Lecture 1. 绪论

▷ Linearity 线性 → 叠加性. superposition.

eg. 矢量运算；线性函数/方程组；线性波；弗斯格例子.

Unlinearity 非线性 → 不具备叠加性.

eg. 弹簧形变与应力；非线性介质；非线性电路；非线性函数

单摆. $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

后果：① 通常不能解析所有解.

② 方程行为性质可能因参量变化而改变/失稳

— 分叉行为

③ 计算机计算.

④ 非线性科学(1990s)

▷ 科学简史/一些历史节点漫谈

· 1952 图灵斑图. 均匀态 $\xrightarrow{\text{条件}}$ 斑图

· 1963 Lorenz 简单动力学方程 $\xrightarrow{\text{数值}}$ 混沌与奇异吸引子.

· 1970s. ① Logistic map 「$x_{n+1} = \mu \cdot x_n(1-x_n)$」

② 倍周期分叉行为引入湍流.

③ 混沌概念引入

④ 生物学节律与斑图. Math biology

⑤ 分形几何创建.

⑥ 亚平衡热力学、耗散结构理论、自组织理论、Haken协同

▷分支 ① 孤子.soliton.

色散 → 波包扩散
介质非线性 → 波包收敛
} $\xrightarrow{\text{平衡}}$ 孤子

② 混沌. 确定性动力学对初值敏感性.
chaos

③ 分形 Fractal.

④ 斑图形成.

↓

非平衡热力学；非平衡统计物理；非线性科学.
软物质；活性物质；生命复杂系统

复杂性系统/科学

▷举例 (略)

▷术语.

相空间 phase/state space：一系统所有可能状态的集合.

动力学规则 (演化规则) dynamical rule.

决定相空间中所有可能态演化趋势的法则

动力系统：在动力学规则下演化的系统.

本课程关注确定性动力学.连续系统.

(不含随机项) ($\dot{x} = f(x)$)

Lecture 2. Flows on the line 一维流

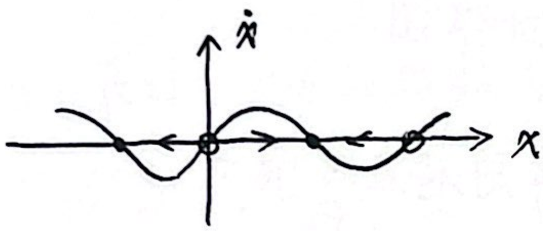
I) A geometric way of thinking 从几何角度考虑.

例. $\dot{x} = \sin x$. 初态 $x(0) = x_0$.

解得 $t = \ln\left|\dfrac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|$

但形式为 $t = t(x)$. 无法看出 x 的演化行为

⇒ 几何角度观察

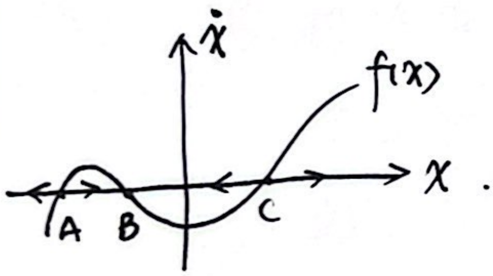


易知 $x = 2k\pi$ 为不稳定点 (排斥子

$x = \pi + 2k\pi$ 为稳定点 (吸引子

即定性分析即可, 关注图象

II) Fixed Points and Stability 不动点与稳定性.



对 $\dot{x} = f(x)$ 动力学方程.

相点: 相空间上的点

轨迹: 相点根据动力函数 f 在相空间的

相图: 展示动力系统的流线图 (如左)

例: 略

Ⅲ) Linear Stability Analysis 线性稳定分析

对动力学方程 $\dot{x} = f(x)$，不动点 x^* 为 $f(x^*) = 0$.

考虑小的扰动 $\eta = x - x^*$ $\dot{\eta} = \dot{x}$

则 $\dot{x} = \dot{\eta} = f(x^* + \eta)$

$$= f(x^*) + f'(x^*) \cdot \eta + \cdots$$

$\Rightarrow \dot{\eta} = f'(x^*)\eta$ 稳定性取决于 $f'(x^*)$

若 $f'(x^*) = 0$，则分析高阶项 or 作图.

Ⅳ) Existence and Uniqueness Theorem 解的存在&唯一性.

若 $f(x)$、$f'(x)$ 在R上连续光滑.

则方程 $\dot{x} = f(x)$，$x(t=0) = x_0$ 有唯一解 $x(t)$，在有限时间区间 $(-\tau, \tau)$ 内

否则 $x(t)$ 不唯一，即 $x(t)$ 可有多解

eg. $f'(x)$ 在 $x=0$ 附近不存在.

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}. \qquad x(t=0) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 0 \quad \text{or} \quad x(t) = \pm\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$$

eg. 时间有限

$$\dot{x} = 1 + x^2 \qquad x(0) = 0.$$

$$\Rightarrow x(t) = \tan(t)$$

V) Impossibility of Oscillations. 振荡解不存在.

对一阶动力学系统 $\dot{x}=f(x)$. $x(t=0)=x_0$.

相图点轨迹由不动点引导. 只能

① 接近不动点　　② 趋向无穷大.

即永不发生过冲. 阻尼/非阻尼振荡.

「PS: $f(x)$ 仅是 x 的函数.」

VI) Potential 势函数. 另一种可视化一维系统的方法.

$\dot{x}=f(x)$、定义势函数 $V(x)=-\int f(x)dx$

$$\Rightarrow \dot{x}=-\frac{dV}{dx}.$$

且 $\frac{dV}{dt}=-\left(\frac{dV}{dx}\right)^2<0$　势函数总在减小.

势极值 $\frac{dV}{dx}=0$　为不动点.

极小值　为稳定点.

极大值　为不稳定点

「但二维可更高维. 势不一定存在」

VII) Solving Equations on the Computer 数值解析—欧拉法.

$x(t_0+\Delta t)\cong x(t_0)+f(x_0)\Delta t\ +\ \cdots$ 截断.

$\xrightarrow{\text{离散化}}$ $x_{n+1}=x_n+f(x_n)\Delta t$.

误差 $E=|x(t_n)-x_n|$　$\Delta t\to 0$ 时 $E\to 0$.

误差较大且不断积累　($E\propto\Delta t$)

改进的Euler法 → 二阶

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t.$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\left[f(x_n) + f(\tilde{x}_{n+1})\right]\Delta t.$$

此时. $E \propto (\Delta t)^2$

四阶的Runge-Kutta法

$k_1 = f(x_n)\Delta t$ $\quad$ $k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}k_2)\Delta t$

$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}k_1)\Delta t$ $\quad$ $k_4 = f(x_n + k_3)\Delta t$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$E \propto (\Delta t)^4.$

Package: matlab. mathematica XPPAUT. Oscill8

确定性动力学：任何状态在未来有唯一结果. eg. 牛顿方程

随机动力学：含随机项 eg. 郎之万方程

离散系统：映射. 差分方程. eg. $x_{n+1}=f(x_n)$

连续系统：时间连续. eg. 微分动力系统. $\dot{\vec{x}}=f(\vec{x})$

自治系统

非自治〃 . 演化规则 $f(\vec{x})$ or $f(\vec{x},t)$

n 和 n+1.

空间延展系统 eg 扩散方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=D\nabla^2 u$.

延迟系统. eg. $\dot{x}(t)=f(x(t-\tau))$

$$x_{n+1}=f(x_n, x_{n-1}, x_{n-\tau})$$

Lecture 3. Bifurcations on the line

一维系统的分叉行为.

I) What is a bifurcations. 什么是分叉行为

$\dot{x} = f(x, a)$ a 为参变量 control parameter.

随参变量 a 改变. 系统性质可能会发生改变.

① 不动点 Fixed points 形成 or 消失.

② 不动点稳定性改变.

—— 称此种性质改变为分叉行为 Bifurcation

发生分叉行为时参变量的值称"分叉点" bifurcation point

分叉行为与不稳定性 instabilities 高度相关.

是系统非线性的结果.

类型.

① 鞍结点分叉: 不动点出现 or 消失.

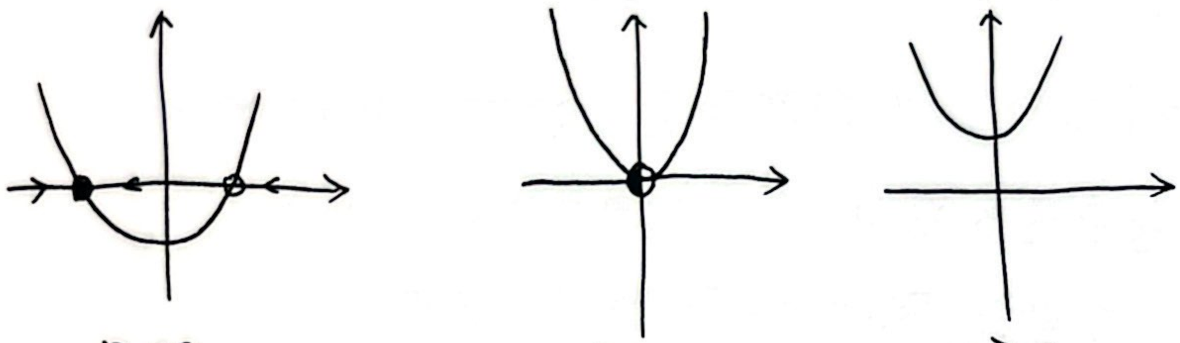
② 跨临界分岔: 不动点稳定性发生变化.

