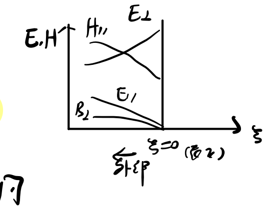
Chapter VIII. 波导和谐振腔.

§1. 导体表面和导体内的场

Intro. 严格求解导体表面的折反射问题很复杂. 但在导体为良导体时, 可以用近似方法得到最重要的特性, 且近似甚至可扩展至平面波入射以外.

对于理想导体, 内部 $\vec{E},\vec{B},\vec{H},\vec{D}$ 均为零, 且有 外侧 ($\hat{n}$指向外侧)

$\vec{D}\cdot\hat{n}=\Sigma$, $\hat{n}\times\vec{H}=\vec{K}$, $\hat{n}\cdot\vec{B}=0$, $\hat{n}\times\vec{E}=0$. (即 $\vec{E}_{\parallel}, B_{\perp}=0$)



对于非理想导体, 与理想导体不同, 且由于良导体内, 场随指数衰减, 因此仅在一个薄层内不同

例证: 在 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ 下, 由于不可能有一个无穷大的$\vec{E}$, 因此必有 $\vec{K}=0$. 由此仍然为 $\hat{n}\times(\vec{H}-\vec{H}_c)=0$. (conductor)

近似方法: 逐步近似, 假设有 $E_{\parallel}=0$, $B_{\perp}=0$ 仍成立. 并假定 $\vec{E},\vec{B}$ 以之为边值问题中解得

然后利用真实边界与导体内的 Maxwell Equation 求出该层内场与外部场的修正.

(求解导体内场时, 利用场在垂直表面上变化要远快于平行于表面上空间变化, 亦即相对法向导数, 可略切向导数)

例如, 略去 Maxwell Equation 内的位移电流. 并作单位场近似 ($\propto e^{-i\omega t}$), 则有
在 $(\frac{\sigma}{\omega\epsilon})\gg 1$, 良导体时, 远小于 $\sigma\vec{E}_c$

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}_c=i\mu\omega\vec{H}_c\\ \nabla\times\vec{H}_c=\sigma\vec{E}_c\end{cases}$$

再有, 利用法向变化远大于切向, 可近似将 ∇ 写作 $\nabla=-\hat{n}\frac{\partial}{\partial\xi}$, ξ 正方向向导体内部

那么方程可以进一步化简为 $\vec{E}_c=-\frac{1}{\sigma}\hat{n}\times\frac{\partial\vec{H}_c}{\partial\xi}$, $\vec{H}_c=\frac{i}{\mu\omega}\hat{n}\times\frac{\partial\vec{E}_c}{\partial\xi}$

组合得到. $i\sigma\mu\omega(\hat{n}\times\vec{H}_c)+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\hat{n}\times\vec{H}_c)=0$. 与 $\hat{n}\cdot\vec{H}_c=0$ (与边界一致)

根据 $\hat{n}\times(\vec{H}-\vec{H}_c)=0$, 有表面处. $\vec{H}_c=\vec{H}_{\parallel}$. 因此最终解为 $\vec{H}_c=\vec{H}_{\parallel}e^{\sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}(-1+i)\xi}$ (开根按良成确定)

并有可代入 $\sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}=\delta$, 为良导体内的趋肤深度 , $\vec{H}_c=\vec{H}_{\parallel}e^{-\xi/\delta}e^{i\xi/\delta}$

再按 $\vec{E}_c=-\frac{1}{\sigma}\hat{n}\times\frac{\partial\vec{H}_c}{\partial\xi}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}_c=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}}(1-i)(\hat{n}\times\vec{H}_{\parallel})e^{-\xi/\delta}e^{i\xi/\delta}$

Tip: ① 可以看到, $\vec{E}_c$, $\vec{H}_c$ 均沿 ξ 方向以指数衰减, 特征尺度为趋肤深度, 并伴随相位变化

且 $\vec{E}_c,\vec{H}_c$ 间确有 $\frac{\pi}{4}$ 的相位变化 ; 且 $\mu|H_c|^2\gg\epsilon|E_c|^2$

