

第六章 物质中的磁场

§1 磁化

Cat: { 顺磁体
抗磁体

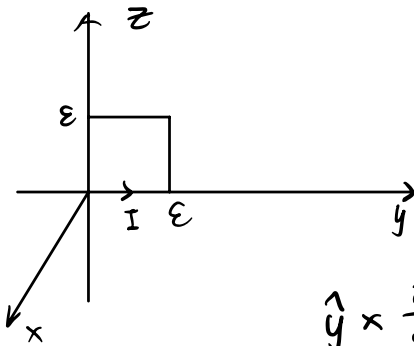
铁磁体 (外磁场撤销后仍有磁性)

Thm. 作用在磁偶极子上的力矩: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

力为: $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$

证:

力矩:



$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I (dy \times \hat{y} \times \vec{B}(0, y, 0) + dz \times \hat{z} \times \vec{B}(0, \epsilon, z) - dy \times \hat{y} \times \vec{B}(0, y, \epsilon) - dz \times \hat{z} \times \vec{B}(\epsilon, 0, z))$$

$$\approx I \left[-dy \times \hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \epsilon + dz \times \hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \epsilon \right]$$

$$\hat{y} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{z}$$

$$\hat{z} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \approx m \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{z} \right)$$

根据 $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

$$\Rightarrow \vec{F} \approx m \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{z} \right)$$

$$= \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla((m_x, 0, 0) \cdot (B_x, B_y, B_z)) = \nabla(m B_x) = m \left(\frac{\partial B_x}{\partial x}, \frac{\partial B_x}{\partial y}, \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)$$

或利用 $\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_S (d\vec{\sigma} \times \nabla) \times \vec{B} \approx \underbrace{(\vec{m} \times \nabla)}_{\text{正确}} \times \vec{B} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \underbrace{(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{m}}_{\text{此二为任何时候正确}} = \underbrace{\nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})}_{\text{正确}}$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ m_x & m_y & m_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = (m_y \partial_z - m_z \partial_y, m_z \partial_x - m_x \partial_z, m_x \partial_y - m_y \partial_x)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ m_y \partial_z - m_z \partial_y & m_z \partial_x - m_x \partial_z & m_x \partial_y - m_y \partial_x \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (m_z \partial_x B_z - m_x \partial_z B_z - m_x \partial_y B_y + m_y \partial_x B_y) \hat{x} \\ + (m_x \partial_y B_x - m_y \partial_x B_x - m_y \partial_z B_z + m_z \partial_y B_z) \hat{y} \\ + (m_y \partial_z B_y - m_z \partial_y B_y - m_z \partial_x B_x + m_x \partial_z B_x) \hat{z}$$

利用 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

即 $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

$$\leftarrow = (m_x \partial_x B_x + m_y \partial_x B_y + m_z \partial_x B_z) \hat{x}$$

$$+ (m_x \partial_y B_x + m_y \partial_y B_y + m_z \partial_y B_z) \hat{y}$$

$$+ (m_x \partial_z B_x + m_y \partial_z B_y + m_z \partial_z B_z) \hat{z}$$

$$= \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

力矩时, $\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}$, $\vec{M} = I \oint \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = I \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - (\vec{r} \cdot d\vec{l}) \vec{B}$

$$\vec{M} = I (\oint (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{l} - \vec{B} \oint \vec{r} \cdot d\vec{l}) = I (\vec{a} \times \vec{B} - \vec{B} \int (\nabla \times \vec{r}) \cdot d\vec{\sigma}) = \vec{m} \times \vec{B}$$

Ex.  的磁偶极子间吸引力 ($\vec{m}_1 \parallel \vec{m}_2$)

证: I). 把 m_2 等效为半径为 $R \ll r$ 的带电环.

