Chapter XIV. 运动电荷的辐射

§1. 一个点电荷的李纳-维谢尔势和场

Extra XII §11. 协变形式波动方程解；不变格林函数.

$$\begin{cases}\partial_\nu F^{\nu\mu}=\mu_0 J^\mu \\ \partial_\nu G^{\nu\mu}=0\end{cases}$$ 为 Maxwell 方程组. 实际上只需用到含源部分

代入 $F^{\nu\mu}=\partial^\nu A^\mu-\partial^\mu A^\nu \Rightarrow (\partial_\nu\partial^\nu)A^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=\mu_0 J^\mu$.

若利用 Lorenz 规范. $\partial_\nu A^\nu=0$. 则有用势表示的四维波动方程

$(\partial_\nu\partial^\nu)A^\mu=\mu_0 J^\mu$. $A^\mu=(\frac{\phi}{c},\vec{A})$, $J^\mu=(\rho c,\vec{j})$

若定义达朗贝尔算符. $\Box=\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla^2$，那么有 $\Box A^\mu=\mu_0 J^\mu$.

下求解该波动方程在无界空间中对应的 Green Function.

$$\Box_x G(x^\mu,x'^\mu)=\delta^4(x^\mu-x'^\mu)=\delta(ct-ct')\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

根据对称性，在无边界时，G 仅仅依赖于 $x^\mu-x'^\mu=z^\mu$ 因此可以写为

$\Box_z G(z^\mu)=\delta^4(z^\mu)$. (求解四维 Green Function，在 Chapter VI 中实际上已求过三维的解了)

利用 Fourier 变换，对四个变量一起用作.

$$G(k^\mu)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int d^4z\, G(z^\mu)\,e^{-ik_\nu z^\nu},\quad G(z^\mu)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int d^4k\, G(k^\mu)\,e^{ik_\nu z^\nu}$$

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int d^4z\,\delta^4(z^\mu)\,e^{-ik_\nu z^\nu}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4},\quad \delta^4(z^\mu)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\; e^{ik_\nu z^\nu}$$

变换方程，并利用 $\Box_z(e^{ik_\nu z^\nu})=-k_\nu k^\nu e^{ik_\nu z^\nu}$

$\Rightarrow G(k^\mu)=-\frac{1}{4\pi^2 k_\nu k^\nu}$ (or 简记 $k_\nu k^\nu=k\cdot k$)，$G(k^\mu)=-\frac{1}{4\pi^2 k\cdot k}$

对其进行 Fourier 逆变换得到 $G(z^\mu)$

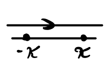
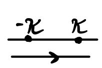
$$G(z^\mu)=\frac{1}{-(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik\cdot z}}{k\cdot k}$$

事实上，上式与奇点围道选取相关. 选取一类围道会得到推迟 Green 函数

先对 k^0 积分，并定义 $\kappa=|\vec{k}|$，那么有

$$G(z^\mu)=\frac{1}{-(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{z}}\int_{-\infty}^{+\infty}dk^0\,\frac{e^{ik^0z^0}}{(k^0)^2-\kappa^2}.$$

一般积分都是直接积，但这样无法求得定义的两个奇点无关解. 它们依赖于围道选取.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dk^0\,\frac{e^{ik^0z^0}}{(k^0)^2-\kappa^2}=\begin{cases}\text{上围道}\quad \theta(-z^0)\left(-\frac{2\pi}{\kappa}\sin\kappa z^0\right)\quad (\text{超前})_a\\ \text{下围道}\quad \theta(z^0)\left(\frac{2\pi}{\kappa}\sin\kappa z^0\right)\quad (\text{推迟})_r\end{cases}$$

$G_r(z^\mu)=\frac{1}{-(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{z}}\,\theta(z^0)\,\frac{2\pi}{k}\sin kz^0$. (这里恢复 $k=|\vec{k}|$)

