决定

在 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 右式 $f(\omega) \rightarrow 0$, 因此在外大半圆上积分为零, 积上积在下半圆

因此对 $\tau < 0$ 时 $G(\tau) = 0$, 上半面内解析无奇点

对 $\tau > 0$, 取下半圆围道 $G(\tau) = -\frac{\omega_p^2}{2\pi} \times 2\pi i \left[\text{Res} \left[\frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega + \frac{i\gamma + \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2})(\omega + \frac{i\gamma - \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2})} \right] \mid \omega = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2} \right] \right\}$

不妨设 $\gamma_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ 则有二极点分别为 $-\frac{i}{\gamma_0} \sin(\tau\gamma_0) e^{-\frac{\gamma}{2}\tau}$

最后有 $G(\tau) = \omega_p^2 e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \frac{\sin \tau\gamma_0}{\gamma_0} \theta(\tau)$

当 $\epsilon(\omega)$ 为求和形式时, $G(\tau) = \sum_j \frac{Ne^2 f_j}{m \epsilon_0} e^{-\frac{\gamma_j}{2}\tau} \frac{\sin \tau\gamma_j}{\gamma_j} \theta(\tau)$. 其中 $\gamma_j = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_j^2/4}$

Tip: $G(\tau)$ 类似 correlation function, 相关性随 τ 指数衰减, 附加有一个以 γ 振荡的因子

因此有 $D(\vec{r}, t)$ 与 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 的局域限制在 $t' \in [t - \frac{1}{\gamma}, t]$ 范围内. or $\frac{1}{\gamma}$ 内有大量取

$\gamma \sim 10^7 - 10^9 \text{ s}^{-1}$, 因此 γ 为 $10^{-9} \omega_0 \sim 10^{-7} \text{ s}$ 内取, 亦即在微秒级, 电子振荡的半个周期对 \vec{D} 有贡献

Tip: $\vec{D}(\vec{r}, t)$ 与 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 只要在场的空间及时间尺度 \gg 或来自电子的响应尺度 或来自极化尺度的, 我们就可以成空间局域性

这也利用了 $\epsilon(\omega)$ 而非 $\epsilon(\vec{r}, \omega)$ 的均匀性

但对自由物, 它的响应尺度 γ 很大, 此时 ϵ 要写作 $\epsilon(\vec{r}, \omega)$, 同时由 ϵ 导出的 σ 也写作 $\sigma(\vec{r}, \omega)$, 并成为一个张量

区域又件仅有平面波才能成立.

8. $\epsilon(\omega)$ 的因果性和解析性区域

$G(\tau)$ 易为核, 在 $\tau < 0$ 时, $G(\tau) = 0$. 表示未发生在 $t \leq 0$ 的 $\vec{E}(\vec{r}, t')$ 与 $\vec{D}(\vec{r}, t)$ 类似因果性本身.

而因果性限制在 $\forall \epsilon(\omega)$ 的模型下有效, 即必有 $G(\tau) = 0 (\tau < 0)$

or $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\vec{E}(\vec{r}, t) + \int_0^\infty G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t-\tau) d\tau]$

根据 $G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1] e^{-i\omega\tau} d\omega \Rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon_0 [1 + \int_0^{+\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau]$

由于对 $\forall \vec{E}(\vec{r}, t)$ 均有 $\int_{-\infty}^{+\infty} (\text{Im } G(\tau)) \vec{E}(\vec{r}, t-\tau) d\tau = 0$, 因此 $G(\tau) \in \mathbb{R}$ (仅有在 $G(\tau) \in C(\mathbb{R})$ 时成立即成立)

由此, 一般若将 $\epsilon(\omega)$ 延拓至复平面, $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega^*)$

并且在延拓后, 显然有若 $G(\tau)$ 有界, 则有在上半面, $\epsilon(\omega)$ 解析 ($\forall \omega$ 均有效)

在 ω 轴上, 若要求 $\tau \rightarrow \infty$ 时 $G(\tau) \rightarrow 0$ (物理上非平凡), 则有 $\epsilon(\omega)$ 在 ω 轴上也解析 (Dirichlet 级数)