$$B_{\text{环面}} = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} \times (2\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta) \approx \frac{3\mu_0 m_1 R}{4\pi r^4}$$

$$\vec{F} = -\vec{m}_1 \cdot \nabla B = -\vec{m}_1 \cdot \nabla \left(\frac{3\mu_0 m_1 R}{4\pi r^4} \right) = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4} \hat{r}$$

II) $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla(\vec{m}_2 \cdot \vec{B})$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$$

$$\vec{F} = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^4} \times 2 \hat{r} = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4} \hat{r}$$

或展开 $\nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \vec{m} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{m}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{m}$

当 \vec{B} 均匀且该点无电流时, $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$, $\nabla \times \vec{m} = \vec{0}$, $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{m} = \vec{0}$

如 $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$, 则 $\vec{F} = (m_2 \frac{\partial}{\partial z}) \left(\frac{\mu_0}{4\pi z^3} [3(m_1 \cdot \hat{z}) - m_1 \cdot \hat{z}] \right)$
 $= m_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_0 m_1}{2\pi z^3} \hat{z} \right) = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4} \hat{z}$

Thm. 抗磁来源: 电子绕轴运动时由于外加磁场, 产生反自旋磁矩 (在平衡位置处)

物理 顺磁性一般源于电子自旋磁矩, 所以在电子或单原子中常出现

抗磁 一般在成对中出现, 且普遍弱.

1° 轨道磁矩 一般小于自旋磁矩

2° 轨道磁矩转动.

§2. 磁化物体的磁场.

Def. 磁化强度 \vec{M} : 单位体积内的磁偶极矩 称为磁化强度

Intro. 单磁偶极子矢量: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2}$ ($\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$)

则对于连续分布, $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{r}}{r^2} d\tau'$

Thm. 磁化物体的磁矢量

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{r} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{r} d\tau'$$

$$\text{证: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{r}}{r^2} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

$$\text{而根据 } \nabla' \times (\vec{M}(\vec{r}') \times \frac{1}{r}) = \frac{1}{r} (\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')) - \vec{M}(\vec{r}') \times (\nabla' \left(\frac{1}{r} \right)) \quad \text{①}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times (\vec{M}(\vec{r}') \times \frac{1}{r}) d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{r} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{r} da$$

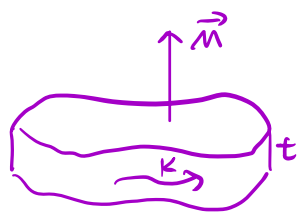
$$\frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{r} = \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{r}$$

$$\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{r} = \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{r}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{r} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{r} d\tau'$$

Extra. $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ 与 $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$ 的物理解释

① $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$



内有许多小回路, 设面积为 a , $\vec{m} = \vec{M} a t$, 若者为电流环

$$\vec{m} = I a \hat{n} \Rightarrow I = M t$$

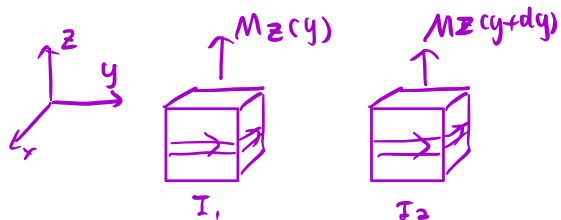
而小回路叠加后, 内部为零, 边缘存在面电流. 方向沿切向

设边缘外法向为 \hat{n} 则 $\vec{K} = \frac{I}{L} \hat{e} = \vec{M} \times \hat{n}$

Att. 束缚电流并非单一的电荷在大环路内运动产生, 而由许多微环路内的电子运动

宏观等效为电流, 束缚态为每个电子都被特定原子束缚

$$\textcircled{2} \vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$



$$I_x' = [M_z(y+dy) - M_z(y)] dz \sim \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz$$

$$I_x'' = [M_y(z) - M_y(z+dz)] dy \sim -\frac{\partial M_y}{\partial z} dy dz$$

$$\therefore I_x = I_x' + I_x'' = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) dy dz$$

$$\therefore (\vec{J}_b)_x = \frac{I_x}{dy dz} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = (\nabla \times \vec{M})_x$$

$$\text{综上, } \vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

Att. 恒定时, $\nabla \cdot \vec{J}_f = 0$, 同有 $\nabla \cdot \vec{J}_b = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{M}) = 0$

介质内的磁场

Remark: 考虑尺度仍在大到包含许多原子的微区域, 取 \vec{M} 在该区域内的平均值.