③ 叉形分岔: 同时出现不动点个数 & 稳定性改变.
(对称)

II) Saddle-node bifurcation 鞍结点分叉.

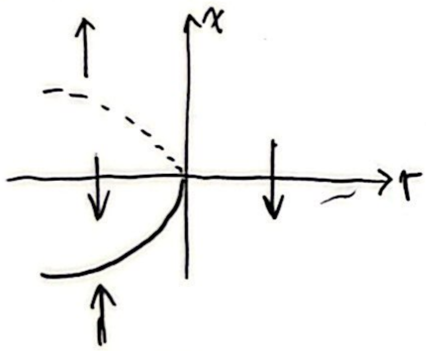
/tangent/fold/turning.

eg. $\dot{x} = x^2 + r$



$r<0$ $r=0$ $r>0$.

绘出分叉图 表明不动点与分叉点关系.

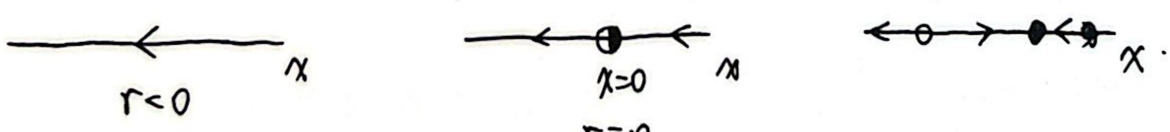


--- 代表不稳定

— 代表稳定.

势函数 $V(x) = -rx - \frac{1}{3}x^3$ 也会随参变量 r 改变.

eg. $\dot{x} = -x^2 + r$.



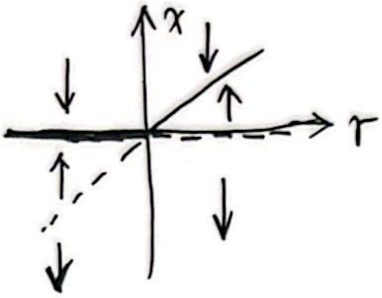
$r<0$ $r=0$

III) Transcritical bifuration 跨临界分岔.

eg. $\dot{x} = rx - x^2$.

$r<0$ $r=0$ $r>0$

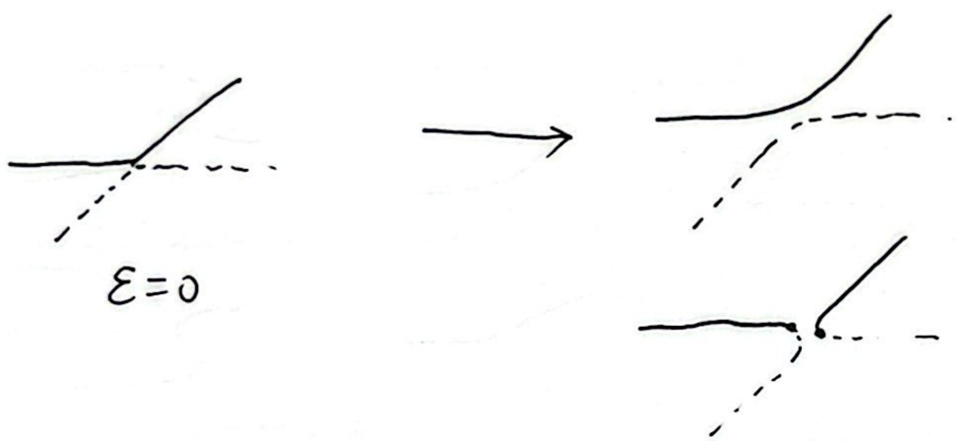
绘出分岔图.



可见不动点只是稳定性互换.

如果对动力学方程引入微扰.

$\dot{x} = rx - x^2 + \varepsilon(r,x)$.

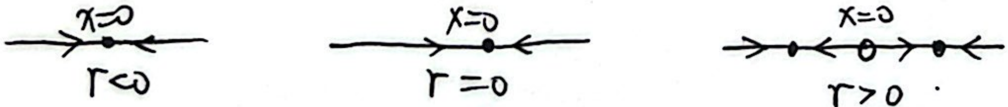


事实上. 势/动力源的高阶展开项并不会在性质上造成~~相~~突变, 影响分岔性质

只有零阶项才能定性上为跨临界分岔带来新行为

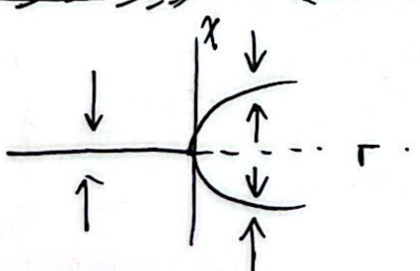
IV) 叉形分岔 Pitch-fork bifurcation

1) 超临界分岔 $\dot{x} = rx - x^3$.

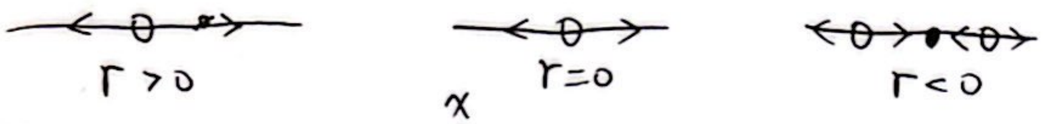


系统的解缓慢趋近于 $x=0$ (临界慢化).

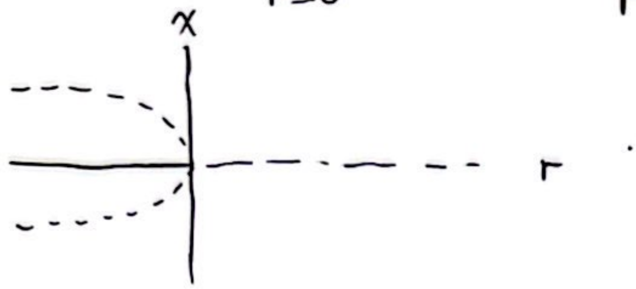
分岔图



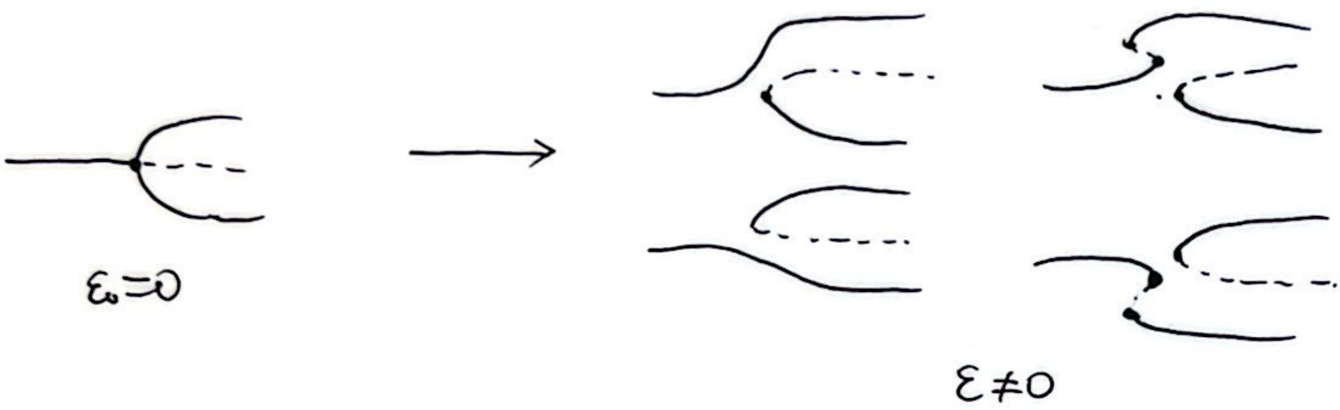
ii) 亚临界分岔. $\dot{x} = rx + x^3$



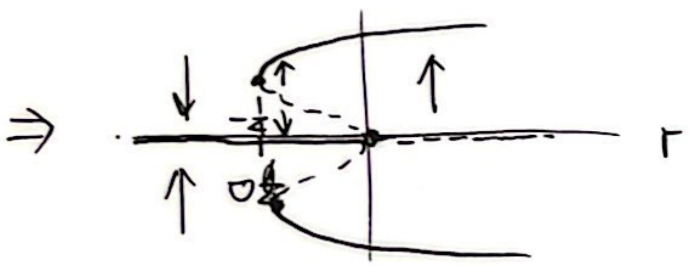
分岔图



给超…加低阶微扰 $\dot{x} = rx - x^3 + \varepsilon(r, x)$.



