第七章 电动力学.

§1 电动势

欧姆定律

Thm. 欧姆定律: $\vec{J}$ 为电流密度, σ 为电导率, $\vec{E}$ 为电场强度, 对于大多数物质有

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

Att. 驱动力使带电粒子运动, 对于大多数物质有 $\vec{J}=\sigma\vec{f}$ →单位电荷受力 (Def. 电阻率 ρ : $\rho:=\frac{1}{\sigma}$)

而产生电流的可以是任何力, 但若是电磁力时有 $\vec{f}=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$

而电荷速度通常很小, 且 $\vec{B}$ 与 $\vec{E}$ 差不多量级, 所以 $\vec{f}\approx\vec{E}$. 即 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

也有例外, 在等离子体中, $\vec{f}$ 里磁场贡献了很大

Thm. 宏观欧姆定律: 设有二电极, 它们电势差为 V, 电流为 I, 则有

$V=IR$, 比例系数 R 称为电阻, 由电极间介质决定 (形状与 σ)

Tip. 由于若将 Q 加倍, 则 V 加倍, 同样 E 加倍, J 加倍, I 也加倍, 所以 V 与 I 成正比.

由 $\int_V \nabla\cdot\vec{J}\,d\tau=-\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$ 即 $\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$. 由于稳恒时 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ $\therefore \nabla\cdot\vec{J}=0=\overset{\text{均匀}}{\sigma}\,\nabla\cdot\vec{E}=0$

所以内部无电荷, 电荷均位于表面. 且 $\vec{E}$ 满足泊松方程.

Explanation: 由于电子的平均自由程一定, 而热运动速度很大, 所以碰撞间时间 $t=\frac{\lambda}{v_{热}}$

若在此间沿 $\vec{E}$ 方向从零开始匀加速漂移, 则 $v_{平}=\frac{1}{2}at=\frac{\lambda a}{2v_{热}}$

$$\vec{J}=\underset{\text{分子数}}{n}\,e\,\underset{\text{每分子带自由电子数}}{f}\,v_{平}=\frac{nef\lambda}{2v_{热}}\times\frac{eE}{m_e}=\frac{nfe^2\lambda}{2m_e v_{热}}$$

虽不一定准确, 但

1° $\vec{J} \propto nf$ (迁移电荷密度)　2° $T\uparrow$ ($v_{热}\uparrow$) $\vec{J}\downarrow$ (通常因为发热电流密度下降)

Thm. 焦耳定律：碰撞化为电阻产热，设电势差为 V，单位时间流为电流 I，根据 $V=IR$

$$P = VI = I^2R$$

Extra Thm. 二导体置于电导率为 σ 的材料中(不可极化)，设二导体间电容为 C，则二导体间电阻 R 为

$$R = \frac{\varepsilon_0}{\sigma C}$$

$$\begin{cases} \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q, \quad \vec{E} = \sigma^{-1}\vec{J}, \quad \oint_s \vec{J}\cdot d\vec{a} = I \\ Q = CV, \quad V = IR \end{cases}$$

则 $I = \sigma\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{a} = \sigma/\varepsilon_0\, Q = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times CIR$

$\Rightarrow R = \frac{\varepsilon_0}{\sigma C}$

Tip. 若可极化，介电常数为 ε，则 $R = \frac{\varepsilon}{\sigma C}$

电动势

Att. 由于电荷平衡速度极快，所以可以假定电路中电流相同，不必考虑变化

Intro. 驱动电流通过电路一般有两个力，一个是电源提供的动力 $\vec{f_s}$ (单位电荷)，一般限制在某个范围内

另一个是 $\vec{E}$，由于电路中载流子的运动与分布而产生，它使电流均匀并使电源影响传播到远端

所以有 $\vec{f} = \vec{f_s} + \vec{E}$

而 $\vec{f_s}$ 一般仅限于电源内，形成等效场 $\vec{E_e}$ 称为局外场强 局外场强的回路积分为电动势

即也为 $\vec{f_s}$ 回路积分，$\vec{E_e}$ 非保守，可以由化学力，机械压力，温度梯度等产生

然而此时若是稳恒电流，则 $\vec{E}$ 是恒定电场，仍有 $\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$ 在回路内，所以 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

