第三章 特殊技术

§1 拉普拉斯方程

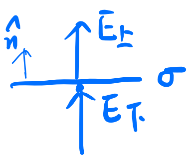
$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, shift left, "\phi_A=-\int_O^A E\cdot ds"] \arrow[dr, shift left, "\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\nabla\cdot E"] & \\
\phi \arrow[ur, shift left, "E=-\nabla\phi"] \arrow[rr, shift left, "\rho/\varepsilon_0=-\nabla^2\phi"] & & \rho \arrow[ll, shift left, "\phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}\rho(r')d\tau'"] \arrow[ul, shift left, "E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{r^2}\hat{r}\,d\tau'"']
\end{tikzcd}$$

（取无穷远零势）

在 $\rho=0$ 的地方

$\nabla^2\phi+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0 \Leftrightarrow \nabla^2\phi=0$，在直角坐标下 $\Leftrightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$

边界条件：$E_上^{\parallel}=E_下^{\parallel}$，$E_上^{\perp}-E_下^{\perp}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\hat{n} \Rightarrow E_上-E_下=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \Leftrightarrow \nabla\phi_上-\nabla\phi_下=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$



而 $\nabla\phi\cdot\hat{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial\phi_上}{\partial n}-\frac{\partial\phi_下}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 且有 $\phi_上=\phi_下$

而根据唯一性定理

以下情况（S为全区域边界，即Ω是任意体积，S是Ω边界）

I. $\int\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → 给定空间内电荷分布

$$\begin{cases} \cdots \\ \phi|_s = f(x,y,z) \end{cases}$$ → 给定边界势

II. $$\begin{cases} \nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_s = f(x,y,z) \end{cases}$$
→ 给定空间荷密度
→ 给定边界电场

III. $$\begin{cases} \nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \begin{cases} \phi|_\Omega = \phi_0 \\ \oint_s -\dfrac{\partial\phi}{\partial n}\, ds = \dfrac{Q_f}{\varepsilon_0} \end{cases} \end{cases}$$
→ 给定空间带电性
→ 给定导体形状
→ 给定带电量

均有 ϕ （至多相差常数）的唯一解

拉普拉斯方程解的性质

I. 一维

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \phi(x) = mx + b.$$ （边界二点，则由给定二常数）

1. $\forall a,\ \phi(x) = \frac{1}{2}[\phi(x+a) + \phi(x-a)]$ （平均）

2. 不允许局域极大，极小，只在端点出现最值（边界连续 [illegible]

II. 二维

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$ （边界为闭合曲线）

1. 以 (x,y) 为圆心，画出半径为 R 的圆 Γ，$\Gamma = \{(a,b) \mid (a-x)^2 + (b-y)^2 = R^2\}$

数值 {给定边界

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi R}\oint_\Gamma \phi(x,y)\, dl$$ （二维平均）

2. 不允许有局域最大或最小，只在边界出现极值（边界围出最小面积）

III、三维

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad \text{（边界为闭合面）}$$

1. $\Gamma=\{(a,b,c)\mid (a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=R^2\}$.

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi R^2}\oint_\Gamma \phi(x,y,z)\,ds$$

（证：$\forall$ 点电荷 q 产生的势 ϕ_k，$\frac{1}{4\pi R^2}\oint_\Gamma \phi_k\,ds=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ $\quad (r=d(q,(x,y,z)))$）

而全空间中所产生的为 $\frac{1}{4\pi R^2}\oint_\Gamma \phi(x,y,z)\,ds=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{|(x,y,z)-r'|}\,d\tau'=\phi(x,y,z)$

2. 也不存在局域最大最小（对应四维中的三维曲面体积最小）

若有，则取其为球心.