亦即若 $G(\tau)$ 有界且在 $\tau \rightarrow \infty$ 时趋于零, 则有 $\epsilon(\omega)$ 在上半面 (含 ω 轴) 解析 [因果性对 $\epsilon(\omega)$ 的要求]

Tip: 对介电函数 $\epsilon(\omega)$, 显然在 $\omega=0$ 处有一个一阶极点. 这源于

$G(\tau) = \omega_p^2 e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \frac{\sin \tau\gamma_0}{\gamma_0}$ 取 $\gamma_0 = i \frac{\gamma_0}{2}$ 得 $G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\gamma_0} [1 - e^{-\gamma_0\tau}] = \frac{Ne^2 f_0}{m \epsilon_0 \gamma_0} [1 - e^{-\gamma_0\tau}]$

在 $\tau \rightarrow +\infty$ 时, $G(\tau) \rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 不满足实轴解析条件.

Extra: 若 $G(\tau)$ 可以在 $\tau=0$ 处展开, 则有

$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1 = i \frac{G'(0)}{\omega} - \frac{G''(0)}{\omega^2} + \dots$

根据 $G(\tau)$ 连续, $G(0)=0$, 因此有 $\text{Re} [\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1] = O(\frac{1}{\omega})$, $\text{Im} [\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1] = O(\frac{1}{\omega})$

8. Kramers-Kronig Relations

根据 $\epsilon(\omega)$ 在上半平面的解析性 (在不包括导体的情况下),

根据 Cauchy Ld, $\epsilon(z)/\epsilon_0 - 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\epsilon(s)/\epsilon_0 - 1}{s - z} ds$

由于在 z -轴上解析, 那么有 取 C 为上半平面大半圆围道

并且有 $\epsilon(s)/\epsilon_0 - 1$ 至少以 $\frac{1}{s^2}$ 衰减, 因此在大半圆围道上的积分为 0

$$\Rightarrow \epsilon(z)/\epsilon_0 - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(s)/\epsilon_0 - 1}{s - z} ds$$

考虑取 $z = \omega + i\delta$, $\delta \rightarrow 0$ 过零, 因此在取 $z \in \mathbb{R}$ 时, 可以略掉半径小围道

$$\Rightarrow \epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1 = \frac{1}{2\pi i} \times \pi i [\epsilon(\omega)/\epsilon_0 - 1] + \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega')/\epsilon_0 - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\Rightarrow \epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\omega')/\epsilon_0 - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

or 因为实虚部有
$$\begin{cases} \text{Re}[\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}[\frac{\epsilon(\omega')}{\epsilon_0}]}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \text{Im}[\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}[\frac{\epsilon(\omega')}{\epsilon_0}] - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \end{cases}$$

并由 $\epsilon(-z) = \epsilon^*(z^*) \Rightarrow \epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$ ap $\text{Re}[\epsilon(\omega)]$ 偶, $\text{Im}[\epsilon(\omega)]$ 奇

$$\begin{cases} \text{Re}[\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}] = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im}[\frac{\epsilon(\omega')}{\epsilon_0}]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' & (\text{需由 } \epsilon(0) \text{ 修正}) \\ \text{Im}[\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}] = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}[\frac{\epsilon(\omega')}{\epsilon_0}] - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{cases}$$

Tip: Kramers-Kronig Relations 的应用

① 通过正则吸收或正则折射率 $\text{Im}(\epsilon)$ or $\text{Re}(\epsilon)$, 进而计算另一个.

例如反布居数中 $\text{Re}(\epsilon/\epsilon_0)$ 与 $\text{Im}(\epsilon/\epsilon_0)$ 的关系, $\frac{1}{\epsilon_0} \text{Im}(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}) \propto \frac{\pi K}{2\omega_0} \delta(\omega - \omega_0) + \dots$

那么有 $\text{Re}(\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \frac{\pi K}{2\omega_0} \delta(\omega' - \omega_0) d\omega' = 1 + \frac{K}{\omega^2 - \omega_0^2}$, 出现一个类型的发散.