给次…加入高阶项 $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$

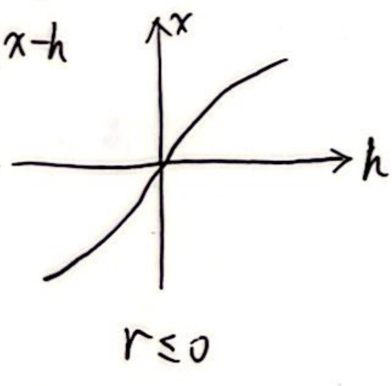


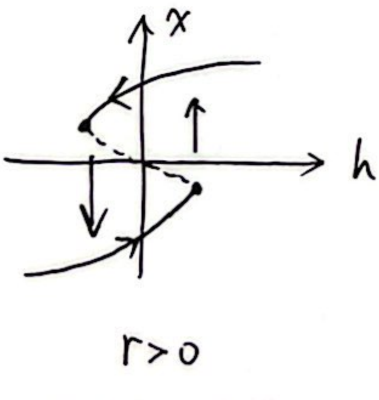
形成

D 有缺陷的叉形分岔.

eg. $\dot{x} = h + rx - x^3$. h 为缺陷型参量

分岔图 x-h

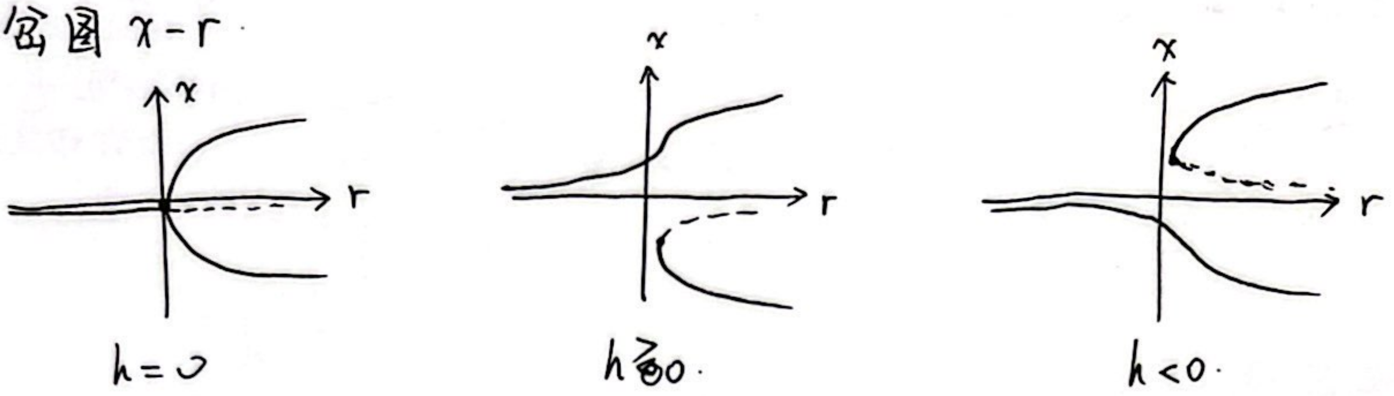




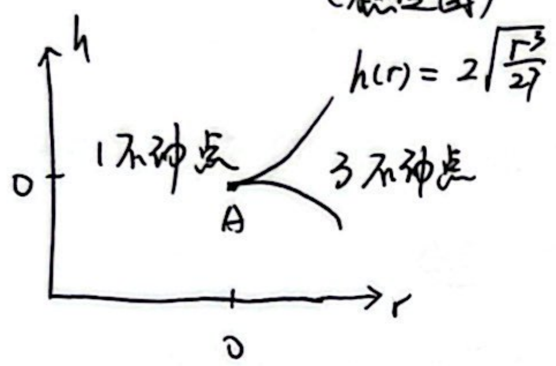
滞后效应

⇒ 类磁滞回线的双稳态分布

分岔图 $x-r$



若考虑双参量分岔曲线，即
(稳定图)



A称尖点，

边缘处发生鞍结点分岔，

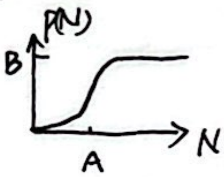
尖点处发生余维二分岔

(仅双参改变会发生)

1) 一个例子.

$\dot N = RN(1-\frac{N}{K}) - p(N)$　　N为昆虫数，K为环境承载量.

$p(N)=\frac{BN^2}{A^2+N^2}$



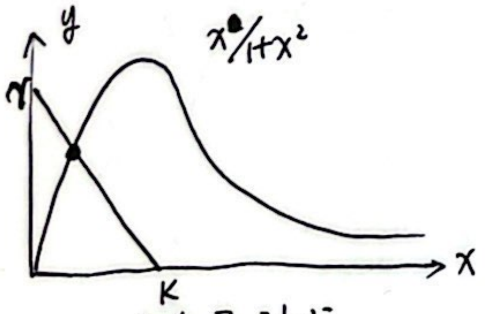
p(N)为被鸟类捕食量.

有参量 R.K.A.B. ⟶ 无量纲化

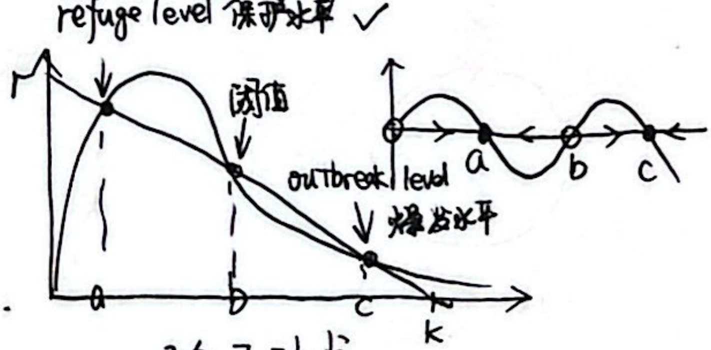
令 $\tau=\frac{Bt}{A}$.　$r=\frac{RA}{B}$ (无量纲增长率)　$k=\frac{K}{A}$ (无量纲承载量) 及 $x=N/A$. 有

$$\frac{dx}{d\tau}=rx\left(1-\frac{x}{k}\right)-\frac{x^2}{1+x^2}$$

双参量分析　　$x^*=0$ 恒不稳定.



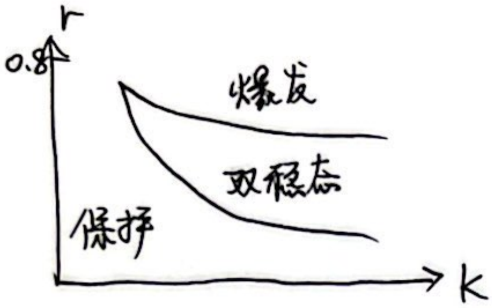
1个不动点　⟷ 分岔 ⟷　3个不动点



分岔条件：两曲线相切.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[r(1-\frac{x}{k})\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+x^2}\right] \\ r(1-\frac{x}{k}) = \frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} r = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} \\ k = \frac{2x^3}{x^2-1} \end{cases}$$ x为切点处值.

绘出分岔图



分析. 希望 $x=a$（保护）. 但初态若 $x_0>b$. 则末态 $x=c$.(爆发)

若 a.b 发生鞍结点分岔而消失. ~~不会~~

在 $x=a$ 时 x 会突跃至 $x=c$、再且.

即使 a.b 回到初态重新出现、由于滞后效应.

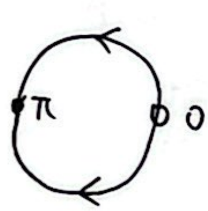
x 也无法回到 c（除非再令 b.c 发生分岔而消失）.

实际上、完全成熟的森林、$r \simeq 1$

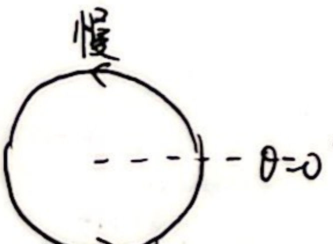
VI) 周期模型（一维）. $\dot{\theta}=f(\theta)$. $\theta\in[0.2\pi]$.

eg. $\dot{\theta}=\omega$.

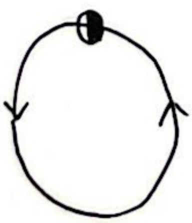
$\dot{\theta}=\sin\theta$



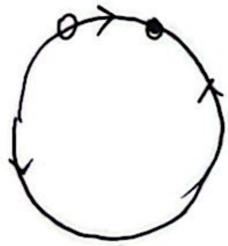
eg. $\theta=\omega-a\sin\theta$ 分岔点 $a=\omega$.



$a<\omega$



$a=\omega$



$a>\omega$

鞍结点分叉

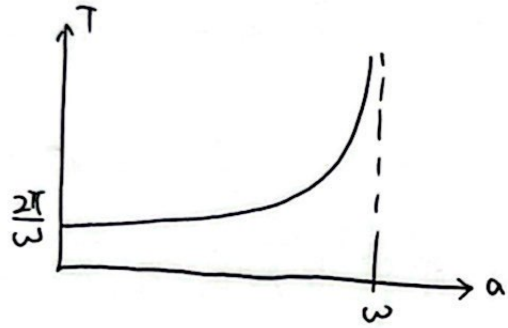
不动点 $\theta^* = \arccos\sqrt{1-(\frac{\omega}{a})^2}$. $\pi-\theta^*$

$f'(\theta^*) = -a\cos\theta^* = \mp a\sqrt{1-(\omega/a)^2}$ 一稳定一不稳定

周期 $T = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta}\, d\theta$.