利用球坐标积分 $\int_0^\pi \sin\theta\, e^{-ik\cos\theta z}\times 2\pi\, d\theta=4\pi\frac{\sin kz}{kz}$.

$$\Rightarrow G_r(z^\mu)=\frac{\theta(z^0)}{-2\pi^2}\frac{1}{z}\int_0^\infty \sin kz\,\sin kz^0\,dk=-\frac{\theta(z^0)}{8\pi^2}\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(z+z^0)}-e^{ik(z-z^0)}\,dk.$$

$$\Rightarrow G_r(z^\mu)=\frac{\theta(z^0)}{4\pi z}\left[\delta(z-z^0)-\delta(z+z^0)\right]=\frac{\theta(z^0)}{4\pi z}\delta(z-z^0)$$ （$z>0$, $z^0>0$ 时才为?）

or $G_r(x^\mu-x'^\mu)=\dfrac{\theta(x^0-x'^0)}{4\pi R}\delta(x^0-x'^0-R)$. 同理. $G_a(x^\mu-x'^\mu)=\dfrac{\theta(x'^0-x^0)}{4\pi R}\delta(x^0-x'^0+R)$

实际上可以将 $\delta(z-z^0)-\delta(z+z^0)$ 写作 $2z\,\delta(z^2-z^{02})$，那就有

$$G_r(x^\mu-x'^\mu)=\frac{\theta(x^0-x'^0)}{2\pi}\delta\left((x-x')\cdot(x-x')\right),\quad G_a(x^\mu-x'^\mu)=\frac{\theta(x'^0-x^0)}{2\pi}\delta\left((x-x')\cdot(x-x')\right)$$

它是Lorentz协变的，因为在 $(x-x')_\mu(x-x')^\mu=0$ 的光锥条件下，$x^0-x'^0$ 的符号由因果性限制。

也是Lorentz不变的。

最后得到，在考虑初始条件下，$A^\mu(x^\mu)$ 有唯一解。

不仅空间区域，时间也区域

1° $x^0\to-\infty$ $A^\mu(x^\mu)=A^\mu_{in}(x^\mu)$ 则有 $A^\nu(x^\mu)=A^\nu_{in}(x^\mu)+\mu_0\int d^4x'\,G_r(x^\mu-x'^\mu)\,J^\nu(x'^\mu)$

2° $x^0\to+\infty$ $A^\mu(x^\mu)=A^\mu_{out}(x^\mu)$ 则有 $A^\nu(x^\mu)=A^\nu_{out}(x^\mu)+\mu_0\int d^4x'\,G_a(x^\mu,x'^\mu)\,J^\nu(x'^\mu)$.

引入辐射场，定义为 in场 − out场.

$$A^\nu_{rad}(x^\mu)=A^\nu_{in}(x^\mu)-A^\nu_{out}(x^\mu)=\mu_0\int d^4x'\,G(x^\mu,x'^\mu)\,J^\nu(x'^\mu),\quad G(x^\mu,x'^\mu)=G_r-G_a.$$

对于点电荷. $J^\nu(x^\mu)=(\rho c,\vec J)=\left(ec\,\delta(\vec x-\vec r(t)),\ e\vec u\,\delta(\vec x-\vec r(t))\right)$

若引入固有时τ，并将 $\vec r(t)$ 写为参数形式 $\vec r(\tau)$. 再利用 $U^\mu=(\gamma_u c,\gamma_u\vec u)$

$$J^\nu(x^\mu)=ce\int d\tau\,U^\nu(\tau)\,\delta^4[x^\mu-r^\mu(\tau)]$$ $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^2(x)\,dx=\delta(0)\right)$

回到 §1. （用四维Green函数配合四维电流密度矢量）

在 $A_{in}=0$ 时有 $A^\nu(x^\mu)=\mu_0\int d^4x'\,G_r(x^\mu-x'^\mu)\,J^\nu(x'^\mu)$，对于单粒子

代入 $J^\nu(x^\mu)=ce\int d\tau\,U^\nu(\tau)\,\delta^4[x^\mu-r^\mu(\tau)]$ 与 $G_r(x^\mu-x'^\mu)=\dfrac{\theta(x^0-x'^0)}{2\pi}\delta((x-x')^2)$

$$\Rightarrow A^\nu(x^\mu)=\frac{c\mu_0 e}{2\pi}\int d\tau\,\theta(x^0-r^0(\tau))\,\delta((x-r(\tau))^2)\,U^\nu(\tau)$$

对每个x，有且仅有一个推迟 $r(\tau_0)$ 与之对应.