Extra. Two Summing Rules

(i) if $\omega_p^2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{\omega^2 [1 - \epsilon(\omega)/\epsilon_0]\}$ and $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}(\epsilon(\omega)/\epsilon_0) = O(\frac{1}{\omega^2})$ then

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega \text{Im}(\epsilon(\omega)/\epsilon_0) d\omega$$

该法则在价电子模型中适用于 $\sum_j f_j = Z$, 该法则更为普遍, 也适用于导体以及本征材料

或等离子体频率求和法则 (对导体也适用)

(ii) if for All $\omega' > N$, $[\text{Re}(\epsilon(\omega')/\epsilon_0) - 1] = -\omega_p^2/\omega'^2 + O(\frac{1}{\omega'^4})$ then

$$\text{when } \omega > N, \text{Im}(\epsilon(\omega)/\epsilon_0) = \frac{2}{\pi} \omega \left\{ -\frac{\omega_p^2}{N^2} + \int_0^N [\text{Re}(\epsilon(\omega')/\epsilon_0) - 1] d\omega' \right\} + O(\frac{1}{\omega^3})$$

$$\text{And } \text{Im} \sim O(\frac{1}{\omega^3}) \text{ so } 1 + \frac{\omega_p^2}{N^2} = \frac{1}{N} \int_0^N \text{Re}[\epsilon(\omega)/\epsilon_0] d\omega'$$

在 $N \rightarrow \infty$ 时, 适用于 $\text{Re}(\epsilon(\omega)/\epsilon_0)$ 对所有频率的平均值为 1.

对导体, 右则加 $-\frac{\pi \sigma(\omega)}{2\epsilon_0 N}$ ($\sigma(\omega)$)

§ 11. 信号通过色散媒质的传播过程.

Intro: 考虑信号在已散介反中传播. 如何定义波动到达时间? 在正频率的相/群 > 光速吗, 信号跑进光速吗?

考虑一个平面波列, 从 $x < 0$ 到 $x > 0$ 的介反区. 并开限均匀. 折射率为 $n(\omega)$, 正入射.

根据菲涅耳公式 $E'' = \frac{2}{1+n(\omega)}$ 那么假设 $u(x, t)$ 为电场的任一分量

$u_i(0, t) = \int A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ ($A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int u_i(0, t) e^{i\omega t} dt$), 即将入射波折成各频率分量.

那么有 $u(x, t) = \int \frac{2}{1+n(\omega)} A(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega$ ($x > 0$ 区域) (叠加) 并有 $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ (n 折射率).

在这上 $k(\omega)$ 为相位速度, 因为考虑在 x 处. 波随 ω 变化, 而如果是 t 时, 随 x 变化

α . $A(\omega)$ 的一般性质

假设波有完全确定的前沿, $u_i(0, t) = 0$ ($t < 0$).

这类似在证明 $\epsilon(\omega)$ 在上半面解析的条件, 但这里没有 $u_i(0, +\infty) \rightarrow 0$ (但真空的波矢满足)

且有在 $t \rightarrow 0^+$ 时若 $u_i(0, t) \rightarrow \frac{at^m}{m!}$ 则有 在 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时 $A(\omega) \rightarrow (\frac{a}{2\pi})(\frac{1}{\omega})^{m+1}$

(Fourier 变换的性质)

β . 在 ω 平面 $n(\omega)$ 的一般性质.

有因果性仅从 $n(\omega)$ 的解析域及 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时 $n(\omega)$ 的变化特性就可推出.

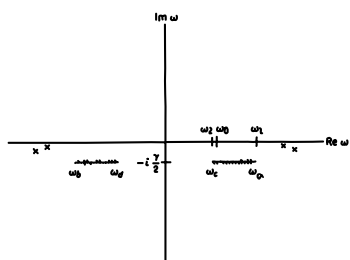
不必取最高阶数, 无因果性, 单求得的 $n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

并有 $n^2(\omega)$ 的几个关键点位置.