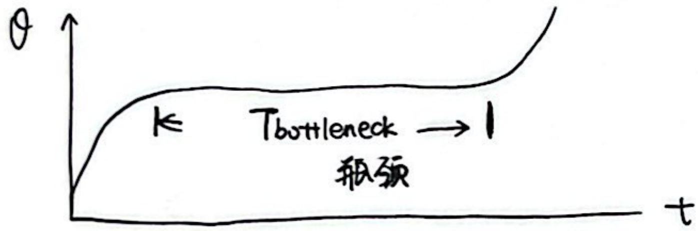
$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-a^2}} \overset{a\to\omega}{\simeq} \pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}}\frac{1}{\sqrt{\omega-a}}.$$

作出 a-T 图有



T随 $(a_c-a)^{-\frac{1}{2}}$ 发散. $a_c=\omega$

故而当 $a\to\omega$ 时, 在一个周期内, 存在 θ-t 图如下



称此种效应为 ghost effect.

「对于鞍结点分叉:在临近分叉点时同样存在此效应

eg. $\dot{x} = r + x^2$. $T_{bn} \simeq \frac{\pi}{\sqrt{r}}$. 标度律相同

(~~sinθ~~

~~III. 分岔的普遍理论(一维)~~

例1. 过阻尼摆. $mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma$

阻尼系数 b 很大时. $\ddot{\theta} \sim 0$.

$$\Rightarrow b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma$$

无量纲化 → $\frac{d\theta}{d\tau} = \gamma - \sin\theta$ $\tau = \frac{mgL}{b}t$ $\gamma = \frac{\Gamma}{mgL}$ 同上

例2 萤火虫的聚集&交配

同步发光的都是雄性. 同步性如何实现?

关键在于萤火虫会根据其它萤火虫调节自己

考虑发光为周期性振荡行为. 自身 $\dot{\theta}=\omega$. 其它 $\dot{\phi}=\Omega$

引入调节因素. $\dot{\theta}=\omega+A\sin(\phi-\theta)$

令 $\varphi=\phi-\theta$ 则 $\dot{\varphi}=\dot{\phi}-\dot{\theta}=\Omega-\omega-A\sin\varphi$

$\xrightarrow{\text{无量纲化}}$ $\dfrac{d\phi}{d\tau}=\mu-\sin\phi$ $\quad\tau=At.\quad\mu=\dfrac{\Omega-\omega}{A}$

当 $\dfrac{d\phi}{d\tau}=0$ 时. 即 $\varphi-\theta$ 为定值, ⇒ 锁相/夹带 entrainment

phase-locking

而这取决于 μ 的大小.

$\mu\in(0,1)$ 时发生锁相, 此时发光频率趋相同而不一致

$\mu>1$ 时发生相位漂移 phase drift

$\omega-A\le\Omega\le\omega+A$

例3. 离心摆的分岔行为

$$ML^2\ddot{\theta}=-Mg\sin\theta+M\Omega^2L\sin\theta\cos\theta$$

$\xrightarrow{\text{小角近似}}$ $\ddot{\theta}=\sin\theta(\Omega^2\cos\theta-g/L)$

$=\theta(\Omega^2-g/L)-\frac{1}{2}\Omega^2\theta^3.$

$\Omega^2<g/L$

$\Omega^2>g/L.$

于是可利用Ω做开关.

VII) Conditions for bifurcation in one dimensional systems

一维系统分岔条件的一般解释.

▷ 普通的一维系统, 带上参数λ后. 可认为是 $\dot{y}=g(y,\lambda)$

在 $(y,\lambda)=(y_0,\lambda_0)$ 时有不动点 $g(y_0,\lambda_0)=0$.

实际上，解不动点即 $g(y,\lambda)=0$，⇒ $y=f(\lambda)$

$y=f(\lambda)$ 在 y-λ 平面代表一条曲线.

当出现多条曲线时，若曲线相交，即出现不动点.

从而问题转化为对隐函数 $g(y,\lambda)$ 的研究.

「隐函数唯一性定理.

若 ① $g(y_0,\lambda_0)=0$，② (y_0,λ_0) 附近 g, g'_λ, g'_y 连续

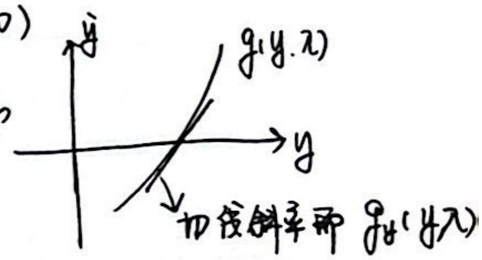
③ $g'_y(y,\lambda)\neq 0\,\big|_{(y_0,\lambda_0)}$

则满足 $g(f(\lambda),\lambda)=0$，$y_0=f(\lambda_0)$ 的函数 $y=f(\lambda)$ 唯一

即无分岔行为」

关键在于 $g'_y(y,\lambda)\neq 0\,\big|_{(y_0,\lambda_0)}$（特征值不为0）

称 $g'_y(y_0,\lambda_0)\neq 0$ 的 (y_0,λ_0) 为双曲不动点



$$\frac{dg}{d\lambda}=\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda}+\frac{\partial g}{\partial \lambda}=0$$

$$\Rightarrow f'=-g'_\lambda/g'_y$$ 由此可找到 $y=f(\lambda)$

由于 $y=f(\lambda)$ 唯一，$\frac{\partial g}{\partial y}$ 未跨越0，稳定性类型不变。

(y_0,λ_0) 附近的

故而 $g'_y(y,\lambda)=0$ 时可能出现分岔，称 (y_0,λ_0) 为非双曲不动点

（必要条件）.

此时若 $y=f(\lambda)$ 不唯一，

从不动点 (y_0,λ_0) 延伸出多条曲线，产生分岔.

例 → 鞍结点分叉 $\dot{x}=\mu-x^2$　$\partial_x f(0,0)=0$

跨临界分叉 $\dot{x}=\mu x-x^2$　$\partial_x f(0,0)=0$

叉型分岔 $\dot{x}=\mu x-x^3$　$\partial_x f(0,0)=0$

均满足非双曲条件.

→ 但如 $\dot{x}=\mu-x^3$，$\partial_x f(0,0)=0$，但不分岔.

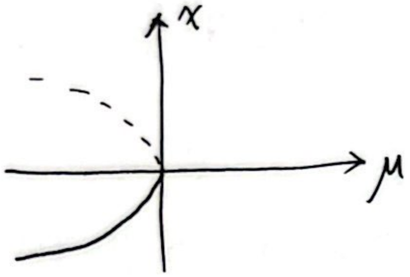
D 三种分岔行为的区分判据

· 鞍结点分岔

令 $x=y-y_0$、 $\mu=\lambda-\lambda_0$.

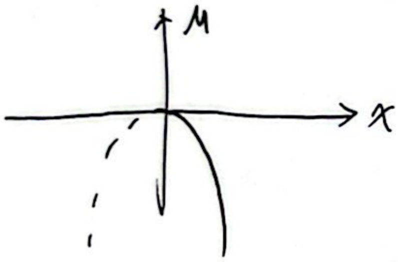
出现分岔时必有 $\begin{cases} f(0,0)=0 \\ \partial_x f(0,0)=0 \end{cases}$

分岔图



$f(x,\mu)=0 \Rightarrow x=x(\mu)$.

即有 $x'=\infty$. 不动点处



$f(x,\mu)=0 \Rightarrow \mu=\mu(x)$

即有 $\mu'=0$

$\Rightarrow$ 以 μ 为纵轴、不发生分岔. $\partial_\mu f(0,0)\neq 0$. (唯一性)

鞍结点式分岔. $d_x\mu(0)=0$; $d_x^2\mu(0)\neq 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{d\mu}{dx}=-\dfrac{\partial_x f}{\partial_\mu f}=0 \Rightarrow \text{即 } \partial_x f(0,0)=0,\ \partial_\mu f\neq 0. \\ \Rightarrow \dfrac{d^2 f}{dx^2}=\partial_x^2 f+\partial_x\partial_\mu f\,\dfrac{d\mu}{dx}+\partial_\mu^2 f\,(d_x\mu)^2+\partial_\mu f\,d_x^2\mu=0 \end{array}\right.$$

因为 $f=0$

在不动点处 $\partial_x f(0,0)=0$. $d_x\mu=0$.

$\therefore 0=\partial_x^2 f+\partial_\mu f\,d_x^2\mu \Rightarrow$ 即 $\dfrac{d^2\mu}{dx^2}=-\dfrac{\partial_x^2 f}{\partial_\mu f}\neq 0$

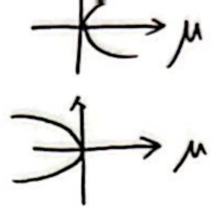
$\Rightarrow \partial_x^2 f(0,0)\neq 0$.

