§1. 1900前情况. 爱因斯坦两条假设.

电磁波的波动方程与力学波形式一致，在伽利略变换下改变.

声波在伽利略变换下也改变，综合后波方程不变. 因此声波有一个优越参考系，在其中波方程为 $(\partial_t^2-v^2\nabla^2)\psi=0$

(介质静止系) 在其中声波速为 v.

在假设电磁理论正确性前提下，若伽利略变换成立，那么电磁波也有一个优越参考系，

电磁理论仅在其中成立，且光速为 c

而迈克尔逊实验测不出光程差，亦即

$$\frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}-\left(\frac{l}{c+v}+\frac{l}{c-v}\right)=0.$$ 矛盾.

Lorentz 提出 相对以太运动的物体在运动方向上收缩

$$\Rightarrow \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}-l\sqrt{1-v^2/c^2}\left(\frac{1}{c+v}+\frac{1}{c-v}\right)=0$$ 成立.

而斐索实验测定流体中的光速，需要用部分拖曳以太来解释

但以太应与物质相互作用非常弱

因此爱因斯坦提出两条假设.

1. 相对性假设：一个惯性参考系中的自然规律与一切实验结果与系统平动无关.
2. 光速不变：真空中光速在不同参考系下相同. 亦即电磁波速与源运动无关.

§2. 一些近代的实验

(α). 穆斯堡尔效应测以太漂移.

根据相对性原理，相位是不变量. 因为 $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$ 与经过的波峰数相联系.

在取零点重合时有 $\omega[t-\hat{n}\cdot\frac{\vec{r}}{c}]=\omega'[t'-\hat{n}'\cdot\frac{\vec{r}'}{c'}]$ (相位是不变量)

对于伽利略变换下有 $t=t'$, $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{v}t'$，代入上式，并令 t', $\vec{r}'$ 前系数为零

或者引入将 $\hat{n}$ 并入 $\vec{k}$, $\vec{k}=\frac{\omega}{c}\hat{n}$. 那么也有 $\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}=\omega't'-\vec{k}'\cdot\vec{r}'$

$\Rightarrow \omega'=\omega(1-\vec{k}\cdot\vec{v})$, $\vec{k}=\vec{k}'$ (意味着 $c'=(1-\vec{k}\cdot\vec{v})c$)

由此根据以太漂移，设实验室相对以太速度为 $\vec{v}_0$，物1相对实验室为 $\vec{v}_1$，物2为 $\vec{v}_2$

假设一个波在相对以太静止系中频率为 ω，并且认为实验室系中，光速使得方向 $\vec{m}$ 与 $\vec{k}$ 并不同向

近似到 $\frac{v_0}{c}$ 一阶有 $\vec{n}=(1-\frac{\vec{m}\cdot\vec{v}_0}{c})\vec{m}+\frac{\vec{v}_0}{c}$. (因为 $\vec{m}\perp(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$)

则有 $\omega_1=\omega(1-\vec{k}\cdot\vec{v}_1)$, $\omega_0=\omega(1-\vec{k}\cdot\vec{v}_0)$ $\Rightarrow \omega_1=\omega_0[1-\frac{\vec{v}_1}{c}\cdot(\vec{m}+\frac{\vec{v}_0}{c})]$ (一阶)

则会得 $\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0}=\frac{1}{c}(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\cdot(\vec{m}+\frac{\vec{v}_0}{c})$. 在物体1,2在一个转动圆直径两端时，$\vec{m}\perp(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$

因此有 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{c}\Delta\vec{v}\cdot\frac{\vec{v}_0}{c}$. 因此可测 $\vec{v}_0$ 在垂直转轴面内分量

并而利用穆斯堡尔的共振吸收则做好平衡，故得到，$\vec{v}$很小

(b) 运动介质的表述

与偏光原理相关，若考虑光介质影响，需在 $\ll$ 情况下的上则表述.

例如加大风速，用 γ 射线.

(c) 真空色散.

利用脉冲星，Δt 很小（脉冲持续时间）. 不同频率成分在走过 D（距离后仍不分散）

$\Delta c \times \frac{D}{c} \leq c\,\Delta t$ 得到 $\frac{\Delta c}{c} < 10^{-14}$ 在 能量 $\sim 1\,\mathrm{MeV}$ 中均成立.