② 且在零阶近似下确有 无$(H_c)_{\perp}$, 无$(E_c)_{\perp}$, $(\vec{E}_c)_{\parallel}$ 仅有 $(\vec{H}_c)_{\parallel}$ ($\vec{E}_c$ 已为一阶小)

当然这只适用于零阶为外仅有零阶切向 $\vec{H}_{\parallel}$. 若零阶为有 $E_{\perp}$, 那近似不同 (但在近似对推导以上已足够多)

③ 一阶下, 有一个$(\vec{E}_c)_{\parallel}$, 根据 $\hat{n}\times(\vec{E}_c-\vec{E})=0$ 可得 导体外表面有一个 $\underbrace{\vec{E}_{\parallel}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}}(1-i)(\hat{n}\times\vec{H}_{\parallel})}$

同样根据 $\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}$ 可得 外表面处有一同样一阶的 $(B_{\perp})$ 确定,

依 $\vec{E}_{\parallel}\times\vec{H}_{\parallel}$ 可看为外部向内部传送能流

$$S_0=\hat{n}\cdot\frac{1}{2}Re(\vec{E}^{*}\times\vec{H})\overset{一阶}{=}-\frac{1}{2}Re(\vec{E}_{\parallel}^{*}\times\vec{H}_{\parallel})=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}}|\vec{H}_{\parallel}|^2=-\frac{\mu\omega\delta}{4}|\vec{H}_{\parallel}|^2$$

亦即单位面积上有 $\frac{1}{4}\mu\omega\delta|\vec{H}_{\parallel}|^2$ 的功率流入.

Tip: 可以解释为单位面积金属对应的焦耳热耗散.

$P=\int \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{J}^{*}\cdot\vec{E})\ 1\times d\xi = \frac{1}{2}\sigma\int_0^\infty \frac{\mu\omega}{2\sigma}\times 2\times|\vec{H}_\parallel|^2 e^{-2\xi/\delta}d\xi = \frac{1}{4}\mu\omega\delta|\vec{H}_\parallel|^2$

Tip: 若将表面的薄层等效为表面，那么良导体与理想导体类似。

$\vec{K}=\int_0^\infty \vec{J}\, d\xi = \hat{n}\times\vec{H}_\parallel$ (与之前一致)。功耗为 $P=\frac{1}{2\sigma\delta}|\vec{K}|^2$ 为单位面积功率

类比 $\frac{1}{2\sigma}|\vec{J}|^2$ 得到 $\frac{1}{\sigma\delta}$ 起到面电阻作用 (类似将δ层看成一个二维电阻)

Tip. 定义表面阻抗 Z_s，$\vec{E}_\parallel = Z_s\vec{K}$，在此有 $Z_s=\frac{1}{\sigma\delta}(1-i)$，当然$Z_s$根据什么范围而定

Conclusion: 以上为，求出理想导体的场，再据近似计算功耗，例如通过$\vec{H}_\parallel$得$\vec{K}_{eff}$，再用 $P=\frac{1}{2\sigma\delta}|\vec{K}_{eff}|^2$计算。

§2. 柱形空腔和波导 (按有无端面区分)

假定金属柱体边界面是理想导体。计算功耗时用§1中方法修正。

为简单起见，假设截面沿轴不变，且设所有场均随 $e^{-i\omega t}$ 变化，并假设柱内有μ,ϵ的非功耗介质 ($\mu,\epsilon\in\mathbb{R}$)

$\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B}$ $\quad\nabla\cdot\vec{E}=0$，$\quad\nabla\times\vec{B}=-i\omega\mu\epsilon\vec{E}$，$\quad\nabla\cdot\vec{B}=0$. $\Rightarrow [\nabla^2+\mu\epsilon\omega^2](\vec{E}\text{ or }\vec{B})=0$.