(区域外产生的用等效磁偶极子, 区域内的用平均)

§3. 辅助场 H.

Def. 磁化电流: 由于介质磁化产生的电流 (非由自由电子产生), 记作 \vec{J}_b

$$\text{且有 } \vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f$$

Tip. 由静磁场的 Maxwell equation, 有

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

代入 $\vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f$, 并根据 $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$ 得

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

Def. 量 \vec{H} : $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

则有 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$

积分形式 $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Leftrightarrow \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$

Att. 实验室可控的是电流表读数, 也即 I_f , 而它决定 \vec{H} , 所以实验室常提 \vec{H}

但由于电势差, 也即 \vec{E} 的线较为可控, 所以更多提 \vec{E} 而非 \vec{D}

易理解的类似性

同样类似于 \vec{D} , 只有铁质与磁质才能共同磁化

有 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$, 但 $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$, 不恒为零. 并非在无 \vec{J}_f 时 \vec{H} 就为零.

例如在 固定磁化的短圆柱里, $\vec{H} \neq 0$. 在端面处 $\nabla \cdot \vec{M} \neq 0$

边界条件.

Thm. 用 \vec{H} 表示的静磁学边界条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{B}_\perp - \vec{B}_\parallel = \mu_0 (\vec{K} \times \hat{n}) \quad (\hat{n} \text{ 由下} \rightarrow \text{上}) \\ \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_\perp^\perp - B_\parallel^\perp = 0 \\ B_\perp^\parallel - B_\parallel^\parallel = \mu_0 K \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f \\ \oint H_\perp^\perp - H_\parallel^\perp = -(M_\perp^\perp - M_\parallel^\perp) \end{array} \right.$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{a} = -\oint_S \vec{M} \cdot d\vec{a} \quad H_L'' - H_F'' = K_f$$

Tip. 在 $\vec{J}_f = \vec{0}$, 则 $\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$, $\vec{H} = -\nabla W$ (W 为标量场)

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \quad \text{即} \quad \nabla^2 W = (\nabla \cdot \vec{M}), \quad \text{即以 } \nabla \cdot \vec{M} \text{ 为源的泊松方程}$$

§4. 线性与非线性介质

磁化率与磁导率.

Def. 介质磁化率: 在 B 不太强时, 对线性介质有

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \chi_m \text{ 称为磁化率. (这里从上式的介质称为线性介质)}$$

$$\text{Extra: } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\chi_m + 1)\vec{H} = \mu \vec{H} \quad (\text{称为构成关系})$$

μ 称为磁导率, $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$, μ_0 是真空中磁导率

铁磁性.

Def. 铁磁性: 由于材料微偶极子间强相互作用, 从而导致相邻的极子取向一致的现象. 本质由于量子力学

Tip. 这种一致一般限制在亿个极子的磁畴中

1. 磁畴尺寸小, 且易收缩, B 足够强时.