综上. 发生此分岔条件为

① $f(0,0)=0$. $\partial_x f(0,0)=0$ ② $\partial_\mu f\neq 0$ ③ $\partial_x^2 f\neq 0$

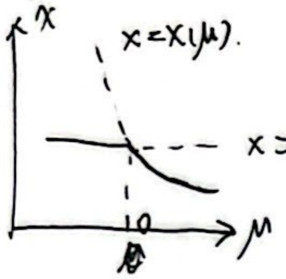
$\Rightarrow$ 必存在 μ 项与 x^2 项. $\dot{x}=\mu\pm x^2$

对于开口方向，因 $d_x^2\mu = -\frac{\partial_x^2 f}{\partial_\mu f}$ $\begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$



· 跨临界分岔

分岔图



两条曲线都存在于 $\mu=0$ 两侧
通过 $\mu=0$ 时稳定性更改

不论 $x=x(\mu)$ 还是 $\mu=\mu(x)$ 都有分岔

$$\Rightarrow \partial_x f = \partial_\mu f = 0.$$

由于 $x=0$ 为某一解. $\dot{x} = f(x,\mu) = x F(x,\mu)$.

$$\therefore F(x,\mu) = \begin{cases} f/x & x \neq 0 \\ \partial_x f & x = 0. \end{cases}$$

要求 $x=0$ 时 $F(x,\mu)$ 给出的 $\mu=\mu(x)$ 唯一.

$$\Rightarrow \partial_\mu F = \partial_x \partial_\mu f \neq 0.$$

要求不与 $x=0$ 曲线重合 $\Rightarrow \frac{d\mu}{dx} \neq 0$ or ∞
同存于 $\mu=0$ 两侧

$$\Rightarrow \partial_x^2 f \neq 0. \quad \partial_x \partial_\mu f \neq 0.$$

从而发生此分岔条件为

① $f(0,0)=0$. $\partial_x f = 0$ 隐函数的必要性条件.

② $\partial_\mu f = 0$ 隐函数条件（μ-分岔） 故一般形式为 $\dot{x} = \mu x \mp x^2$

③ $\partial_{x\mu}^2 f \neq 0$ ④ $\partial_{xx}^2 f \neq 0$

↑ ∞ ↑ 0

不与 $x=0$ 重合解. 不出现 $\mu=0$ 解

• 叉型分岔

显然 $\partial_\mu f=0$ 不论如何有分岔

$\dot{x} = xF(x,\mu)$. $F(x,\mu)$ 有鞍结点分叉 $= \begin{cases} f/x & x\neq 0 \\ \partial_x f & x=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\mu F \neq 0 \\ \partial^2_{xx} F \neq 0 \\ \partial_x F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial^2_{x\mu} f \neq 0 \\ \partial^3_{xxx} f \neq 0 \\ \partial^2_{xx} f = 0 \end{cases}$$

跨临界行为 $\partial_\mu f=0$. $\partial^2_{xx} f \neq 0$ (舍) $\partial^2_{x\mu} f \neq 0$.

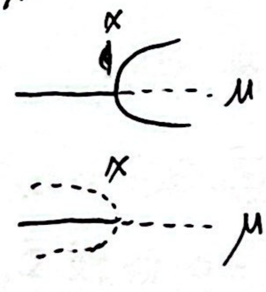
综上, 发生此分岔行为的条件是.

① $f(0,0)=0$. $\partial_x f=0$

② $\partial_\mu f=0$ ③ $\partial^2_x f=0$ ④ $\partial^2_{x\mu} f\neq 0$ ⑤ $\partial^3_x f \neq 0$

故而一般形式为 $\dot{x}=\mu x \mp x^3$.

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = \frac{-\partial^3_x f}{\partial^2_{x\mu} f} \cdot \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$$



~~故而~~

Lecture 4. Two-dimensional Linear Systems

在一维相空间中，流动极为受限，轨迹单调且恒定。

在更高维相空间中，更大范围的动力学行为成为可能。

I) Definition and examples of 2-D linear systems.

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$　　$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.　　常数项不存在，

不动点 $\vec{x}^* = \vec{0}$.

eg1. Simple harmonic oscillator 简谐振子

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x \end{cases}$$

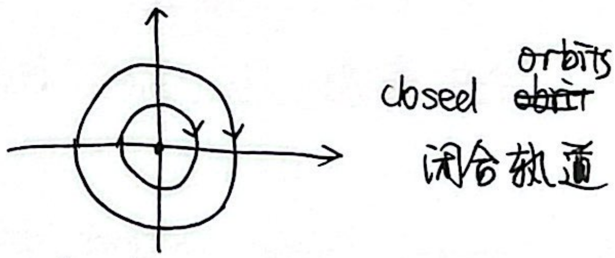
在 $v-x$ 相空间中，这代表了一个矢量场。

动力学行为变成具有局部速度的相平面上的假想稳定流。

对每一初态 (x_0, v_0)，可观察其如何被流推动。

画出 phase portrait 如右

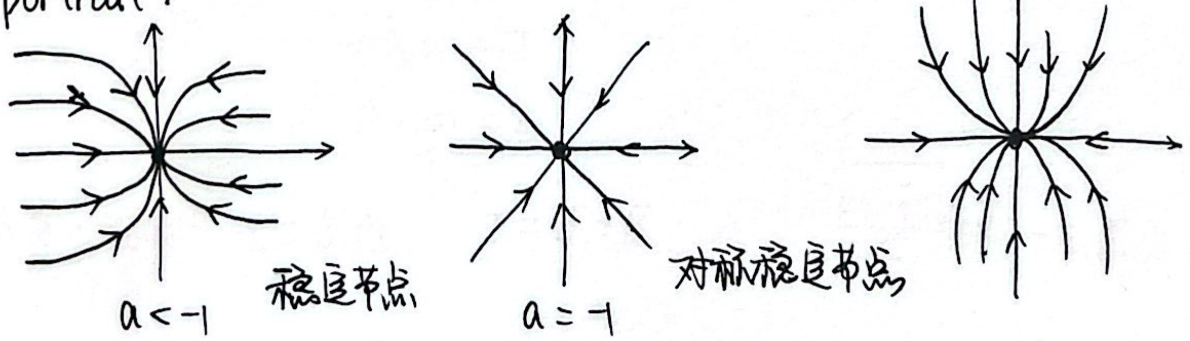
(相空间中轨迹的总体图)

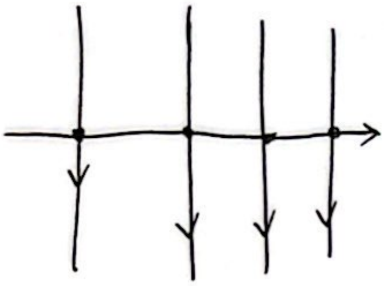


eg.2. uncoupled dynamics 非耦合系统

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = x_0 e^{at} \quad y = y_0 e^{-t}$$

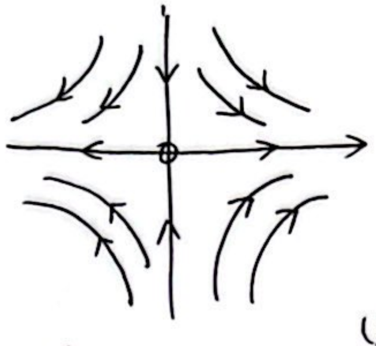
phase portrait:





不动线

$\alpha=0$



鞍点
(有稳定&不稳定流形)

$a>0$.

⇒ 稳定性の分类

① Attracting：$t\to\infty$ 时 附近点 $x\to x^*$)

② Globally Attracting: $t\to\infty$ $\forall x\to x^*$

③ Lyapunov Stable：充分接近 x^* 的 x 始终保持接近.

④ Neutrally Stable：Lyapunov 稳定而不吸引
中性.

⑤ Attracting but not Lyapunov stable

Stable / asymptotically Stable：Attracting and Lyapunov Stable.
渐近

~~其余情况~~ Unstable：Neither - - -

II) General linear systems and Classification. 一般线性系统的分类

由 $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}$ 可得 $\vec{x}=c e^{\lambda t}\vec{v}_i$ $\vec{v}_i$ 本征矢. λ_i 本征值

解本征方程 $\det(A-I)=0$ ⇒ $\lambda^2-\tau\lambda+\Delta=0$.

$\tau=\mathrm{tr}(A)$

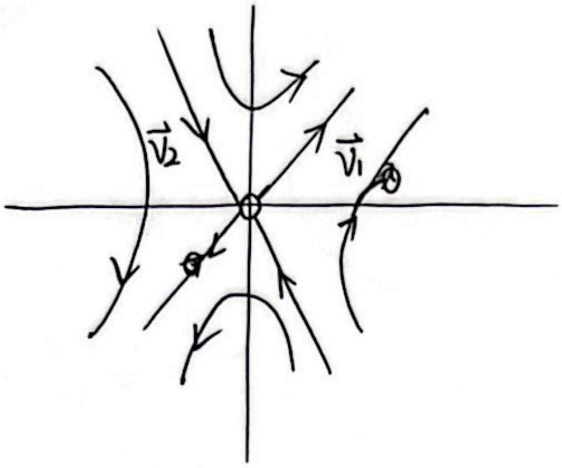
$\Delta=\det A$.