§3. 狭义相对论与 Lorentz 变换基本运动学结果

(d) 相对论性多普勒效应.

相位也是 Lorentz 不变量，$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \omega' t' - \vec{k}'\cdot\vec{r}'$. 由于 $(ct, \vec{r})$ 是四矢量，显然有 $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ 也为四矢量

因此有 $\omega' = \gamma(\omega - \vec{v}\cdot\vec{k})$

根据 Boost 的矢量表达式
$$\begin{cases} (x^0)' = \gamma(x^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}) \\ \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}x^0 \end{cases}$$

对光波，$k = \omega/c$，则有 $\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta)$，注意，$\theta$ 是 $\vec{k}$ 与 $\vec{v}$ 夹角.

若用 θ' 表示，即 $\vec{k}'$ 与 $\vec{v}$ 夹角，$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}$ $\Rightarrow \omega' = \frac{\gamma(1-\beta^2)}{1+\beta\cos\theta'}\omega$

实际上即为一般的光的多普勒效应公式. 但注意，$\omega' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta'}\omega$. θ' 为 $\vec{k}'$ 与 $\vec{v}$ 夹角. 或 S'系中光传播方向与速度的

§4. 速度的加法；四速度

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{u})\vec{\beta} - \gamma\vec{v}}{\gamma(1-\vec{v}\cdot\vec{u}/c^2)}$$

或写成平行于 $\vec{v}$ 与垂直于 $\vec{v}$ 的 $u_\parallel$ 与 $\vec{u}_\perp$

$$\begin{cases} u_\parallel' = \frac{u_\parallel - v}{1 - \vec{v}\cdot\vec{u}/c^2} \\ \vec{u}_\perp' = \frac{\vec{u}_\perp}{\gamma(1-\vec{v}\cdot\vec{u}/c^2)} \end{cases}$$

可以看到，它并不符合 Lorentz 变换. 但利用

$\gamma_{u'} = \gamma_v\gamma_u(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2})$ 可以改写为

$$\begin{cases} \gamma_{u'}u_\parallel' = \gamma_v\gamma_u(u_\parallel - v) = \gamma(\gamma_u u_\parallel - \beta c\gamma_u) \quad (\gamma_v \text{ 简化为 } \gamma) \\ \gamma_{u'}\vec{u}_\perp' = \gamma_u\vec{u}_\perp \\ \gamma_{u'}c = \gamma_v(\gamma_u c - \beta\gamma_u u_\parallel) = \gamma(\gamma_u c - \beta\gamma_u u_\parallel) \end{cases}$$

可以看到，$(\gamma_u c, \gamma_u\vec{u})$ 如同一个四矢量变换. 引入 $(\gamma_u c, \gamma_u\vec{u})$ 称为四速度矢量. U^μ

Extra: 通过原时引入四速度 $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. 可以看到，$d\tau = \frac{dt}{\gamma_u}$ 因此有

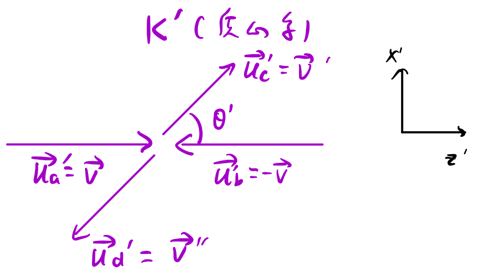
$U^\mu = (\gamma_u c, \gamma_u\vec{u})$. 从 $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ 也可以清晰看出其四矢量性.

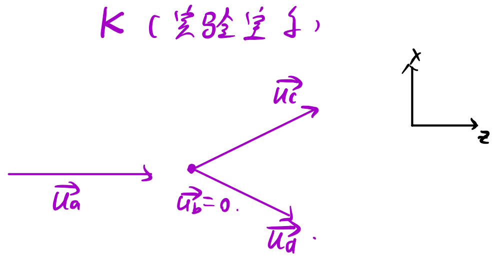
§5. 粒子的相对论动量和能量

(a) 利用速度的 Lorentz 变换，能动量守恒推导四动量.