由此给出光锥条件. $(x-r(\tau_0))^2=0$ or $c(t-t_r(\tau_0))=|\vec x-\vec r(\tau_0)|$ or $c(t-t^*)=|\vec x-\vec r^*|$

利用 $\delta((x-r(\tau))^2)=\dfrac{\delta(\tau-\tau_0)}{\left|\frac{d}{d\tau}((x-r(\tau))^2)\right|}$，其中 $\dfrac{d}{d\tau}\left[(x-r(\tau))^2\right]=-2(x-r(\tau))^\mu U_\mu(\tau)$ （后面可以进行化简）

$$\Rightarrow A^\nu(x^\mu)=\frac{\mu_0 e}{4\pi}\left.\frac{cU^\nu(\tau)}{(x-r(\tau))_\mu U^\mu(\tau)}\right|_{\tau=\tau_0}=\frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{cU^\nu(\tau^*)}{(x-r(t^*))_\mu U^\mu(t^*)}$$ (Liénard-Wiechert Potential)

写成非协变形式有（引入 $\vec R^*=\vec x-\vec r^*$）.

$$\phi(t,\vec x)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^*(1-\vec\beta^*\cdot\hat R^*)},\quad \vec A(t,\vec x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ec\vec\beta^*}{R^*(1-\vec\beta^*\cdot\hat R^*)}$$

Tip: 实际上也可以通过 $\phi(t,\vec x)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{e\,\delta(\vec x'-\vec r(t^*))}{|\vec x-\vec x'|}d^3x'$，$c(t-t^*)=|\vec x'-\vec r(t^*)|$ 来求（三维）.

§2. 场

接下来计算各种势对应的场. 同样有两种推导，一种三维，一种四维.

α. 四维推导

我们从势的最后表达式推导，但是要从积分式开始，因为 δ 与 ∇ 作用在积分上较明了

$$A^{\nu}(x^{\mu})=\frac{\mu_0 c e}{2\pi}\int d\tau\ \alpha\ x^0-r^0(\tau)\ \delta((x-r(\tau))^2)\quad \cdots$$

β. 三维推导.

最后有
$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)=\dfrac{e}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^3}\left\{\dfrac{\hat{R}^*-\vec{\beta}^*}{\gamma^{*2}R^{*2}}+\dfrac{1}{cR^*}\hat{R}^*\times[(\hat{R}^*-\vec{\beta}^*)\times\dot{\vec{\beta}}^*]\right\}\\ \vec{B}(\vec{r},t)=\dfrac{\hat{R}^*}{c}\times\vec{E}(\vec{r},t)\end{cases}$$

并有 $\vec{\beta}^*=\frac{1}{c}\left.\frac{d\vec{r}_e(t)}{dt}\right|_{t^*}$, $\vec{R}^*=\vec{r}-\vec{r}_e(t^*)$, $\dot{\vec{\beta}}^*=\frac{1}{c}\left.\frac{d^2\vec{r}_e(t)}{dt^2}\right|_{t^*}$, $c(t-t^*)=|\vec{r}-\vec{r}_e(t^*)|$ (存在解)

由于求场及 $\frac{\partial}{\partial t}$, ∇ 等算符, 而以上的物理量中包含

$t^*(\vec{r},t)$, $\vec{r}_e(t^*)=\vec{r}_e(t^*(\vec{r},t))$, $\left.\frac{d\vec{r}_e}{dt}\right|_{t^*}$ 等量.