$\lambda_{1,2}=\dfrac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}$ $\lambda_1+\lambda_2=\tau$ $\lambda_1\lambda_2=\Delta$ 进一步可得 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

例. $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&-2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=2 \quad \lambda_2=-3.$ $\quad c_1=c_2=1.$

$(x_0,y_0)=(2,3)$ $\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

作图

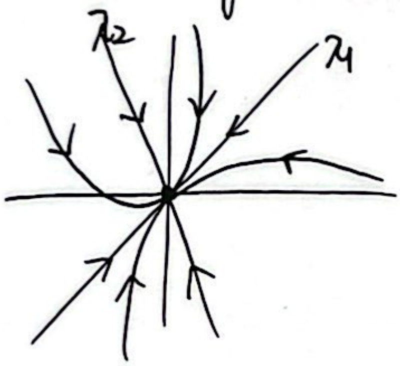


$\lambda>0$ 时不稳

$\lambda<0$ 时稳

不动点为鞍点

一般性 $\rightarrow$ eg. $\lambda_2<\lambda_1<0$.



轨迹通常接近与 λ_1 的方向.

例. $\lambda_{1,2}$ 为复根、 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\omega$. $\quad \alpha=\frac{\tau}{2}$ $\quad \omega=\frac{1}{2}\sqrt{4\Delta-\tau^2}$

$$\vec{x}=c_1e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2.$$

① $\alpha=\mathrm{Re}(\lambda)<0$. ② $\alpha>0$ ③ $\alpha=0$.

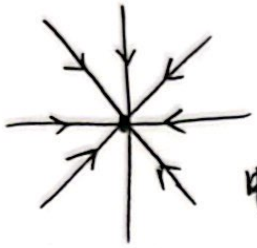
Decaying oscilltions

spiral 螺旋点

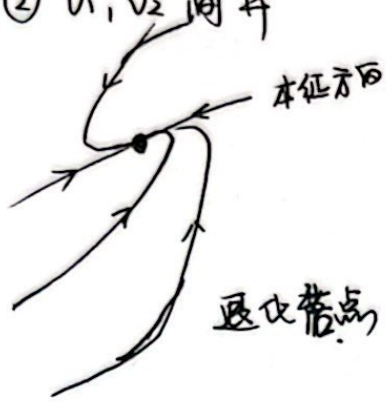
center 旋转中心点

例. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 简并.

① v_1, v_2 不简并

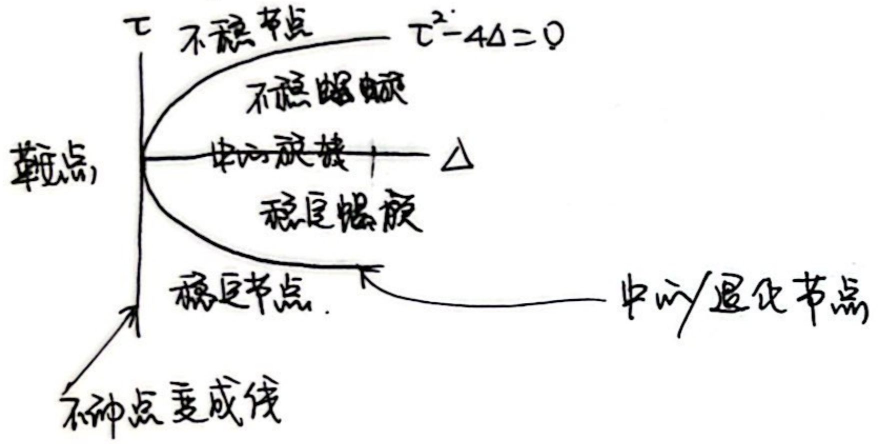


② v_1, v_2 简并



$t\to\infty$ 时.
所有轨迹与 v //

综上. 作 $\Delta-\tau$ 相图



由此 分析 系统.

Lecture 5 Two-dimensional nonlinear systems

I) General property 一般属性

在相平面上，向量场的一般形式为

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

关键：定性的行为 —— 从 $\vec{f}(\vec{x})$ 中直接找出相轨迹.

① 不动点 fixed points $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$

② 闭合轨迹. closed orbits

③ 不动点与闭合轨迹附近的轨迹分布

④ 不动点与闭合轨迹的稳定性.

$\dot{\vec{x}} = 0$ 定义出了两条零解线 nullclines $f_1(x, y) = 0$. $f_2(x, y) = 0$.

零解线 判定了 1) 何处的流是完全垂直/平行的.

2) 将相平面分区. 不同区 $\dot{x}, \dot{y}$ 符号不同.

II) Existence. Uniquness, and Topological Consequences.

存在且唯一性定理： 考虑初值问题 $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$

假设 $\vec{f}$ 连续并且对其所有偏导 $\partial f_i / \partial x_j$，对 $\vec{x}$ 在某开连通集 $D \subset R^n$ 上连续. 则对 $\vec{x}_0 \in D$. 初值问题在某个 $(-t, t)$ 时间间隔内存在唯一解 $\vec{x}(t)$. 即不同轨迹永不相交.

Question

i) 闭合轨道内的轨迹如何运行？

ii) 鞍点的不稳定分支与稳定分支会交叉？

III) Fixed point and Linearization

考虑 $\dot{x}=f(x,y)$ $\dot{y}=g(x,y)$. $f(x^*,y^*)=0$

令 $u=x-x^*$, $v=y-y^*$ (小微扰)

则 $\dot{u} = u\dfrac{\partial f}{\partial x} + v\dfrac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$

$\dot{v} = u\dfrac{\partial g}{\partial x} + v\dfrac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$

即 $$\underbrace{\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}}_{\text{微扰的演化方程}}$$ 令 $A = \left.\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|_{(x^*,y^*)}$

线性化系统即忽略二次项. ~~这是合理的~~!

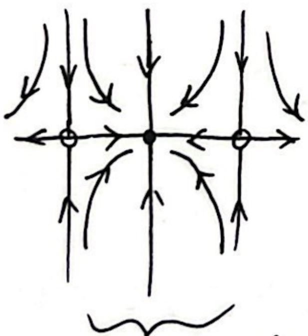
eg1. $\dot{x} = -x + x^3$ $(x^*,y^*) = (0,0), (1,0)\ (-1,0)$

$\dot{y} = -2y$

$$A = \begin{pmatrix}-1+3x^2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$(0,0)$ 稳定节点 $(\pm1,0)$ 鞍点 ⇒ 系统对称性

画出相图



吸引域/盆 basin of attraction

e.g.2. 小的非线性项将 center 变为 spiral

$$\dot{x} = -y + ax(x^2+y^2)$$
$$\dot{y} = x + ay(x^2+y^2)$$

$(x^*, y^*) = (0,0) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \forall a$, $(0,0)$ 为 center 点,

是否正确?

改 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 有

$$\begin{cases} \dot{r} = ar^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

实际上仅在 $a=0$ 时成立为 center 点,

这说明线性近似对节点 (sadde, node or spiral) 判断可行.

但对临界情况 (centers, degenerate nodes, stars, non-isolated fixed points)

判断需要谨慎.

~~center~~ 只是 stars, deg··· nodes 稳定性不受小的非线性项影响

▷ 如果我们只对稳定性 stability 感兴趣.

robust case: ① repeller (源) $Re(\lambda_{1,2}) > 0$

② attractor (汇) $Re(\lambda_{1,2}) < 0$.

③ saddles (鞍) ~~$Re(\lambda_{1,2})$~~ $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ or 反之

marginal case: ① centers $Re(\lambda_{1,2}) = 0$

② non-isolated fixed points $\lambda_{1/2} = 0$

▷ Hyperbolic Fixed Points 双曲不动点, Topological Equivalence 拓扑等价

Structural Stability 结构稳定性.

Hy⋯s： $Re(\lambda_i)\neq 0$. ⇒ 稳定性不受小非线性项影响

No hy ⋯ 至少存在一个λ, $Re(\lambda)=0$. 反之.

Hartman-Grobman theorem：

双曲不动点附近的相图在拓扑上线性化后等价（同胚）.

structurally stable：拓扑不因小非线性项改变.

spiral ⇔ node

eg. 种间竞争. 羊与兔.

Lotka-Volterra model $\dot{x}=rx(1-\frac{x}{k})$.