假设 $\vec{p} = M(u)\vec{u}$, $E = \mathcal{E}(u)$, 且有 $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial (u^2)} = \frac{m}{2}$, $M(0) = m$

由于在非S-R下退化为正常情况. 并且引张利, $\vec{p}$ 作为矢量与 $\vec{u}$ 成正比, 标量与其长度 u 相关





$$\begin{cases} M(v)\vec{v} - M(v)\vec{v} = 0 = M(v')\vec{v}' + M(v'')\vec{v}'' \\ 2\mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(v') + \mathcal{E}(v''). \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(u_a)\vec{u}_a = M(u_c)\vec{u}_c + M(u_d)\vec{u}_d \\ \mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d) \end{cases}$$

根据对称性有 $v' = v''$. 因此有 $\mathcal{E}(v') = \mathcal{E}(v'') = \mathcal{E}(v)$

$M(v') = M(v'') = M(v)$, $\vec{v}' = -\vec{v}''$

并且有 K' 相对 K 以 $\vec{v}$ 运动, 因此有

$$\vec{u}_a = \frac{2\vec{\beta}c}{1+\beta^2} \quad \begin{cases} (u_c)_{\parallel} = \frac{c\beta(1+\cos\theta')}{1+\beta^2\cos\theta'} = (u_c)_z \\ (u_c)_{\perp} = \frac{c\beta\sin\theta'}{\gamma(1+\beta^2\cos\theta')} = (u_c)_x \end{cases} \quad \begin{cases} (u_d)_{\parallel} = \frac{c\beta(1-\cos\theta')}{1-\beta^2\cos\theta'} = (u_d)_z \\ (u_d)_{\perp} = \frac{-c\beta\sin\theta'}{\gamma(1-\beta^2\cos\theta')} = (u_d)_x \end{cases}$$

由此代入动量守恒的 x 方向得到 $\quad M(u_c) = \frac{1+\beta^2\cos\theta'}{1-\beta^2\cos\theta'} M(u_d)$.

该方程对 $\forall\,\theta'$ 成立, 令 $\theta' \to 0$. 则有 $u_c \to \frac{2\beta c}{1+\beta^2} = u_a$, $u_d \to 0$, $\cos\theta' \to 1$

则有 $M(u_a) = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \times m = \frac{1}{\sqrt{1-u_a^2/c^2}} m = \gamma_a m$. 由此 $\vec{p} = \gamma_u m\vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

对于 $\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(u_d) + \mathcal{E}(u_c)$. 将 u_c, u_d 均展为 θ' 的级数. 保留 θ'^2 项, 得 $u_c^2 = u_a^2 - \frac{1}{\gamma_a^3}\eta$, $u_d^2 = \eta$, $\eta = c^2\beta^2\theta'^2/(1-\beta^2)$

再根据两侧关于 θ' 的展开 $\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(u_a) + \eta\left(\frac{d\mathcal{E}(u_c)}{d(u_c)^2}\frac{\partial u_c^2}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} + \cdots + \mathcal{E}(0) + \eta\left(\frac{d\mathcal{E}(u_d)}{d(u_d^2)}\frac{\partial u_d^2}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}$

代入并令一次项系数为零 $\Rightarrow \left.\frac{d\mathcal{E}(u)}{d(u^2)}\right|_{u_a}\left(-\frac{1}{\gamma_a^3}\right) + \left.\frac{d\mathcal{E}(u)}{d(u^2)}\right|_0 = 0$. 代入 $\left.\frac{d\mathcal{E}(u)}{d(u^2)}\right|_0 = \frac{m}{2}$

再积分得 $\mathcal{E}(u) = \frac{mc^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} + [\mathcal{E}(0) - mc^2]$. 由此 $E = \gamma_u mc^2 + \mathcal{E}(0) - mc^2$.

Extra: $\mathcal{E}(0)$ 无法通过弹性碰撞给出, 但不影响动力学

可以通过实验测定非弹性过程. 例如静止粒子衰变过程等.

(b) 通过构建能量动量四矢量.