Def. 电动势：对于某电流回路 L, $\vec{f_s}$, $\vec{E_e}$, $\vec{E}$ 定义如上，定义该电路电动势 $\mathcal{E}$ 为单位电荷受力的环路积分

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{f}\cdot d\vec{l} = \oint_l (\vec{f_s}+\vec{E})\cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{f_s}\cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{E_e}\cdot d\vec{l}$$

解释为电源对单位电荷做的功会有问题

= 不一定是功!

Tip. 简而言之，$\vec{f_s}$ 仅与电源有关，所以 $\mathcal{E}$ 由电源决定

此外电流内部 $\vec{J}_{内} = \sigma(\vec{E}+\vec{E_e})$

Tip. 恒定电场中有（无 $\vec{E_e}$ 时）

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$, $\nabla\times\vec{E}=0$, $\vec{J}=\sigma\vec{E}$, $\nabla\cdot\vec{J}=0$, $\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{a}=0$

静电场有（无 f 时）

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$, $\nabla\times\vec{E}=0$, $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\nabla\cdot\vec{D}=0$, $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{a}=0$

} 若边值相同则解类似

动生电动势

Especially. 当非静电力为磁场力时，在某一个瞬间，力的分布确定.

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{f}_{磁}\cdot d\vec{l} = vBl$$

但实际上 $\vec{f}_{磁}$ 并不对物体作功（而且在第一个定义 $\mathcal{E}$ 是一个瞬时量，而指作功，则是个过程量）

磁力仅起 提供作功途径作用. 真正做功的是别的力. 如拉力等

需在地面系中（相对 $\vec{B}$ 静止系）真实的运动轨迹（这时候"回路"不一定闭合，线框本身也在运动）

在如此一个回路中，单位电荷被做的功为电动势，但非磁力所做

Def. 磁通量：$\Phi := \int_s \vec{B}\cdot d\vec{a}$

Thm. 磁通量法则：动生电动势若为 $\mathcal{E}$，回路磁通量为 Φ，则 $\mathcal{E}$ 正向（产生电场绕行方向为 $\mathcal{E}$ 方向）与 $d\vec{a}$ 正向一致

则有动生电动势是通过回路磁通量变化负值，即 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$.

证：$\mathcal{E} := \oint_l \vec{f}_{磁} \cdot d\vec{l}$，　$d\Phi = \Phi(t+dt) - \Phi(t) = \int_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{a}$　（Att: 动生，$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$）

$d\vec{a} = (\vec{v} \times d\vec{l})\,dt$，　$d\vec{l}$ 环绕方向即为正方向

则 $d\Phi = \int_{\Delta S} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_l \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})\,dt \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \oint_l \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) = \oint_l -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_l -\vec{f}_{磁} \cdot d\vec{l}$

即 $\mathcal{E} = \oint_l \vec{f}_{磁} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Tip. 在用 $\frac{d\Phi}{dt}$ 无法解决时，应用 $\oint_l \vec{f}_{磁} \cdot d\vec{l}$ 计算动生电动势.

§2. 电磁感应

法拉第定律

Intro. 在磁场发生变化时同样会产生电流。若回路中的力是电场给予的（此时找不出别的外力）

则有一点，变化的磁场引起产生电场，

Thm. 法拉第定律：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \end{cases}$$

Tips. 此时，若仍为 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$，$\mathcal{E}$ 全由电场产生，则 $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

也即 $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}\right) = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$　同样符合上述

所以有时，法拉第定律也以 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 代替

☆只不过 $\mathcal{E}$ 由何产生有所不同. ① 动生电动势非由电场引起，是由外力经由磁场转化

而②感生电动势由磁场变化引起

Law. 楞次定律：感应电流的自然状态反抗磁通量变化

感应电场

Def. 感应电场：由变化磁场产生的电场.