$$\frac{\partial t^*}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(t-\tfrac{1}{c}R^*)=1-\frac{1}{c}\frac{\partial R^*}{\partial t}=1-\frac{1}{c}\frac{\partial R^*}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}=1-\frac{1}{c}\nabla_{\vec{r}^*}R^*\cdot\vec{v}^*\frac{\partial t^*}{\partial t}=1+\hat{R}^*\cdot\vec{\beta}^*\frac{\partial t^*}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial t^*}{\partial t}=\frac{1}{1-\hat{R}^*\cdot\vec{\beta}^*}=\lambda$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial t}=c(1-\frac{\partial t^*}{\partial t})=-\frac{c\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*}{1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*}=-c\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*\lambda\ ,\quad \frac{\partial\vec{\beta}^*}{\partial t}=\dot{\vec{\beta}}^*\times\lambda\ ,\quad\frac{\partial\hat{R}^*}{\partial t}=\frac{\partial(\vec{R}^*/R^*)}{\partial t}=-\frac{c\vec{\beta}^*}{R^*}\lambda$$

$$\nabla t^*=\nabla(t-\tfrac{1}{c}R^*)=-\tfrac{1}{c}\nabla R^*=-\tfrac{1}{c}\frac{\partial R^*}{\partial t^*}\nabla t^*-\tfrac{1}{c}\hat{R}^*\Rightarrow\nabla t^*=-\frac{\hat{R}^*}{c}\lambda$$

$\nabla R^*=\hat{R}^*\lambda$, ∇ ……

§3、运动电荷的辐射

α. $\dot{\vec{a}}^*=0$.

此时无辐射场, $\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^3}\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}^*-\vec{\beta}^*}{\gamma^{*2}R^{*2}}$ 并从 $\vec{\beta}^*=\vec{\beta}$, $\gamma^*=\gamma$, 以 $\vec{\beta}$ 方向为 z 轴

$\Rightarrow\ \vec{E}(\vec{r},t)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma\vec{r}}{(r_\perp^2+\gamma^2r_\parallel^2)^{3/2}}$, 是t在 电荷 t时刻 到达位置.

在 $\vec{r}\to\infty$, 实际上 $\hat{R}^*$ 与 $\hat{r}$ 相差很小, 可以认为 $\vec{S}\perp\vec{E}$, $\vec{S}\cdot\hat{r}=0\Rightarrow\vec{S}\cdot\hat{R}^*=0$.

由此有匀速运动电荷并不发出辐射

Tip. 值得一提的是, 对于介质中, 只要电荷速度大于介质中光速就可产生切伦科夫辐射.

(i) $\beta\ll1$ 时, $\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\hat{r}$.

(ii) $\beta\gg1$ 时, $E(r,\theta=\frac{\pi}{2})=\gamma\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$, $E(r,\theta=0)=\frac{1}{\gamma^2}\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$

β. $\dot{\vec{a}}^*\neq0$.

同样分析上有, 自场对辐射功率贡献为零, 因此仅考虑辐射场

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^3}\frac{1}{cR^*}\hat{R}^*\times[(\hat{R}^*-\vec{\beta}^*)\times\dot{\vec{\beta}}^*]$$

辐射 $\frac{dP}{d\Omega}(t^*)$ 为电荷在 t^* 时辐射功率角分布, 这部分辐射在t时刻到了 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 处.

$S=c\epsilon_0|E|^2$ (由于 $\vec{E}$ 和 $\hat{R}^*$ 垂直) $\int dP(t^*)dt^*=\int d\Omega\,R^{*2}S\,dt\Rightarrow\frac{dP}{d\Omega}(t^*)=R^{*2}S\frac{dt}{dt^*}=R^{*2}S(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)$

or $\frac{dP}{d\Omega}(t^*)=(R^*)^2c\epsilon_0|E|^2(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)$ 为粒子在 t^* 时发出辐射功率的角分布.