若引入一个量 $p^\mu = mU^\mu$ 引张利 $p^\mu = (\gamma_u mc, m\gamma_u\vec{u})$. $p^0 c$ 与 E 仅差 $\mathcal{E}(0) - mc^2$

若假设能量动量构成了四矢量, 那么也有 $\mathcal{E}(0) = mc^2$, 否则 E 中会出现与初末粒子数相关的量

而这失得任何标量, 不符合 Lorentz 变换. 因此有 若要让 $(E/c, \vec{p})$ 构成四矢量. $\mathcal{E}(0) = mc^2$

那么有 $\vec{u} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$. 再根据 $U^\mu U_\mu = c^2 \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$ or $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (等价于 $p^\mu p_\mu = m^2c^2$)

Extra: 快度 ς. $\beta = \tanh\varsigma$, $\gamma = \cosh\varsigma$, $\beta\gamma = \sinh\varsigma$.

$$\begin{cases} (x^0)' = \cosh\varsigma\, x^0 - \sinh\varsigma\, x_{\parallel} \\ (x_{\parallel})' = \cosh\varsigma\, x_{\parallel} - \sinh\varsigma\, x^0 \\ (\vec{x}_{\perp})' = \vec{x}_{\perp} \end{cases}$$

对于纯动量问题，一般也选 $\vec{p}_\perp$ 与 ς 作为变量，在 ς 变换至 K' 系中 $\vec{p}$ 仅有 $\vec{p}_\perp$ 分量.

$\vec{p}\,' = \vec{p}_\perp$，$E'/c = \Omega = \sqrt{p_\perp^2 + m^2c^2}$，在 K 系中，$p_\parallel = \gamma(p_\parallel' + \beta E'/c) = \beta\gamma E'/c = \Omega \sinh\varsigma$，$E/c = \gamma(E'/c + \beta p_\parallel') = \gamma E'/c = \Omega\cosh\varsigma$

沿 z 方向的 Lorentz 变换仅为 $\varsigma'' = \varsigma - Z$，加减一个常数. 因此在以 $\vec{p}_\perp$ 与 ς 为变量时

实验室系与质心系中的不同仅为 ς 的零点不同

§6. 狭义相对论时空的数学性质

Lorentz 群（齐次）：保四维闵氏时空内积的（或保度规）所有线性变换构成的群.

Extra：Lem：一个保实有限维线性空间上非退化双线性型的满射是线性映射.

指 $\langle u, v\rangle = 0$ 若对 $\forall u$ 成立则 $v=0$.

即若有有限维实线性空间 V，以及其上非退化双线性型 $\langle\ ,\ \rangle: V\times V \to \mathbb{R}$. 以及 $f: V\to V$ 为满射

且有 $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$，则有 $\langle f(w), f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v)\rangle = \langle w, \lambda u + \mu v\rangle - \langle w, \lambda u\rangle - \langle w, \mu v\rangle = 0$

又因为是满射，对 $\forall w$ 成立则对 $\forall x \in V$，$\langle x, f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v)\rangle = 0$. 又因为非退化，则有 $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

在此内积为非退化双线性型，四维闵氏时空是实有限维线性空间. 因此有 Lorentz 变换作为双射是线性的

庞加莱群（非齐次 Lorentz 群）：保矢量差的模不变的所有线性变换构成群

（庞加莱群是 Lorentz 群与时空平移群组合）

Tip：实际闵氏时空是以闵氏向量空间为仿射空间. 庞加莱群是其上的保距同构群

而不确定原点后，就是 Lorentz 群.

实际上，保内积要求 $\Lambda^T G \Lambda = G$（G 为度规张量矩阵），共有 16 个方程，但由于对称性仅有 10 个独立方程.

因此 Λ 共有六个独立变量. 可选为三个空间转动与相对速度的三个分量.

Lorentz 群可以按其变换对应矩阵行列式与 00 分量来分类（由 $\Lambda^T G\Lambda = G \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$，取 00 分量 $\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 - [(\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2] = 1 \Rightarrow |\Lambda^0{}_0| \geq 1$）

(i) $\det(\Lambda) = 1$　$\Lambda^0{}_0 \geq 1$，称为正常正时 Lorentz 变换

例如 正常 空间转动，Boost

(ii) $\det(\Lambda) = -1$，$\Lambda^0{}_0 \geq 1$，称为反常正时 ‥

例如 反常空间转动，空间反演之类

(iii) $\det(\Lambda) = 1$，$\Lambda^0{}_0 \leq -1$，称为正常反时.（但一般正常仅指 $\det\Lambda = 1$，$\Lambda^0{}_0 \geq 1$）

(iv) $\det(\Lambda) = -1$，$\Lambda^0{}_0 \leq -1$　称为反常反时.

例如 时间反演.