Tip. 若记 $\vec{E}=\vec{E}_q+\vec{E}_B$ ，$\vec{E}_q$ 为电荷产生，$\vec{E}_B$ 为磁生，则有

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

即 $\nabla\cdot\vec{E}_q=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ，$\nabla\times\vec{E}_q=\vec{0}$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}_B=0\ ,\quad \nabla\times\vec{E}_B=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{cases}$$ → 可与 $\nabla\cdot\vec{B}=0$. $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ 类比.

例如有 根据 $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot d\vec{a}$ 即有 $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_S-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}=-\frac{d\Phi}{dt}$

Att. 一般来说，磁场变化快，即便在变化，也可看成准静态，用静磁学求解

但一般地 记 s 为场点到源距离，τ 为变化充分所需时间，c 为光速.

在 $s\ll c\tau$ 时 可化为准静态

电感

$B=\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$

Def. 互感：有二线圈回路，在 1 回路中通电流 I_1 产生与 2 中磁通量为 Φ_2 ，易得 $\Phi_2\propto I_1$

比例系数称为互感 记 M_{21} ， $\Phi_2=M_{21}I_1$

Thm. $M_{21}=M_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{r}$ （r 为 dl_1 与 dl_2 间任意距离）（纽曼公式）（理应用于计算互感）

先由 M_{21}. 设 Γ_1 中通有电流 I_1 ，产生磁场，设磁场矢势为 A （由 $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$ 与 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ 确定 且有 $-\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla^2 A=-\mu_0\vec{J}$

则 $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r} d\tau'$ $r=|\vec{r}-\vec{r}'|$，则有

$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\Gamma_1}\frac{d\vec{l}_1}{r}$，

$$磁通量\Phi_2 = \int_{S_2}\vec{B}_1\cdot d\vec{a} = \int_{S_2}(\nabla\times\vec{A}_1)\cdot d\vec{a} = \oint_{\Gamma_2}\vec{A}_1\cdot d\vec{l}_2 \overset{\text{诺依曼定理}}{=} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2}\frac{d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1}{r} \propto I_1$$

比例系数为 $M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma_1}\oint_{\Gamma_2}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{r}$，对称地 $M_{21}=M_{12}$

Tip. 一般计算互感时，让其中一个线圈通电流 I，计算出 B 进而计算出 Φ_2 后再以 Φ_2/I 得 M
若一个通电复杂，可考虑让另一个通电。例如一线一大螺线管的互感，

Def. 自感：对于一个固定构型线圈，其磁通与其上电流 I 成正比，比例系数称为线圈自感，记为 L，即 $\Phi = LI$

Thm. 自感互感电动势公式

设线圈 Γ_1，Γ_2 互感为 M，Γ 自感为 L

则 $\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$，$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$ （均为感生电动势）

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

Tip. 自感、互感以 H（亨利）为单位，$1H = 1\,V\cdot s/A$

磁场的能量

Intro. 由于通电时需克服反电动势作功，减少的能量被储存在磁场中，下将其定性作解释

Thm. 几个磁场能公式：

1° $W = \frac{1}{2}LI^2$

2° $W = \frac{1}{2}\oint(\vec{A}\cdot\vec{I})dl = \frac{1}{2}\int_S(\vec{A}\cdot\vec{K})da = \frac{1}{2}\int_V(\vec{A}\cdot\vec{J})d\tau$

3° $W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{All} B^2 \, d\tau$

证：1° 由回路为例，$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$，　$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = +LI\frac{dI}{dt}$. 积分后得（从 $0 \to I$）

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

2° $LI = \Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{l}$

即 $W = \frac{1}{2}I\oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}\oint(\vec{A}\cdot\vec{I})\,dl$

其余可做类似推广　即 $W = \frac{1}{2}\int_S(\vec{A}\cdot\vec{K})\,da = \frac{1}{2}\int_V \underbrace{(\vec{A}\cdot\vec{J})\,d\tau}$ 电流所在区域

3° $W = \frac{1}{2}\int_V(\vec{A}\cdot\vec{J})\,d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\,d\tau$