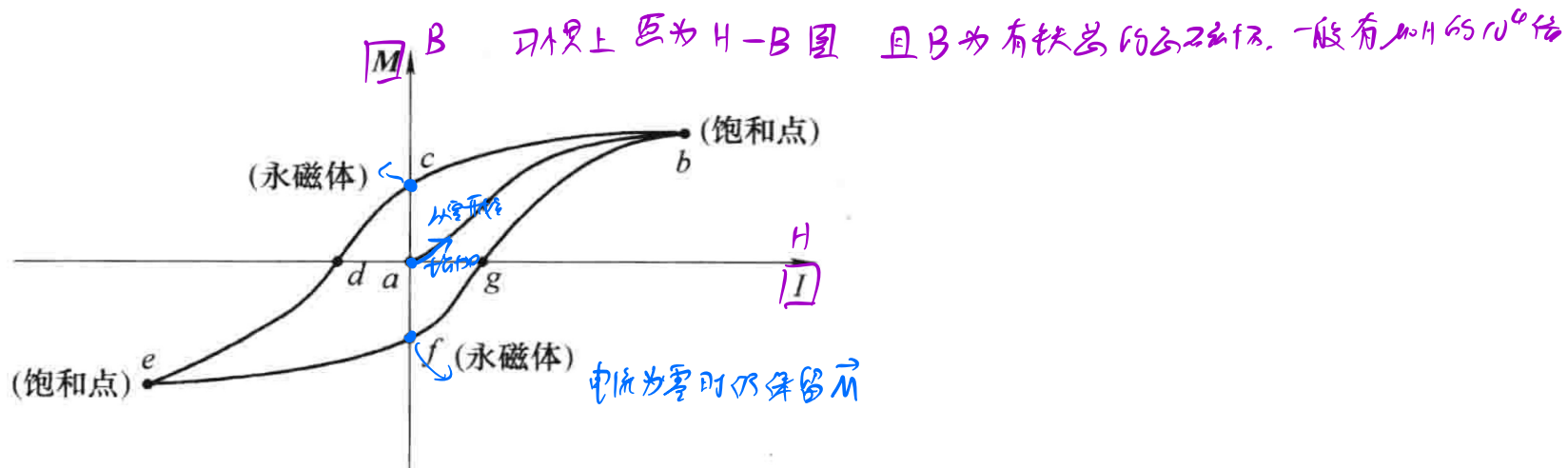
而当外磁场足够强时, 会变成单一磁畴, 此时, 称这块铁饱和

Def. 磁滞回线: 材料半周磁化强度 (or 用 B 表征) 与外磁场 (或用 H 表征) 的关系

并由于铁磁材料半周变化与历史有关, 会有迟滞

电流 \uparrow , 外磁场 \uparrow , $M \uparrow$, 但当电流减小或反向电流, M 不会减小为零, 因为即使 I

成反向, 它已成为顺磁体, 所以画反向磁场将其拉回磁滞回线, 曲线如下



Def. 居里点: 不同材料中, 类似磁畴结构内偶极子同向被打破时的温度.

Tip: 变化范围极窄, 在统计力学中称为相变

Extro Attention

1°
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 & \nabla \times \vec{E} = \vec{0} & \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P} \quad (\vec{J}_f = 0) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \nabla \times \vec{H} = \vec{0} & \mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M} \quad (\vec{J}_f = \vec{0}) \end{cases}$$
 则二若予在相似情况下由 $\vec{B} \sim \vec{D}, \vec{E} \sim \vec{H}$ 来替换 $\vec{P} \sim \mu_0 \vec{M}, \epsilon_0 \sim \mu_0$

2° 由于 $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{r}}{r^2} d\tau'$, $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{r}}{r^2} d\tau'$, $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{r}}{r^2} d\tau'$

则在 $\rho(\vec{r})$, $\vec{P}(\vec{r})$, $\vec{M}(\vec{r})$ 即为电荷时, 三问题 \Rightarrow 本 $\int_V \frac{\vec{r}}{r^2} d\tau'$

若知道其中任一, 则予行其余

Thm. 非静场下的束缚电荷密度与束缚电流密度

$$\rho_b(\vec{r}, t) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}, t), \quad \vec{J}_b(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) + \nabla \times \vec{M}(\vec{r}, t)$$

ϕ_0 时有 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$ $\rho = \rho_f + \rho_b$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$

电磁场的洛伦兹方程，求解时多问这时光能传播到何处？