Assumption：① 无对方时增长至承载量（Logistic growth）

② 冲突发生率 $\propto$ 规模

冲突对兔影响更大

$$\dot{x}=x(3-x-2y) \quad 兔$$
$$\dot{y}=y(2-x-y) \quad 羊$$
$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-x-2y \end{pmatrix}$$

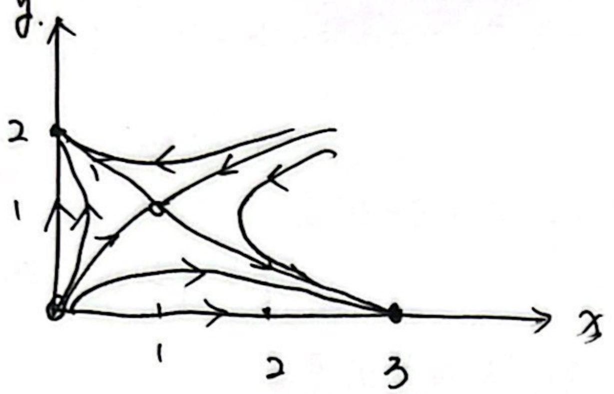
$(x^*, y^*)=(0,0)$ $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ unstable node. $\lambda=2$ $\vec{v}=(0,1)$

$(0,2)$ $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ stable node. $\lambda=-1$ $\vec{v}=(1,-2)$

$(3,0)$ $A=\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ stable node. $\lambda=-1$ $\vec{v}=(3,-1)$

$(1,1)$ $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda=-1\pm\sqrt{2}$ saddle.

从而



- 域边界为鞍点稳定分支 (分界 sepearatrice) 划分了长期行为分类边界

结论：种间竞争导致无法共存.

- 吸引域 $\vec{x}_0$ that $\vec{x}(t)\to x^*$, 当 $t\to\infty$.

IV) Conservative and dissipative systems 保守和耗散系统

对保守系统 Conservative system: $m\ddot{x}+\frac{dV}{dx}=0$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)\right]=0$. 令 $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V(x)$, 守恒.

即保守系统为保守量存在的系统

∴ 给出 $\dot{\vec{x}}=\vec{f}(\vec{x})$, 则对应的保守~~量为~~ $E(\vec{x})$ 函数.

在每条轨迹上 $dE/dt=0$

对相空间体积来说 $\frac{dV}{dt}=\oint\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint(\nabla\cdot\vec{F})\,dV$ $\vec{F}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\vec{v}$

$\nabla\cdot\vec{v}=0$ ⇒ 保守系统 (雅可比行列式值为1) ($\nabla\cdot\vec{v}=\sum\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_i}$)

$\nabla\cdot\vec{v}>0$ ⇒ 扩展系统

$\nabla\cdot\vec{v}<0$ ⇒ 耗散系统

e.g. 二维系统, 若 $\nabla\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0$. 其中 $\vec{v}=(f,g)$

~~2d~~ 对高维系统同理.

e.g. 埃农映射, $x_{n+1}=A-By_n-x_n^2$
$y_{n+1}=x_n$.
$\Rightarrow |J|=B$.
B=1 时为保守系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

则 $\nabla\cdot\vec{F} = a+d$ $\qquad \nabla\times\vec{F} = (c-b)\hat{z}$

鞍点：散度可有可无，旋度可有可无.

结点：有散度

螺旋点：有散度，有旋度. 中心点：无散度，有旋度

例. $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = x - x^3$

$\therefore \begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3\end{cases}$. $\qquad (x^*, y^*) = (0,0), (\pm 1, 0)$

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-3x^2 & 0\end{pmatrix}$$

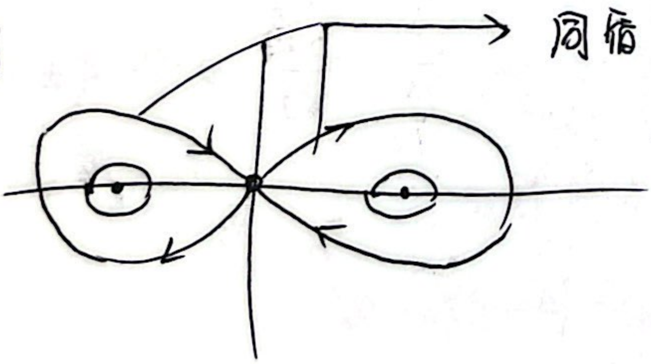
$(0,0)$ $\quad \Delta = -1$ $\quad$ 鞍点

$(\pm 1, 0)$ $\quad \tau = 0$ $\quad \Delta = 2$ $\quad$ 中心点

$\because \nabla\cdot\vec{F} = 0$ $\quad \therefore$ 系统保守

$E = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \text{const}$.

画出相图



同宿轨道 Homoclinic orbits.

有同一起始结束点，而不同

(非周期，$t\to\infty$)

另有异宿轨道 Heteroclinic orbit

起始于一固定点，结束于另一固定点的不同轨道。

（亦称鞍形连结）

V) 2D dynamics 的势 potential

$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. $\dot{\vec{x}} = -\nabla V$ $\Rightarrow$ $\dot{x}_1 = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_1}$

$\dot{x}_2 = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_2}$.

$dV(\vec{x}) = -f_1(\vec{x})dx_1 - f_2(\vec{x})dx_2$

即 $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$. $\Longleftrightarrow$ 系统有势（梯度系统）

轨道沿梯度下降

eg $\dot{q}_1 = -\alpha q_1 - \beta q_1(q_1^2 + q_2^2)$

$\dot{q}_2 = -\alpha q_2 - \beta q_2(q_1^2 + q_2^2)$ $\beta > 0$

$\Rightarrow V(\vec{q}) = \frac{\alpha}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{4}\beta(q_1^2 + q_2^2)^2$.

$\alpha < 0$ 时出现"鞍点"

双曲：$V = x_1^3 + x_2^3 + w x_1 x_2 - u x_1 - v x_2$

椭圆：$V = x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + w(x_1^2 + x_2^2) - u x_1 - v x_2$

抛物：$V = x_1^2 x_2 + w x_2^2 + t x_2^3 - u x_1 - v x_2 + \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4)$

高维 $\longrightarrow$ $\forall i, j$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

VI) Vector field decomposition 矢量场分解.

对非梯度系统. $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}_g(\vec{x}) + F_c(\vec{x})$.

$\vec{F}_g = -\nabla V(\vec{x})$. $\nabla \times \vec{F}_g = 0$. 有源无旋

$\nabla \times \vec{F}_c \neq 0$ $\quad$ $\nabla \cdot \vec{F}_{gc} = 0$ 无源有旋.

分解不唯一 $\xrightarrow[\vec{F}_c \cdot \vec{F}_g = 0]{\text{正交条件}}$

▷二维线性系统

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} a & r \\ r & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b-r \\ c-r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}ax^2 - rxy - \frac{1}{2}dy.$$

此时 $\vec{F}_c = ((b-r)y, (c-r)x)$

$\vec{F}_g = (ax + ry,\ rx + dy)$

$$\Rightarrow a(b-r)xy + r(b-r)y + r(c-r)x + d(c-r)yx = 0.$$

$$-(x+y)r^2 + [cx + by - (a+d)xy]r + (ab+cd)xy = 0$$

▷二维非线性. ⇒ 自行分解.

VII) Deterministic motion

Liouville equation.

Langevin ~ 三大方程

Fokker-Planck ~

确定性运动

$\downarrow$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t)$$

· 刘维尔方程

$$\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{F_j\, p(\vec{x},t)}_{\text{Flux 通量}}$$

$\xrightarrow{\text{解}} p(\vec{x},t) = \delta(x_1 - x_1(t))\,\delta(x_2 - x_2(t))$

$x_1(t)$, $x_2(t)$ 由 $\vec{F}$ 决定.

· 朗之万方程. $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},t) + \xi(t)$

$\langle \xi(t)\,\xi(t') \rangle = 2D\,\delta(t-t')$ Gaussian 白噪声

$\Updownarrow$

· 福柯-普朗克方程 概率通量 $\vec{J} = \vec{F}p - D\nabla p$

则 $\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \vec{J}$

扩散各向同性

稳态解 stationary solution $p_{ss}(\vec{x})$: $\frac{\partial p_{ss}}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{J}_{ss} = 0$.