由于柱形，不妨假设其轴为z轴，那么在z方向上无边界条件(波导) 或有一些边界，并假设这些方向是

那么在波导时，无限制，则有z依赖为 $e^{\pm ikz}$，k可任意 ($k^2<\mu\epsilon\omega^2$)，并有这些体性是为沿z传播的波导。

$\vec{E}=\vec{E}(x,y)\,e^{\pm ikz-i\omega t}$. $\vec{B}=\vec{B}(x,y)\,e^{\pm ikz-i\omega t}$ 由此改写以上方程

引入 $\nabla_t=\nabla-(0,0,\frac{\partial}{\partial z})$ $\quad\vec{E}_t=(\hat{z}\times\vec{E})\times\hat{z}$ $\quad\vec{E}_z=\hat{z}E_z$，$B$同理

$$\Rightarrow\begin{cases}\partial_z\vec{E}_t+i\omega\hat{z}\times\vec{B}_t=\nabla_t E_z & \cdots① \\ \partial_z\vec{B}_t-i\mu\epsilon\omega\hat{z}\times\vec{E}_t=\nabla_t B_z & \cdots②\end{cases},\quad \begin{matrix}\nabla_t\times\vec{E}_t=i\omega B_z & \cdots③ \\ \nabla_t\times\vec{B}_t=-i\mu\epsilon\omega E_z & \cdots④\end{matrix}\quad \begin{cases}\nabla_t\cdot\vec{E}_t=-\partial_z E_z & \cdots⑤ \\ \nabla_t\cdot\vec{B}_t=-\partial_z B_z & \cdots⑥\end{cases}$$

特别，在假设$\vec{E},\vec{B}$对z的依赖后，给定E_z, B_z即可由①②得到$\vec{E}_t,\vec{B}_t$

Tip: 因此可按E_z, B_z是否为零来区分。 $E_z=B_z\equiv 0$ 称为TEM波

①那么由⑤③得 $\nabla_t\times\vec{E}_t=0$，$\nabla_t\cdot\vec{E}_t=0$，即为二维调和函数。又有在边界(导体截面边缘)

上，势为常数，根据极大极小值原理，必有电势为常数，or $\vec{E}_t=0$，亦即$\vec{E}=0$.

因此有 $\sigma\to\infty$ 的单个中空柱形导体内不会有TEM波

但可以利用例如双电势不同的柱面嵌套形成共轴传输线以传输TEM波

②. 若有z方向依赖为 $e^{\pm ikz-i\omega t}$，那么有

$[\nabla_t^2+(\mu\epsilon\omega^2-k^2)]\vec{E}=0$. 又根据 $\nabla_t^2\vec{E}=0$ (从$\nabla^2\phi=0$得) $\Rightarrow k=\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega$.

亦即对$\forall\omega$，k均为实数，不存在截止频率 (共轴传输线的好处)

③ $\vec{B}_{TEM}=\vec{B}_t=\pm\frac{\mu\epsilon\omega}{k}\hat{z}\times\vec{E}_t=\pm\sqrt{\mu\epsilon}\,\hat{z}\times\vec{E}_{TEM}$ (与无限媒质中平面波一致)

理想导电柱体边界条件： $\hat{n}\times\vec{E}=0$ and $\hat{n}\cdot\vec{B}=0$ ($\sigma\to\infty$时，$\vec{K}$可以非零，$\vec{H}_\parallel$可以不连续，大致在外部不为零即可)

那么对于柱形金属有 $E_z|_s=0$ and $\frac{\partial B_z}{\partial n}|_s=0$ (由 $\hat{n}\cdot\frac{\partial\vec{B}_t}{\partial z}=\hat{n}\cdot\nabla_t B_z=0\Rightarrow\frac{\partial B_z}{\partial n}|_s=0$)

作边界加上 $[\nabla_t^2+\mu\epsilon\omega^2-k^2](E_z \text{ or } B_z)=0$ 给出了含边界条件的本征值问题，二阶齐次椭圆方程.