而根据矢量公式

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

则 $W = \frac{1}{2\mu_0}\left(\int_V \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})\,d\tau - \int_V \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\,d\tau\right)$

$= \frac{1}{2\mu_0}\left(\int_V B^2\,d\tau - \oint_S(\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{a}\right)$

V 可以取得很大，后一项趋于零

则 $W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{All} B^2\,d\tau$

Tip. 由于磁场的能量，本质上是克服电场作功，所以磁场能公式与电场的类似

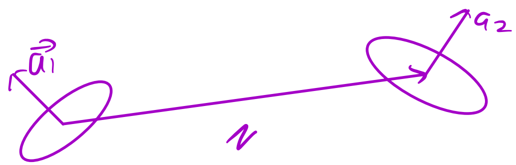
$W_电 = \frac{1}{2}\int_V \rho V\,d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{All}E^2\,d\tau$　（在介质时，$W_电 = \frac{1}{2}\int_{All}\vec{D}\cdot\vec{E}\,d\tau$）

$W_磁 = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int_{All}B^2\,d\tau$　　$W_磁 = \frac{1}{2}\int_{All}\vec{B}\cdot\vec{H}\,d\tau$

Tip. 当电流非沿单一路径，可以先求某构型建立一定电流后的磁场能 ($\vec{J}\to\vec{B}\to W$)

再根据定义. $W=\frac{1}{2}LI^2$ 解得 L（主要由于更难求，不知取什么回路）

Ex. 求这样的构型的互感.（a_1, a_2 均相对 r 来说足够小）



利用磁的偶极子模型，设在 $\vec{a_1}$ 中通有 I.

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(I\vec{a_1}\cdot\hat{r})\hat{r}-I\vec{a_1}\right]$$

$$\Phi_{21}=\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{a_2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left[3(\vec{a_1}\cdot\hat{r})(\vec{a_2}\cdot\hat{r})-\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}\right]$$

$$\Phi_{21}=M_{21}I \Rightarrow M_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{a_1}\cdot\hat{r})(\vec{a_2}\cdot\hat{r})-\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}\right]=M_{12}$$

设有 I_1 在 a_1 中流动，保证 I_1 不变时，在 a_2 中建立 I_2 电流要克服电动势作多少功？

$$\mathcal{E}_1=-\frac{d\Phi_{12}}{dt}=-M_{21}\frac{dI'}{dt} \Rightarrow -\mathcal{E}_1 I_1 dt=dW=I_1M_{21}dI' \Rightarrow W=M_{21}I_2I_1$$

代入M公式得 $W=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m_1}\cdot\hat{r})(\vec{m_2}\cdot\hat{r})-\vec{m_1}\cdot\vec{m_2}\right]$

而(6.35)有二磁偶极子间相互作用能为 $U=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\vec{m_1}\cdot\vec{m_2}-3(\vec{m_1}\cdot\hat{r})(\vec{m_2}\cdot\hat{r})\right]$

Att. 符号发生改变，在上一个例子中，算入了维持电流不变所耗能量，而在下一个例子中并未考虑

即 $U+$（从无穷远移来维持偶极所耗能）$=W$

§3. 麦克斯韦方程组

Intro. Maxwell 方程组前电磁学理论的矛盾

在之前，静磁学与静电学 or 稳恒电流 or 加入感应电场后有

$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$

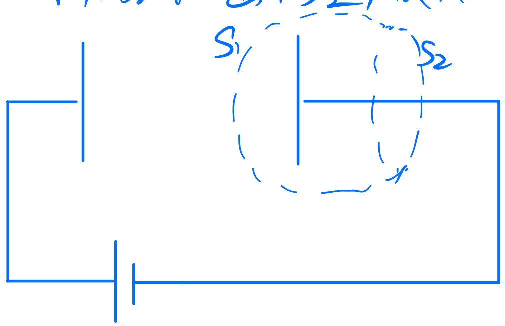
1° $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E})=-\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B})=0$ ✓

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B} = 0\\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}\end{cases}$$

但根据 旋度散度为零 2° $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\nabla\cdot\vec{J}$ (只在稳恒电流or静态时为0)