双零点: $\omega_a = \omega_1 - \frac{i}{2}\gamma$, $\omega_b = -\omega_1 - \frac{i}{2}\gamma$, $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2 - \gamma^2/4$

双极点: $\omega_c = \omega_2 - \frac{i}{2}\gamma$, $\omega_d = -\omega_2 - \frac{i}{2}\gamma$, $\omega_2^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$.

$\Rightarrow n(\omega) = \left[\frac{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)}{(\omega - \omega_c)(\omega - \omega_d)} \right]^{1/2}$, 多值开根按照 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时, $n(\omega) = 1$, 且 $\omega_b, \omega_d, \omega_c, \omega_a$ 连成回路.



可以看到, $n(\omega)$ 仍在上半面内解析

并在 $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} n(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}$

γ . 物反中无传播速度的上限

不论媒质性质如何, 信号传播速度不能快于真空中的光速 (所以, $|\omega| \rightarrow \infty$, $n(\omega) \rightarrow 1$, 与 $A(\omega)$ 无关解析)

$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+n(\omega)} A(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega$. 由于 $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} n(\omega) \rightarrow 1$, 因此内部相因子 $\rightarrow i\omega(\frac{x}{c} - t)$

在 $x > ct$ 时, 在无穷远处 $\frac{x}{c} - t < 0$, 因此 $\gamma_{\text{上}}$ 上半面围道积分, 并在上半大圆弧上积分为零.

又有 $A(\omega)$ 与 $n(\omega)$ 均在上半面解析, 那么有 $u(x, t) = 0$ ($x > ct$)

8. 反射相位

以上为因果性的证明, 更进一步需有 $t > x/c$ 处各时刻振幅, 可用最陡下降法

也可近似地用稳相法, 适用于 $I = \int F(\omega) e^{i\phi(\omega)} d\omega$ 型积分的估计

$I = \int F(\omega) e^{i\phi(\omega)} d\omega$, 其中 $F(\omega)$ 的特征变化尺度 $\gg \phi(\omega)$ 的, 仅当 $\phi(\omega)$ 驻点(驻值)时, 才会有非零贡献

在波处, $\phi(\omega) = k(\omega)x - \omega t$, $k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega)$. 由此,

$$\frac{d\phi}{d\omega} = x \frac{dk}{d\omega} - t = x \left[\frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} \right] - t, \quad \frac{d\phi}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{ct}{x}, \quad (x < ct)$$

① 最早达到 x 的波为在 $t = t_0 = \frac{x}{c}$ 时

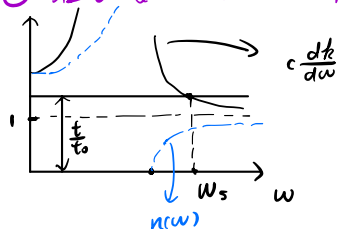
$$\text{此时对应极值点为 } |\omega| = \infty, \text{ 即 } n(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}, \quad \frac{dn}{d\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} = \frac{t}{t_0}$$

$\omega_{\text{stationary}} = \omega_s \propto \omega_p [2(1-t/t_0)]^{-1/2}$, 其中的 $\omega_p, t/t_0$ 都与折射率有关.

并且 ω_s 很大, 在 $u_i(0, t)$ 至有限时, $A(\omega_s) < \frac{1}{\omega_s} \rightarrow 0$. 因此有在 ω_s 附近贡献很小.

这部分微弱高频且与入射波形毫不相似的首先到达的波称为 First or Sommerfeld precursor.

② 在 t 越来越大时, 全在 $\frac{t}{t_0} = n(\omega)$ 时出现第二个大振幅.



此时为 Second or Brillouin precursor.

在一段很长的 $t \geq n(\omega)t_0$ 中会出现

③ 再之后也许有多个极值点, 再之后 $A(\omega)$ 的性质支配波的形式

Conclusion: 以上 First, Second 与之后的 $A(\omega)$ 支配的波形, 只由上图 $n(\omega)$, $A(\omega)$ 与 x 位置, 不同有很大变化