E_z 为 First B-C，B_z 为 Second B-C. 可以解得一系列本征值 k（典型波导）or 对一 k 仅有一些 ω（典型谐振腔）

由于 E_z 与 B_z 边界不同，它们本征值也不同，由此可分为

(i) $E_z=0$，TE 模式　(ii) $B_z=0$，TM 模式

根据场的线性性质，可以将其叠加形成完整的场. 例如 E_z/B_z 本征解叠加 + TEM 波 → 真实波

§3. 波导

对于 TE or TM 波有 $\vec{H}_t=\pm\frac{1}{Z}\hat{z}\times\vec{E}_t$. Z 称为波阻抗 $Z=\begin{cases}\frac{\mu\omega}{k}=\frac{k_0}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & (TE)\\ \frac{k}{\epsilon\omega}=\frac{k}{k_0}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & (TM)\end{cases}$ $(k_0^2=\mu\epsilon\omega^2)$

由此代入散度方程，得到由 $E_z(TM)$ 与 $H_z(TE)$ 表示的 $\vec{E}_t$ 与 $\vec{H}_t$（使用 $\vec{E}$, $\vec{H}$ 是在一般电路中的启用规范，与U, I相对）

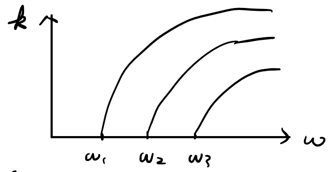
$$TM:\ \vec{E}_t=\pm\frac{ik}{k_0^2-k^2}\nabla_t E_z=\pm\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t E_z \qquad TE:\ \vec{H}_t=\pm\frac{ik}{k_0^2-k^2}\nabla_t H_z=\pm\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t H_z.$$

γ 实际上若为负数，即 $k>k_0$，那么无法形成的正模. 也可从方程看出，若 $\gamma^2<0$，则 ψ 无振荡性，无法满足 $\psi|_s=0$，$\frac{\partial\psi}{\partial n}|_s=0$

由 $\gamma^2=k_0^2-k^2$ ⇒ E_z 与 H_z 均满足 $(\nabla_t^2+\gamma^2)\psi=0$，对 E_z，$\psi|_s=0$；对 H_z，$\frac{\partial\psi}{\partial n}|_s=0$.

给本征方程存在一系列的解 γ_λ（对应 k_λ）以及 ψ_λ.（由于波导 ω 相关，k 可变）它们称为波导的波模.

对于给定频率 ω，需满足 $k_\lambda^2=\mu\epsilon\omega^2-\gamma_\lambda^2$. 由此对不同 γ_λ，k 有不同取值



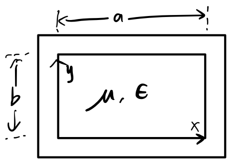
（给定一个ω，仅有有限个可传播的波模）

但仅对给定 γ_λ 的波模，它能传递的 ω 有一下限 截止频率，$\omega_\lambda=\frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

Tip: 波导中波模的相速度 $v_p=\frac{\omega}{k_\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-(\omega_\lambda/\omega)^2}}$.

即对 λ 模式，在 $\omega\to\omega_\lambda$ 时 $v_p\to\infty$ ($k_\lambda\to0$)，v_p 很容易超光速

§4. 矩形波导中的波模



考虑一个如左图形状的波导，那么根据 $(\nabla_t^2+\gamma^2)\psi=0$. $\psi|_s=0$ or $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_s=0$

可以得出在 TM，TE 下的波模.

① TE：寻找分离变量解，$\gamma>0$，并需求 $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_s=0$

$$\Rightarrow \gamma_{mn}=\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}},\quad \psi_{mn}(x,y)=H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

那么可用 ψ_{mn} 叠加出 $\forall H_z(x,y)$. 对于 $H_z(x,y)=\psi_{mn}(x,y)$，则有

$$\omega_{mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}},\quad \vec{H}_t=\pm\frac{i\sqrt{k_0^2-\gamma_{mn}^2}}{\gamma_{mn}^2}H_0\left(-\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\ -\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\ 0\right)$$

自洽性的简单验证

最后加上时间与z方向的变化，$\vec{H}=(\vec{H}_t+\hat{z}\psi_{mn})e^{\pm ikz-i\omega t}$

Tip: $a>b$，则可传播最小频率为 $\omega_{10}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}\,a}$　对应在介质中波长约为 $2a$（形成半个驻波）

Tip: TM 模的 $E_z=E_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$，而 E_z 为0，则 $\vec{E}=0$，则最低为 ω_{11}. 因此无 TM_{0n} or TM_{m0} 模.