(Att. $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ $\nabla\cdot\vec{B}=0$ $\nabla\times\vec{E}=0$ $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ 在静 or 稳恒下正确)

则如组做出修正，使其在 $\forall$ 时候正确



适用安培定律时，若电容器在充电。

$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{enc}$ 但选取 S_2 时，$I_{enc}=I$ 选 S_1 时 $I_{enc}=0$. 不一致

(Att. 根据 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$ 得知 $\forall$ 取面均可，做出的正确)

麦克斯韦的修正

Intro. 由于 $\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 而 $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，所以 $\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}=0$ 即 $\nabla\cdot(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J})=0$

若 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 则可解决.

Thm. 变化电场也会感应出磁场

Def. 位移电流密度：麦克斯韦的额外修正项称为位移电流密度 记为 $\vec{J}_d$

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$ (之后也会将 $\vec{J}_d := \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$)

Tip. 位移电流与实际电流有很大不同，它不发热，也不参加化学反应.

不如束缚电荷 or 极化电流是真实存在的

修改后的方程为 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_S(\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{a}$

麦克斯韦方程组.

☆☆☆☆☆☆

Maxwell's Equation

(i) $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$

(ii) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(iii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(iv) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\Leftrightarrow$

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, d\tau$

$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} = -\frac{d\Phi}{dt}$

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$

$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a}$

boundary :

力定律

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Tip. 由于$\vec{E}$与$\vec{B}$本质上由ρ与$\vec{J}$产生，所以也写作

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \end{cases} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

电磁波

Intro. 在无电流与电荷时，Maxwell Equation 表现出显著对称

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

这二组方程，把 $\vec{E} \to \vec{B}$，$\vec{B} \to -\mu_0\varepsilon_0 \vec{E}$ 即可互相转化

但在有电荷时 这么做并不正确，即不能作出另一组方程，若有磁荷存在，则

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\vec{E} = -\mu_0\vec{J}_m - \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = \mu_0\rho_m \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

对下二式分别取散度得 $0 = -\mu_0\nabla\cdot\vec{J}_m - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B}) \Rightarrow \nabla\cdot\vec{J}_m + \frac{\partial\rho_m}{\partial t} = 0$

$$0 = \mu_0\nabla\cdot\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{E}) \Rightarrow \nabla\cdot\vec{J}_e + \frac{\partial\rho_e}{\partial t} = 0$$

实际上，磁荷并不存在，并且由此若存在可推导为何电荷是量子化

介质中的麦克斯韦方程组.

Intro. 在存在电介质时. 电荷可分为 ρ_f, ρ_b. 电流可分为 $\vec{J}_f$, $\vec{J}_b$, $\vec{J}_d$, $\vec{J}_p$

$-\nabla\cdot\vec{P} = \rho_b$, $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = \vec{J}_p$ $\left(\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_b = 0\right)$ (Attn 极化电流与磁化电流无关)

则可修改为

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_f+\rho_b}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}) = \rho_f - \nabla\cdot\vec{P} \Leftrightarrow \nabla\cdot(\overbrace{\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}}^{\vec{D}}) = \rho_f \quad \text{即} \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_f + \mu_0\vec{J}_b + \mu_0\vec{J}_p + \vec{J}_d = \mu_0\vec{J}_f + \mu_0\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\nabla\times\vec{M} \Leftrightarrow \nabla\times(\overbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}^{\vec{H}}) = \vec{J}_f + \varepsilon_0\frac{\partial(\overbrace{\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}}^{\vec{D}})}{\partial t} \quad \text{即} \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Thm. 电介质中的 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{matrix} \qquad \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M} \end{cases}$$

Especially. 对于线性介质. $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$, $\vec{M}=\chi_m\vec{H} \Leftrightarrow \vec{B}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H} \Rightarrow \vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$

$\vec{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$ ($1+\chi_e=\varepsilon_r$, $1+\chi_m=\mu_r$)

边界条件.