① 非相对论粒子的辐射 ($\beta\ll1$)

此时在 $\vec{E}$ 中我们近似 $\vec{\beta}^*=0$ $\quad\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{cR^*}\hat{R}^*\times(\hat{R}^*\times\dot{\vec{\beta}}^*)$

若以 $\vec{\beta}^*$ 为 $\theta=0$ 的方向，那么有 辐射角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega}(t^*) = \frac{e^2\dot{\beta}^{*2}}{16\pi^2\epsilon_0 c}\sin^2\theta = \frac{e^2 a^{*2}}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta$$ ，对角度积分得 $P(t^*) = \dfrac{e^2 a^{*2}}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ (Larmor 公式)

再猜测出 P 的协变形式，使其在 $\vec{\beta}=0$ 时退化为 Larmor 公式.

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}\frac{dp^\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau}$$ 为协变形式. 进一步 $P(t) = \dfrac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\gamma^6[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2]$ (Liénard 公式)

②. 相对论性粒子的辐射. ($\beta^*\sim 1$ or $\gamma^*\gg 1$)

此时又可分为两个情况来计算. 即加速度与速度平行或垂直的两种情况.

(i) $\dot{\vec{\beta}}^* \parallel \vec{\beta}^*$

此时 $\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{e}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^3}\dfrac{1}{cR^*}\hat{R}^*\times(\hat{R}^*\times\dot{\vec{\beta}}^*)$

并以 $\vec{\beta}^*$ 也 $\theta=0$ 方向，$\hat{R}^*$ 方向为 (θ,ϕ) $\Rightarrow E(\vec{r},t) = \dfrac{e}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{cR^*}\dfrac{\dot{\beta}\sin\theta}{(1-\beta\cos\theta)^3}$

$$\frac{dP}{d\Omega}(t) = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\frac{\dot{\beta}^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{a^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

$\dfrac{d(\frac{dP}{d\Omega})}{d\theta} \propto \dfrac{\sin\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}[2\cos\theta(1-\beta\cos\theta) - 5\beta\sin^2\theta]$ 除了 0 与 π 处 明显的极小值

还有极值在 $\theta = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}\right)$ 在 $\beta\sim 1$ 时有 $\theta \simeq \sqrt{\dfrac{1-\beta}{2}} \simeq \dfrac{1}{2\gamma}$ (在一阶下)

积分后得到 $P(t) = \dfrac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dfrac{a^2}{(1-\beta^2)^3} = \gamma^6 P_{N.R.}$ (类似一道作业题，正由对角度积分得到)

也可验证 Linéard 公式. $P = \dfrac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\gamma^6[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2] = \gamma^6 P_{N.R.}\dfrac{1}{\dot{\beta}^2}[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2] = \gamma^6 P_{N.R}$ $(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}=0)$

(ii) $\dot{\vec{\beta}}^* \perp \vec{\beta}^*$.

此时 $\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^3}\dfrac{1}{cR^*}\hat{R}^*[(\hat{R}^*-\vec{\beta}^*)\times\dot{\vec{\beta}}^*]$ 同样以 $\vec{\beta}^*$ 为 z 轴, $\dot{\vec{\beta}}^*$ 为 x 轴

$\vec{E}(\vec{r},t) =$ 略去，$\dfrac{dP}{d\Omega}(t) = \dfrac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\dfrac{a^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left[1-\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\phi(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right]$. 对角度积分得 $P(t) = \gamma^4 P_{N.R.}$

$P = \gamma^6 P_{N.R}\dfrac{1}{\dot{\beta}^2}[\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2] = \gamma^6 P_{N.R.}[1-\beta^2] = \gamma^4 P_{N.R.}$

(iii). 任意方向

此时角分布很复杂，但总功率仍较简单.