因此 TM 与 TE 中最低为 TE_{10} 对应的 ω_{10}.

② TM 类似，略

§5. 波导中的能流和衰减

α. 能流

以下仅限于讨论一种模式的能流.

$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)$ 为复 Poynting 矢量, 其实部给出 能流时间平均

对 TE, TM 波都有 $\vec{H}_t = \pm\frac{1}{Z}\hat{z}\times\vec{E}_t$, 以及 $\vec{E}_t = \pm i\frac{k}{\gamma^2}\nabla_t E_z$ (TM) or $\vec{H}_t = \pm i\frac{k}{\gamma^2}\nabla_t H_z$ (TE)

不论对TE, TM, 不妨记 ψ 代表 E_z or H_z 中非零的那个

$$\vec{S} = \begin{cases} \frac{k\epsilon\omega}{2\gamma^4}\left[\pm|\nabla_t\psi|^2\hat{z} + i\frac{\gamma^2}{k}\psi\nabla_t\psi^*\right] & (TM, \psi = E_z) \\ \frac{\mu k\omega}{2\gamma^4}\left[\pm|\nabla_t\psi|^2\hat{z} - \frac{i\gamma^2}{k}\psi^*\nabla_t\psi\right] & (TE, \psi = H_z) \end{cases}$$ 双轨

① 一般 $\psi\in R$. 有可能使一些模式的线性组合使 $\psi\notin R$. 但此时 $Re(\vec{S})$ 才有横向成分.

这代表能量储存, 即环流, 与实用的能量传输相比, 重要性不高

② 此时可以看到横向分量为 $\vec{S}$ 的纯虚部分, 为无功能流, 实能流沿 z 方向

$$P = \int_A (Re\,\vec{S})\cdot\hat{z}\,da = \frac{k\omega}{2\gamma^4}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A \pm|\nabla_t\psi|^2 da$$

利用 $(\nabla_t\psi)\cdot(\nabla_t\psi^*) = \nabla_t\cdot(\psi^*\nabla_t\psi) - \psi^*\nabla_t^2\psi$, 并利用 $\int_A \nabla_t\cdot(\psi^*\nabla_t\psi)\,da = \oint_{\partial A}(\psi^*\nabla_t\psi)\cdot\overset{向外}{\hat{n}}\,dl = \oint_{\partial A}\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n}dl$

$$P = \pm\frac{k\omega}{2\gamma^4}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\left[\oint_{\partial A}\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n}dl - \int_A\psi^*\nabla_t^2\psi\,da\right]$$, n 为从A内指向A外的边界法向量

再有, TE波 $\frac{\partial\psi}{\partial n}\big|_{\partial A} = 0$, TM波 $\psi|_{\partial A} = 0$. 由此第一项为零 再利用 $(\nabla_t^2 + \gamma^2)\psi = 0$

$$P = \pm\frac{k\omega}{2\gamma^2}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A\psi^*\psi\,da = \pm\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}\int_A\psi^*\psi\,da$$ (为λ模式的传输功率)

传输功率与 ω 与 ψ 相关. 在 $\omega > \omega_\lambda$ 时, P 随 ω↑而↑.

同样的步骤, $U = \frac{1}{4}\epsilon|\vec{E}(x,y)|^2 + \frac{1}{4}\mu|\vec{H}(x,y)|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A\psi^*\psi\,da$ (上TM, 下TE)

$\frac{P}{U} = \overset{正反方向}{(\pm)}\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}$, 恰为群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, 且有 $v_g < c$, 且在截止频率时降为零

$\gamma_\lambda^2 = k_0^2 - k^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_\lambda^2 + \frac{k^2}{\mu\epsilon}} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\omega_\lambda^2\mu\epsilon + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}$

根据 $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{1}{1-\omega_\lambda^2/\omega^2}} \Rightarrow v_p v_g = \frac{1}{\mu\epsilon}$, 即为介质中光速平方

β. 衰减.