引入协变矢量与逆变矢量. 根据 $(x')^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$ 与 $x^\alpha = \Lambda_\beta{}^\alpha (x')^\beta$ 定义.

（综合 $x' = \Lambda x$，$x = G\Lambda G x'$ or $x^\alpha = g_{\gamma\beta} g^{\sigma\alpha} \Lambda^\gamma{}_\sigma (x')^\beta = \Lambda_\beta{}^\alpha (x')^\beta$）

逆变矢量的协变分量，$(A')^\alpha = \dfrac{\partial (x')^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta A^\beta$.

协变矢量的逆变分量，$(A')_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial (x')^\alpha} A_\beta = \Lambda_\alpha{}^\beta A_\beta = \frac{\partial (x')_\alpha}{\partial x_\beta} A_\beta$

§7. Lorentz 变换的矩阵表示；无穷小生成元

根据 Λ 有6个独立分量，引入 $\Lambda = e^L$.

那么 $\det\Lambda = \det(e^L) = e^{\mathrm{Tr}L} = \pm 1$. 因此有若 $\det(\Lambda)=1$，那么可取L为无迹矩阵，$\mathrm{Tr}L=0$

再有 $\Lambda^T G \Lambda = G \Rightarrow e^{L^T} G e^L = G \Rightarrow G e^L G = e^{-L^T}$，$e^{GLG} = e^{-L^T}$，$GLG=-L^T$ or $GL+(GL)^T=0$ 即L反对称

那么6个分量也可归为4×4矩阵L的6个分量里.

引入生成元 $\vec S, \vec K$.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$ (角动量对易)

$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$ ($\vec K$ 为矢量)

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&&&\\0&&O&\\0&&& \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&&&\\1&&O&\\0&&& \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&&&\\0&&O&\\1&&& \end{pmatrix}$$

$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k$. (Boost 不对易)

$L = -\vec\omega\cdot\vec S - \vec\zeta\cdot\vec K$，$\vec\omega$ 方向为空间转轴，大小为角度；$\vec\zeta = \hat\beta \tanh^{-1}\beta$.

$\Lambda = e^L = e^{-\vec\omega\cdot\vec S - \vec\zeta\cdot\vec K}$

Ex：若 $\vec\omega = 0$，仅考虑一个 Boost $\vec\beta$，那么有 $\Lambda = e^{-\hat\beta\cdot\vec K \tanh^{-1}\beta}$

$$\Lambda(\vec\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

§8. 托马斯进动

$\Lambda_1\Lambda_2 \neq \Lambda_2\Lambda_1$. 这是由于对应的 L_1, L_2 互相并不对易，也即若 Λ_1, Λ_2 均为 Boost，则为 $\vec K$ 诸分量并不对易.

在精细结构中的自旋轨道耦合项中，电子的磁矩要乘为 $\underbrace{\text{两倍}}_{\text{通过 Zeeman 效应确定的 g 因子}}$ (减一半才能给出与实验符合的结果).

通过 Dirac 方程可以正确导出这些项. 但经典发展上可以通过托马斯进动说明非惯性系(电子静止系)中电子磁矩变化.

由于电子所在的坐标系实际上是随动坐标系，它是非惯性系. 但也可以分解为

一系列速度在变化的共动惯性系，可以研究这样的两个相距无穷小 $d\vec\beta$ 系间的变换

§9. 电荷的不变性；电动力学的协变性

Maxwell 方程 Lorentz 不变（协变）

亦即各量如 $\vec{j}$, ρ, $\vec{E}$, $\vec{B}$ 均在 Lorentz 变换下有确定变换特性.

根据相对论中的 Lorentz 力方程：$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})$.

若用四速度 U^μ 与四动量 p^μ 分量改写，有 $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma_u q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}) = \frac{q}{c}[\vec{E}U^0+\vec{U}\times(c\vec{B})]$

左侧仅为空间部分，补上 $\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{\gamma_u}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma_u}{c}(q\vec{E}\cdot\vec{u}) = \frac{q}{c}\vec{E}\cdot\vec{U}$

如果力方程与能量变化方程协变，那么有 $\left(\frac{q}{c}\vec{E}\cdot\vec{U},\ \frac{q}{c}(\vec{E}U^0+\vec{U}\times(c\vec{B}))\right)$ 构成一个四矢量