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\gamma^6[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2] = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\gamma^6\dot{\beta}^2[1-\beta^2\sin^2\alpha] = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0}\gamma^6\dot{\beta}^2[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha(1-\beta^2)] = \gamma^4(P_{N.R.})_\perp + \gamma^6(P_{N.R.})_\parallel$$

$\left(\dfrac{P_\parallel}{P_\perp}\right) = \left(\dfrac{F_\parallel}{\gamma F_\perp}\right)^2$. 或者 给定相同力 时，$P_\perp$ 是 $P_\parallel$ 的 γ^6 倍.

利用 $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) \Rightarrow F_\parallel = \gamma^3 m a_\parallel$, $F_\perp = \gamma m a_\perp$ ，而 $P_\parallel \propto \gamma^6 a_\parallel^2$ ，$P_\perp \propto \gamma^4 a_\perp^2$ $\Rightarrow \dfrac{P_\parallel}{P_\perp} = \left(\dfrac{F_\parallel}{\gamma F_\perp}\right)^2$

§4. 带电粒子运动辐射的频谱

首先，要求出 $\frac{dP}{d\Omega}(t)$ 在时间上分布. 这里的 $\frac{dP}{d\Omega}$ 指 (θ,ϕ) 方向接收者单位时间内在单位立体角内接收能量.

与之前不同，我们时间即为 dt 因此 $\dfrac{dP(t)}{d\Omega} = S R^{*2} = \epsilon_0 c|E(\vec{r},t)|^2 R^{*2}$

代 $\dfrac{dP}{d\Omega}(t) = \dfrac{e}{16\pi^2\epsilon_0 c}\dfrac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^6}\left\{\hat{R}^*\times[(\hat{R}^*-\vec{\beta}^*)\times\dot{\vec{\beta}}^*]\right\}^2 = |\vec{\Xi}(t)|^2$ ，$\vec{\Xi}(t) := \sqrt{\epsilon_0 c}\,R^*\vec{E}(\vec{r},t)$

并引入 I 为 $t\in(-\infty,+\infty)$ 上的总辐射能量 ，$I = \int_{-\infty}^{+\infty}dt\int d\Omega\,\dfrac{dP}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty}dt\int d\Omega\,|\vec{\Xi}(t)|^2$ ，$\dfrac{d^2I}{d\Omega\,dt} = |\vec{\Xi}(t)|^2$

对 $\vec{X}(t)$ 作 Fourier 变换来获得频域上的 $\vec{X}(\omega)$

$$\vec{X}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{X}(t)\,e^{i\omega t}\,dt\ ,\quad \vec{X}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{X}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega.$$

并且根据 Pasavarl 等式，$\int_{-\infty}^{+\infty}|\vec{X}(\omega)|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}|\vec{X}(t)|\,dt.$

由此可改写 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int d\Omega\,|\vec{X}(\omega)|^2$，并由 $\vec{X}(t)\in\mathbb{R}$ 得 $\vec{X}(-\omega)=\vec{X}(\omega)^*$，$I=2\int_0^{+\infty}d\omega\int d\Omega\,|\vec{X}(\omega)|^2$

并记 $\frac{d^2I}{d\Omega d\omega}=2|\vec{X}(\omega)|^2$，意为总能量在 (θ,ϕ) 方向单位立体角内，ω 频率附近单位频率内的能量.

故下来计算 $\vec{X}(\omega)$，只需注意在 $\vec{X}(t)$ 中多是 t^* 处取值，因此可转变为对 t^* 积分

$$\vec{X}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{e}}{4\pi\sqrt{\epsilon_0 c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^3}\hat{R}^*\times[(\hat{R}^*-\vec{\beta}^*)\times\dot{\vec{\beta}}^*]\,e^{i\omega t}\,dt\ ,\ \text{代入}\ t=t^*+\frac{1}{c}R^*\ \text{与}\ dt=dt^*\times(1-\hat{R}^*\cdot\vec{\beta}^*)$$

$$=\sqrt{\frac{e}{2\pi\epsilon_0 c}}\times\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1-\vec{\beta}^*\cdot\hat{R}^*)^2}\hat{R}^*\times[(\hat{R}^*-\vec{\beta}^*)\times\dot{\vec{\beta}}^*]\,e^{i\omega(t^*+\frac{R^*}{c})}\,dt^*\quad(\text{并去掉所有}*\text{号})$$