以上均为理想导体壁, 因此要么有 $k\in R$, 要么有 k 为纯虚, 在电导率有限时

在电导率很大时, γ_λ 不再是实数, 会有一个微小虚部, 同样带来 $\gamma_\lambda^2 = k_0^2 - k^2$ 中的 $k = k_\lambda$

k_λ 会出现一个较小的变化. $k_\lambda = k_\lambda^{(0)} + \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ 在 k_λ 非常接近零(ω与ω_λ很接近). α_λ 效果不明显.

可以通过 ① 直接求解有限电导率边界条件的边值问题 ② 用§2的单位面积损耗, 再由能量守恒, 而来近似计算 β_λ.

这一节中用②, 根据 $P(z) = P_0 e^{-2\beta_\lambda z} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -2\beta_\lambda P$ 即 单位长度上耗散于欧姆损失的功率 $-\frac{dP}{dz} = 2\beta_\lambda P$

$\hat{n}\times\vec{H} = \vec{K}_{eff}$, $\frac{1}{2\sigma\delta}|K_{eff}|^2$ 为单位面积耗散, 因此 $-\frac{dP}{dz} = \oint_{\partial A}\frac{1}{2\sigma\delta}|\hat{n}\times\vec{H}|^2 dl$

利用 $\vec{H}(x,y)$ 在 TE, TM 下用 ψ 的表示, 可以得到

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\sigma\delta}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2 \oint_{\partial A} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu^2\omega_\lambda^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 & \\ \frac{1}{\mu\epsilon\omega_\lambda^2}\left(1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)|\hat{n}\times\nabla_t\psi|^2 + \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}|\psi|^2 & \end{array} \right\} dl, \quad \begin{array}{l} (TM) \\ (TE) \end{array}$$

又 $\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 = |\nabla_t\psi\cdot\hat{n}|^2 \sim |\mu\epsilon\omega_\lambda^2\psi|$ （根据 $(\nabla_t^2+\gamma_\lambda^2)\psi=0$）

由此有 $\oint_{\partial A}\frac{1}{\omega_\lambda^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 dl = \xi_\lambda\mu\epsilon\frac{C}{A}\int_A|\psi|^2 da$，C为 $\oint_{\partial A}dl$，A为 $\int_A da$，ξ_λ与截面形状相关，($\xi_\lambda\sim1$)

由此，再由P的表达式，$\beta_\lambda=-\frac{1}{2P}\frac{dP}{dz}$，并再引入 $\delta_\lambda=\sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega_\lambda}}$ 与 $\eta_\lambda\sim1$，且仅对TE波存在

$$\beta_\lambda=\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{1}{\sigma\delta_\lambda}\left(\frac{C}{2A}\right)\left[\frac{(\omega/\omega_\lambda)}{1-\omega_\lambda^2/\omega^2}\right]^{1/2}\left[\xi_\lambda+\eta_\lambda\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2\right]$$，已包含所有频率依赖.

在截面形状给定时，可以简单求出 ξ_λ 与 η_λ 的值，例如对矩形波导 TE_{m0} 波，$\xi_{m0}=\frac{a}{a+b}$，$\eta_{m0}=\frac{2b}{a+b}$

可以画出 $\beta_\lambda(\omega)$ 图像，对于TM模，$\eta_\lambda=0$，由此可见在 $\omega=\sqrt{3}\omega_\lambda$ 时取最小（与形状无关）

对于TE模，$\eta_\lambda\neq0$，由此最小位置与形状相关

Tip: $\omega\to\infty$ 时，$\beta_\lambda\sim\sqrt{\omega}$，在微波（波长~厘米级）时，Cu的 $\beta_\lambda\sim10^{-4}\omega_\lambda/c$，即过200~400m 会减为 $\frac{1}{e}$

$\omega\to\omega_\lambda$ 时，$\beta_\lambda\to\infty$，这是由于近似不再成立，α_λ 也起效果.

§6. 边界条件微扰法

用法②无法处理 $\omega\sim\omega_\lambda$ 的情形，且无法得出 α_λ. 以下用边界条件微扰法，原则上可任意精确