Addition. 唯一性定理的证明

I. $\begin{cases}\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \phi|_S=f(x,y,z)\end{cases}$

Proof：假有二势满足条件. 即 ϕ_1 与 ϕ_2

$$\nabla^2\phi_1=\nabla^2\phi_2=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

令 $\phi_1-\phi_2=\phi_3$，$\nabla^2\phi_3=0$ 则 ϕ_3 满足 Laplace formulation

且 $\phi_3|_S=0$ 又 ϕ_3 在边界上取最大最小

$\therefore$ $\phi_3=0$. 即 $\phi_1=\phi_2$，唯一给定了势.

Proof：构造函数 $\phi_3\nabla\phi_3$.

$$\oint_S (\phi_3 \nabla \phi_3)\cdot da = \int_V \nabla\cdot(\phi_3 \nabla \phi_3)\, d\tau = \int_V [(\nabla\phi_3)^2 + \phi_3 \nabla^2 \phi_3]\, d\tau$$

$$= \int_V (\nabla \phi_3)^2 \, d\tau$$

且有 $\phi_3|_S = 0$ $\therefore \int_V (\nabla\phi_3)^2 d\tau = 0$ 又 $(\nabla\phi_3)^2 \geq 0$ $\therefore \nabla\phi_3 = \vec{0}$

$\Rightarrow \phi_3 = Const = 0.$

II. $\begin{cases} \nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_S = f(x,y,z) \end{cases}$

Proof. 同上, $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$ 得 $\nabla^2\phi_3 = 0$, $\dfrac{\partial\phi_3}{\partial n}\Big|_S = \nabla\phi_3 \cdot \hat{n}\Big|_S = 0$

$$\oint_S \phi_3 \nabla\phi_3 \cdot da = 0 = \int_V (\nabla\phi_3)^2 d\tau \quad \therefore \nabla\phi_3 = \vec{0}, \quad \phi_3 = Const.$$

ϕ_1, ϕ_2 本区上仍同一组解. 亦即电场唯一确定

III. $\begin{cases} \nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \cdots\cdots ① \\ \begin{cases} \phi|_{\partial} = \phi_0 & \cdots ② \\ \oint_S -\dfrac{\partial\phi}{\partial n} da = \dfrac{Q_f}{\varepsilon_0} & \cdots ③ \end{cases} \end{cases}$ (此时假设区域边界为门)

Proof. 设有 E_1, E_2 满足, $E_3 = E_1 - E_2$

③: $-\dfrac{\partial\phi}{\partial n} da = -\nabla\phi\cdot da = E\cdot da$ 根据 $\dfrac{Q_f}{\varepsilon_0}$ 为定值

$$\therefore \oint_S E_1 \cdot da = \oint_S E_2 \cdot da.$$

① $\nabla\cdot E_1 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla\cdot E_2 \Rightarrow \nabla\cdot E_3 = 0$

② $\int_{\partial+S} E_1\cdot da = \int_{\partial+S} E_2 \cdot da \Rightarrow \int_{\partial+S} E_3 \cdot da = 0.$

在 $\Gamma+S$ 围出的空间 W 内，设 ϕ_3 为 Γ 与 S 上的各电势(且在 Γ 与 S 上为常数)

$$0=\phi_3\int_{\Gamma+S}E_3\cdot da=\int_{\Gamma+S}\phi_3E_3\cdot da=\int_W\nabla\cdot(\phi_3E_3)\,d\tau=\int_W-(E_3)^2+\phi_3\underbrace{\nabla\cdot E_3}_{0}\,d\tau=\int_W-(E_3)^2\,d\tau$$

对各边界求和　　　　亦即构造 $\phi_3\nabla\phi_3$

∴ E_3 在 W 中全为零，$E_1=E_2$. 唯一性证

Conclu: 1. 构造 ϕE 或 $\phi\nabla\phi$ 并由其在边界上积分为零 得出 体积内 $(\nabla\phi)^2=E^2$ 为零

势差　电场差

(I): 势差 $\phi=0$

(II): $\phi\nabla\phi$ 在边界上积分为零 ($\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$. 也即给定一侧电场的法向分量)