考虑 $\vec{r}\gg\vec{r}^*$ 的零阶近似，此时 $R^*\simeq r-\vec{r}^*\cdot\hat{r}$ (一阶)，$\hat{r}\simeq\hat{R}^*$ (零阶)

相因子中取一阶近似而用在了，是之 $(\vec{r}^*\cdot\hat{r})\times\omega\ll r\omega$，但 $(\vec{r}^*\cdot\hat{r})\omega$ 仍可以带来 2π 的变化.

$$\Rightarrow\vec{X}(\omega)=\sqrt{\frac{e}{2\pi\epsilon_0 c}}\times\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{r})^2}\hat{r}\times[(\hat{r}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\,e^{i\omega(t+\frac{r}{c}-\frac{1}{c}\vec{r}_e(t)\cdot\hat{r})}\,dt\quad---*$$

$$=\sqrt{\frac{e}{2\pi\epsilon_0 c}}\frac{1}{4\pi}e^{i\omega r/c}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left[\frac{\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})}{1-\vec{\beta}\cdot\hat{r}}\right]e^{i\omega(t-\frac{1}{c}\vec{r}_e(t)\cdot\hat{r})}\,dt$$

$$=\frac{i\omega}{4\pi}\sqrt{\frac{e}{2\pi\epsilon_0 c}}\,e^{i\omega r/c}\int_{-\infty}^{+\infty}[\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})]\,e^{i\omega(t-\frac{1}{c}\vec{r}_e(t)\cdot\hat{r})}\,dt.$$
与 $\hat{r}$ 相关的由于 (θ,ϕ) 方向的 (分部积分 连良时间之域)

$$\frac{d^2I}{d\Omega d\omega}=2|\vec{X}(\omega)|^2=\frac{\omega^2 e}{16\pi^3\epsilon_0 c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})\,e^{i\omega(t-\frac{1}{c}\vec{r}_e(t)\cdot\hat{r})}\,dt\right|^2.$$ 为 $\hat{r}$ 方向，ω 频率附近的单位立体角单位频率内总能量

(可以看到，这里看不出 $*$ 中明是可以看到的 $\vec{\beta}$ 不为零的时间段为有限，但可以证明

在 $*$ 中加上或者减去 $\vec{\beta}=0$ 的时间段后，并且取(被积)内积乘上一个 $e^{-\epsilon|t|}$ 的积分在 $\epsilon\to0$ 时的极限

就可以与最后表达式一致，并不影响结果 ??

Extra. 考虑相对论粒子运动具有 T 的周期性时

此时可以将 $\vec{X}(t)$ 展为 Fourier 级数，$\vec{X}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{X}_n e^{-i\omega_n t}$，$\omega_n=\frac{2\pi n}{T}$，记 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

且根据 Pasavarl 等式 $\int_0^T|\vec{X}(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}T|\vec{X}_n|^2$

则在 $0\sim T$ 内的平均功率为 $\frac{dP}{d\Omega}=\frac{1}{T}\int_0^T|\vec{X}(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\vec{X}_n|^2=|\vec{X}_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|\vec{X}_n|^2$

由此可以定义在 ω_n 上的平均辐射功率 (单位立体角内) $\frac{dP_n}{d\Omega}=2|\vec{X}_n|^2-|\vec{X}_0|^2\delta_{n0}$ (实际 $|\vec{X}_0|^2=0$)

类似地根据 $\vec{X}_n=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{X}(t)\,e^{+i\omega_n t}\,dt$ 可得到

$$\frac{dP_n}{d\Omega}=2|\vec{X}_n|^2=\frac{n^2\omega_0^2e^2}{8\pi^2T^2\epsilon_0 c}\left|\int_0^T\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{\beta})\,e^{in\omega_0(t-\hat{r}\cdot\vec{r}_0(t)/c)}\,dt\right|^2$$