若已知 q, $\vec{U}$, $(\vec{E},\vec{B})$ 的其中二个变换性质可以推出第三个

电荷是 Lorentz 不变量（在电子高速运动时物质仍保持中性，例如加热钢块不带电）

$\vec{U}$ 的变换规律已知，因此可以推出 $\vec{E}$, $\vec{B}$ 的变换性质. 但这样较为复杂 因此直接从 Maxwell 方程入手

根据连续性方程. $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0$. 可以看到，令 $(\rho c,\vec{j}) = j^\mu$. $\partial_\mu j^\mu=0$. 若有 j^μ 为四矢量，那么连续性方程协变

Tip. 根据电荷 Lorentz 不变，可得 ρ 不再为四矢量零分量

$$d^4x' = \left|\frac{\partial(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}\right|d^4x = |\det\Lambda|\,d^4x = d^4x$$ 因此 d^4x 为 Lorentz 不变量

$\rho' d^3x' = \rho\, d^3x \Rightarrow \rho = \lambda(dx^0)$, λ 为 Lorentz 不变量.

再根据势在 Lorentz 规范下满足的方程,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{A}=0\ ,\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{j}\ ,\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

可以看到 Lorentz 规范可写为 $\partial_\mu A^\mu=0$. $A^\mu=\left(\frac{\phi}{c},\vec{A}\right)$

在 A^μ 定义下，波方程可统一写为 $(\partial_\nu\partial^\nu)A^\mu=\mu_0 j^\mu$. or $\Box^2 A^\mu=\mu_0 j^\mu$

若要求 Lorentz 规范与波方程协变，那么有 A^μ 构成一个四维矢量

根据 $\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 引入 $F^{\alpha\beta}=\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha$. 可以看到 $F^{\alpha\beta}$ 反对称.

并且有 $$F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c}\\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y\\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x\\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}$$ 因此有 $F^{\alpha\beta}$ 构成了一个 Lorentz 协变二阶张量

根据定义. $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 与 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 可改写为 $\Delta^{ikl}=0$, 其中 $\Delta^{ikl}=\partial^i F^{kl}+\partial^k F^{li}+\partial^l F^{ik}$.

易见 Δ^{ikl} 全反对称，且轮换对称，因此仅有 $C_4^3=4$ 个独立分量，恰对应上四个.

也可写作 $\epsilon_{\alpha ikl}\Delta^{ikl}=0$. $\epsilon_{\alpha ikl}\Delta^{ikl}=\epsilon_{\alpha ikl}\partial^i F^{kl}+\epsilon_{\alpha ikl}\partial^k F^{li}+\epsilon_{\alpha ikl}\partial^l F^{ik}=3\epsilon_{\alpha ikl}\partial^i F^{kl}$

引入 $\mathcal{F}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta lm}F_{lm}$ 为场强张量对偶张量，那么第一对方程 $\Leftrightarrow \partial_\alpha\mathcal{F}^{\alpha\beta}=0$.

再根据定义与 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0$, $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

得到 $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=\mu_0 j^\beta$ 为第二组 Maxwell 方程 由上，有电动力学方程本身具有协变性.

同理 $\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{d\tau} = \dfrac{q}{c}\left(\vec{E}U^0 + \vec{U}\times(c\vec{B})\right) \\ \dfrac{dp^0}{d\tau} = \dfrac{q}{c}\vec{E}\cdot\vec{U} \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{dp^\alpha}{d\tau} = m\dfrac{dU^\alpha}{d\tau} = qF^{\alpha\beta}U_\beta$. 为一个四维协变方程

Extra: 对于线性介质均匀情形 $(\vec{D}c, \vec{H})$, $(\vec{P}c, -\vec{M})$ 也构成变化的二阶张量. 记 $G^{\mu\nu}$ 为替换 $\vec{E}/c \to \vec{D}c$, $\vec{B}\to\vec{H}$

$j_f^\mu = (\rho_f c, \vec{J}_f)$. 则有 $\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = j_f^\beta$, $\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$.

选合适的 $\vec{\beta}$, 可将其转换为媒质静止系中原子性质的本构关系

§10. 电磁场的变换.

根据 $(F')^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\sigma F^{\gamma\sigma}$ 得到

$$\vec{E}'/c = \gamma(\vec{E}/c + \vec{\beta}\times\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}/c)$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}/c) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$