(III). ϕ 在边界上为常数 E 在边界上积分为零

§2 镜像法

Thm: 根据唯一性定理,在给定条件下求出的解即为唯一解 (Att. 不能改变真实空间的 q 分布

Prop: a) 诱导面电荷密度: $+(\nabla\phi_上-\nabla\phi_下)\cdot\hat{n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (外法向为正)

导体时 $\nabla\phi_下=0\Rightarrow\nabla\phi_上\cdot\hat{n}=\frac{\partial\phi_上}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (外法向为正)

b) 力和能量 : 力可按原本计算, 但能量可看场只有原来几分之几来判断

§3 分离变量法

Way I: 设 $\varphi=X(x)*Y(y)$

将 $\nabla^2\varphi=0$ 分解成 $f(x)=g(y)=\text{const}$.

再解出一系列三角函数通解，利用傅立叶级数满足边界条件

同样三维时（存在边界条件为 $h(x)$ or $h(y)$ or $h(z) = \phi_0$ or $\phi(x,y)$ or $\phi(y,z)$ or $\phi(x,z)$ ）

也可设 $\varphi = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$

Way II：在球坐标系下

$$\nabla^2\phi = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi} = 0$$

当 $\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$ 时，令 $\phi = R(r)\,\Theta(\theta)$

$\Rightarrow \quad f(r) = g(\theta) = Const$

$\Rightarrow R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}$ ， $\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$ ， $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$ （Legendre 多项式）

（ $\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = l(l+1)R$ 与 $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) = -l(l+1)\sin\theta\times\Theta$ ）

$\Rightarrow \phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$ （ $\forall l\in N$ ，均满足上述微分方程）

又 $P_l(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 内具有完备与正交性.

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

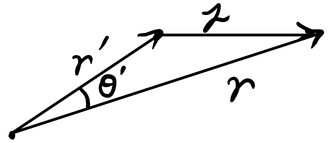
Way Other：其它坐标系类似处理

§4 多极展开

Thm. ϕ 按 $\frac{1}{r}$ 的多极展开：

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{\imath}\rho(r')\,d\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int(r')^n P_n(\cos\theta')\rho(r')\,d\tau' \quad (\theta' = \langle r, r'\rangle,\ \imath = r - r')$$

证： $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{\imath}\rho(r')\,d\tau'$



$$\cos\theta' = \frac{r'^2+r^2-\mathscr{r}^2}{2r'r} \Rightarrow \mathscr{r} = \sqrt{r'^2+r^2-2\cos\theta' r r'} = r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\cos\theta'\frac{r'}{r}}$$

令 $\varepsilon = \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r}-2\cos\theta'\right)$ （当 $r\gg r'$ 时，可忽略泰勒展开高阶项）

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2-\frac{5}{16}\varepsilon^3+\cdots+\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\times n!}+\cdots\right]$$

$\Rightarrow$ 代入ε，得 $\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\left[1+\frac{r'}{r}\cos\theta'+\left(\frac{r'}{r}\right)^2(3\cos^2\theta'-1)/2+\cdots+\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')+\cdots\right]$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int (r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\vec{r}')\,d\tau'$$

$n=0$ 对应单极子贡献，$n=1$ 对应偶极子（电势按 $\frac{1}{r^2}$ 减小），$n=k$ 对应 2^k 极子（电势按 $\frac{1}{r^{k+1}}$ 减小）

Tip. 1) 对于单极，$\phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ （相对于单极贡献 或无穷远处近似）

2) 对于偶极 $\phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r'\cos\theta'\rho(\vec{r}')\,d\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\int\vec{r}'\rho(\vec{r}')\,d\tau'$

而积分与 r 无关，$\boxed{\text{记 } \vec{p} = \int\vec{r}'\rho(\vec{r}')\,d\tau' \text{ 为电荷分布的偶极矩}}$ Def. 电偶极矩

$$\phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$