Extra：回旋辐射，同步辐射，切伦科夫辐射

回旋辐射为非相对论性辐射，同步辐射为相对论性辐射

同步 ① 与时间有关 ② 角分布带有明显方向性 ③ 半经典 → 连续光谱，且频率显著增大 $(\omega_c\sim\gamma^3\omega_0)$

(在 $\omega\to0$ 时 $P\propto\omega^{1/3}$ 增加，$\omega\sim\gamma^3\omega_0$ 时 $P\propto\omega^{3}e^{-\alpha\omega}$ 减小)

§5. 辐射阻尼力.

根据周期运动来推倒辐射阻尼力公式

首先根据非相对论性的 Larmor 公式, $P=\frac{e^2\dot{\beta}^2}{6\pi\epsilon_0 c}=\frac{e^2a^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}=m\tau a^2$. $\tau=\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon_0 mc^3}$ 且有时间量纲

实际上根据 Thomson 电子经典半径公式. $r_e=\frac{e^2}{4\pi m\epsilon_0 c^2}$, τ 是很约为光经过电子线度所需时间.

$\vec{F}_r\cdot\vec{v}\,dt=-Pdt=-m\tau a^2dt=-m\tau\vec{a}\cdot d\vec{v}=-m\tau\, d(\vec{a}\cdot\vec{v})+m\tau\,\vec{v}\cdot d\vec{a}$.

实际上考虑辐射由加速度带来, 因而在一个周期内, 若 $\vec{a}$ 变化很小 那么 $d(\vec{a}\cdot\vec{v})=0$.

这也是要求加速度在变化中的条件. 由此, $\vec{F}_r=m\tau\dot{\vec{a}}$ 是一种辐射阻尼力的表示

它满足能量守恒, 且在非相对论与周期近似下成立.

考虑阻尼力的运动方程称为 Abraham-Lorentz 方程: $m(\vec{a}-\tau\dot{\vec{a}})=\vec{F}$.

Ex. 带阻尼力的电子谐振动

主要近似: 在阻尼力很小时, 周期运动中阻尼力近似不改变运动的周期性, 所以可以将

$-m\tau\dot{\vec{a}}$ 写 $m\tau\omega_0^2\dot{\vec{x}}$ (略去, 近似三阶, 二阶均了)

由此写出运动方程 $m\ddot{x}=-m\omega_0^2x+m\tau\dddot{x}$, 在近似下有 $m\ddot{x}=-m\omega_0^2x-m\omega_0^2\tau\dot{x}$

化为了二阶的带阻尼的运动方程. 并假设 $\tau\ll1$. 那么有解 (略去较小中的二阶项)

$$x=e^{-\frac{1}{2}\gamma_R t}\left[Ae^{-i\omega_0 t}+Be^{i\omega_0 t}\right],\quad \gamma_R=\omega_0^2\tau.$$ 可以看到是一个振幅带衰减的运动

计算从 $t=0$ 开始运动的 $x(t)=\eta(t)\,e^{-\frac{1}{2}\gamma_R t}A_0e^{-i\omega_0 t}$ 的频谱

$$x(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{i\omega t}dt=-\frac{A_0 i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\omega-\omega_0)+\frac{i}{2}\gamma_R},\quad \frac{dI}{d\Omega d\omega}\propto|x(\omega)|^2\propto\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma_R^2/4}$$

其中 γ_R 称为谱线强度的半高宽.

倘若在 EOM 中加入原有阻尼力 $-\gamma_0 m\dot{x}$ 与驱动力 $eE_0e^{-i\omega t}$.

那么有稳定后的解为 $e^{-i\omega t}$ 的时间依赖, 解为 $x(t)=\frac{eE_0e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma(\omega)}$. $\gamma(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\gamma_R+\gamma_0$

当 ω 接近 ω_0 时, 那么近似为半高宽为 $\gamma_0+\gamma_R$.