Thm. 边界条件 (上正方向与法向一致, 上为法向指外侧)

$$\begin{cases} D^{\perp}_{上}-D^{\perp}_{下}=\sigma_f \\ \vec{E}^{\parallel}_{上}=\vec{E}^{\parallel}_{下} \end{cases} \qquad \begin{cases} B^{\perp}_{上}=B^{\perp}_{下} \\ \vec{H}^{\parallel}_{上}-\vec{H}^{\parallel}_{下}=\vec{K}_f\times\hat{n} \end{cases}$$

Especially. 无自由电荷与自由电流时有

$$\begin{cases} D^{\perp}_{上}-D^{\perp}_{下}=0 \\ \vec{E}^{\parallel}_{上}=\vec{E}^{\parallel}_{下} \end{cases} \qquad \begin{cases} B^{\perp}_{上}=B^{\perp}_{下} \\ \vec{H}^{\parallel}_{上}-\vec{H}^{\parallel}_{下}=\vec{K}_f\times\hat{n} \end{cases}$$

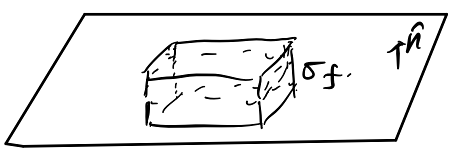
再有若为线性介质, 则 $\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$, $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{上}D^{\perp}_{上}-\varepsilon_{下}D^{\perp}_{下}=0 \\ \vec{E}^{\parallel}_{上}=\vec{E}^{\parallel}_{下} \end{cases} \qquad \begin{cases} B^{\perp}_{上}=B^{\perp}_{下} \\ \frac{1}{\mu_{上}}\vec{B}^{\parallel}_{上}-\frac{1}{\mu_{下}}\vec{B}^{\parallel}_{下}=\vec{K}_f\times\hat{n} \end{cases}$$

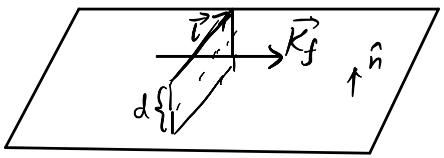
证明. 根据 $\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{a}=\int\rho_f\,dV$, $\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{a}=0$

$$\begin{cases} \oint_\Gamma\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi}{dt} , \quad \oint_\Gamma\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_{f\,enc}+\oint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{a} \end{cases}$$

$$(D^{\perp}_{上}-D^{\perp}_{下})\,a=\sigma_f\,a \Rightarrow D^{\perp}_{上}-D^{\perp}_{下}=\sigma_f$$



$$(B^{\perp}_{上}-B^{\perp}_{下})\,a=0 \Rightarrow B^{\perp}_{上}-B^{\perp}_{下}=0$$



$$\vec{E}''_{上}\cdot\vec{l}+\vec{E}''_{下}\cdot(-\vec{l}) = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{a}$$ 取 $d\to 0$ $\Rightarrow (\vec{E}''_{上}-\vec{E}''_{下})\cdot\vec{l}=0$

而 $\vec{l}$ 可任取，所以 $\vec{E}''_{上}=\vec{E}''_{下}$

$$\vec{H}''_{上}\cdot\vec{l}+\vec{H}''_{下}\cdot(-\vec{l}) = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{a}+I_{fenc}$$

$I_{fenc}\,\hat{n}=\vec{l}\times\vec{K}_f$ 取 $d\to 0$ $\Rightarrow \left[(\vec{H}''_{上}-\vec{H}''_{下})\cdot\vec{l}\right]\hat{n}=\vec{l}\times\vec{K}_f$

取 $\vec{l}\parallel\vec{K}_f$，得 $(H''_{上})_{\parallel}-(H''_{下})_{\parallel}=0 \Rightarrow (H''_{上})_{\parallel}=(H''_{下})_{\parallel}$

取 $\vec{l}\perp\vec{K}_f$，得 $\left|(H''_{上})_{\perp}-(H''_{下})_{\perp}\right|=K_f$，经过方向判断

得 $\vec{H}''_{上}-\vec{H}''_{下}=\vec{K}_f\times\vec{n}$