力可定义为 $\vec{F} = (D\nabla p_{ss}(\vec{x}) + J_{ss})/p_{ss}$

$$= D\nabla \ln p_{ss} + \frac{J_{ss}}{p_{ss}}$$

▷ 细致平衡 $J_{ss} = 0$ (稳态) $\vec{F} = D\nabla \ln p_{ss} = -\nabla V(\vec{x})$

从而非平衡势 $V(x) = -D\ln p_{ss}$

此时满足 $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$

▷ $J_{ss} \neq 0$ 不能达成细致平衡

$$\vec{F} = D\nabla \ln p_{ss}(x) + J_{ss}/p_{ss}$$

$$= -\nabla U(\vec{x}) + \vec{F}_{curl}$$

$\downarrow$ potential landscape

$\vec{F}_{curl}$ ↳ rotationl flux 环通量

可见，稳态概率分布只要 $\vec{F}$ 拆分合理，是可以得到的，

只是 $\vec{F}_{curl}$ 的存在使得 细致平衡无法达到

VIII) 应用. 基因输入函数

① A. B. C. D repressor $\longrightarrow$ gene x

m protein A + promoter D $\rightarrow$ complex C

$$D + mA \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{C} = k_1 D A^m - k_2 C \\ \dot{D} = -\dot{C} \end{cases} \qquad D + C = D_T$$

$\because$ $V_{binding} \gg V_{transcription}$ $\Rightarrow \begin{cases} C = D_T \dfrac{A^m}{\theta_A^m + A^m} \\ D = D_T - C = \dfrac{\theta_A^m}{\theta_A^m + A^m} \end{cases}$ Hill func

$$\theta_A = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$\therefore$ mRNA (M) 有 $\dot{M} = \alpha_0 D + \alpha_1 C - \gamma_m M$

↳ decays

when C activator $\alpha_1 \gg \alpha_0$ $\quad k_0 = \alpha_0 D_T$ $\quad k_1 = (\alpha_1 - \alpha_0) D_T$

$$\dot{M} = k_0 + k_1 \frac{A^m}{\theta_A^m + A^m} - \gamma_m M$$

when C repressor $\alpha_1 \ll \alpha_0$. $k_0 = \alpha_1 D_T$ $\quad k_0 = (\alpha_0 - \alpha_1) D_T$

k_0 皆表示本征/基础活动

② Transcription

③ protein 有 $\dot{P} = k_2 M - \gamma_p P$

$\hookrightarrow$ decay

∵ $\gamma_M >> \gamma_P$. $\frac{dM}{dt} = 0$ (稳态)

$$\dot{P} = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1 \frac{A^n}{\theta_A^n + A^n} - \gamma_p P \quad \text{(activator)}$$

$$\tilde{k}_0 = \frac{k_2 k_0}{\gamma_M} \qquad \tilde{k}_1 = \frac{k_2 k_1}{\gamma_M}$$

③ TF X 的 inducer s.

$$s + X \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} X_s \qquad n X_s + D \underset{k_{off}}{\overset{k_{on}}{\rightleftharpoons}} C$$

$$X_s = X_T \cdot \frac{s/K_s}{1 + s/K_s} = \frac{X_T s}{s + K_s} \qquad K_s = k_+/k_-$$

$$X = \frac{X_T K_s}{s + K_s} = X_T - X_s$$

X: activator: $\frac{dM}{dt} = a + b \frac{X_s^n}{K_D + X_s^n} - cM$

$K_D = \frac{k_{off}}{k_{on}}$

repressor $\frac{dM}{dt} = a + b \frac{K_D}{K_D + X_s^n} - cM$

④ 两推

i) X、Y (TF) 独立.

$\dot{M} = a +$ 四项 $- cM$.

↑ 四选一, 取决于 X、Y 性质

iii) X, Y (TF) 竞争性结合

- - - -

IX) Index theory 指标理论

闭合曲线 closed curve 的指数 $I_c = \frac{1}{2\pi}[\phi]_c$ = 不动点个数

ϕ 为矢量逆时针沿曲线一圈变化的角度

① ~~若C~~ 拓扑不变, 指标

② 不包含 (x^*, y^*) 的 index = 0

③ 时间反演不变

④ 若C为闭合轨道 Index = 1

↑

螺旋, 中心, 星, degenerate node, (退化结点)

Lecture 6. Limit cycle 极限环.

1) Definition and property.

定义. isolated closed trajectory. 孤立闭合轨道.

附近轨道不闭合.

stable

unstable

— half-stable

稳定极限环会表现出无外部周期性受迫下的自持振荡

— robust

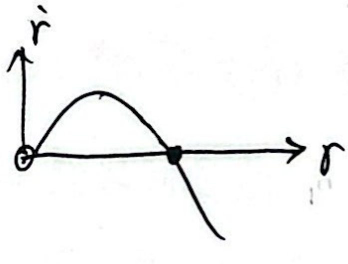
极限环不出现在线性系统中, 否则不 isolated.

eg. $a\vec{x}$ 与 $c\vec{x}$.

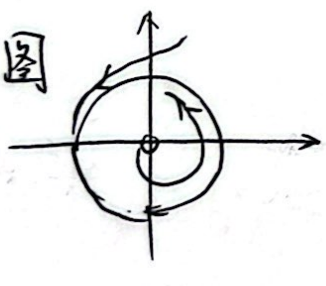
— 不由初态决定.

eg. $\dot{r} = r(1-r^2)$

$\dot{\theta} = 1$

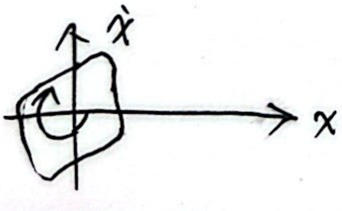


相图



eg. Van Der Pol oscillator $\ddot{x} + \mu(x^2-1)\dot{x} + x = 0$.

相图



II) Rulling out closed orbits.

① 利用 index

必要条件. index = 1

无轨道交叉

② Gradient Systems 梯度系统. $\dot{\vec{x}} = -\nabla V(\vec{x})$ 不存在 closed orbit.

注意. 梯度系统 ≠ 保守系统

$\dot{\vec{x}} = -\nabla V(\vec{x})$ $\ddot{\vec{x}} = -\nabla V(\vec{x})$.

③ Lyapunov Functions.

考虑 $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$.

若存在连续可微实函数 $V(x)$.

① $\forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$. $V(\vec{x}) > 0$

② $\dot{V}(\vec{x}) < 0$.

则 $\vec{x}^*$ 全局稳定.

$t \to \infty$ 时 $x(t) \to x^*$. ①

Lyapunov 系统可沿任何趋于降低路径下降. 不存在 closed orbit.

eg. ① $\begin{cases} \dot{x} = -x+4y \\ \dot{y} = -x-y^3 \end{cases}$

$V(x,y) = x^2+ay^2$.

$\dot{V}(x,y) = -2x^2+(8-2a)xy-2ay^4$

$\xrightarrow{a=4} \dot{V} = -2x^2-3y^2$.

④ Dulac's Criterion 杜拉克标准

若可找到 $g(\vec{x})$. s.t $\nabla\cdot(g\vec{f})$ 在 R 上符号不变,

则 closed orbits 不存在.

$$\iint_A \nabla\cdot(g\dot{\vec{x}})\, dA = \oint_C g\dot{\vec{x}}\cdot\hat{n}\, dl = 0$$

$\neq 0$

eg. $\dot{x} = x(2-x-y)$

$\dot{y} = y(4x-x^2-3)$.

令 $g = \frac{1}{xy}$

$\nabla\cdot(g\dot{\vec{x}}) = -\frac{1}{y} < 0$.

eg. $\dot{x} = y$

$\dot{y} = -x-y+x^2+y^2$

令 $g = e^{-2x}$

$\nabla\cdot(g\dot{\vec{x}}) = -e^{-2x} < 0$.

III) Poincare - Bendixson Theorem 庞加莱-本迪逊定理

1) R 是平面的闭边界子集

2) $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ 是包含 R 的开集上的连续可微向量场

3) R 不包含任何不动点

4) 存在轨迹 C, 在 R 中开始, $\forall t$ 仍在 R 中(即在 R 中确定)

$\Rightarrow$ R 中包含 closed orbit

↳ Trapping region 捕捉区

eg. $\dot{r}=(1-r^2)r+\mu r\cos\theta$

$\dot{\theta}=1$

⇒ R 为 $0.999\sqrt{1-\mu}<r<1.001\sqrt{1+\mu}$.

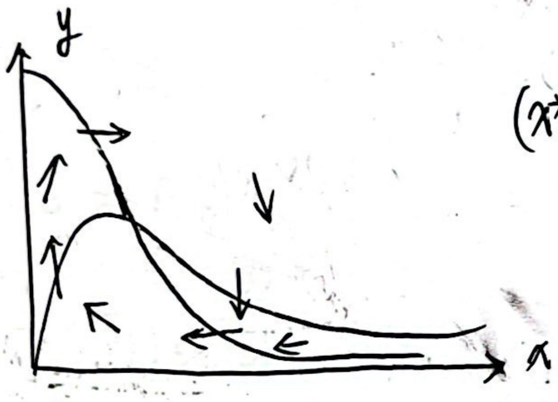
例1. 通过不动点区域检查寻找捕捉区.

$$\dot{x}=-x+ay+x^2y \qquad \xrightarrow{\dot{x}=0} \; y=\frac{x}{a+x^2}$$

$a, b>0$.

$$\dot{y}=b-ay-x^2y \qquad \xrightarrow{\dot{y}=0} \; y=\frac{b}{a+x^2}$$

画出相图



$(x^*, y^*)=(b, \frac{b}{a+b^2})$

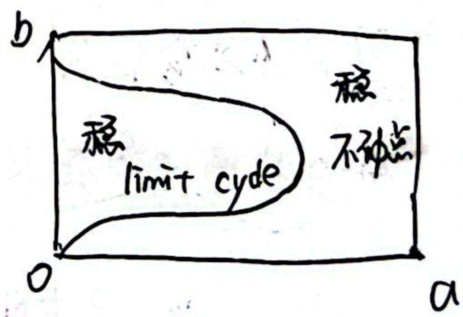
不动点为排斥点 → 考虑 P-B Theorem

$$A=\begin{pmatrix} -1+2xy & 0+x^2 \\ -2xy & -(a+x^2) \end{pmatrix}$$

$\Delta=a+b^2>0$

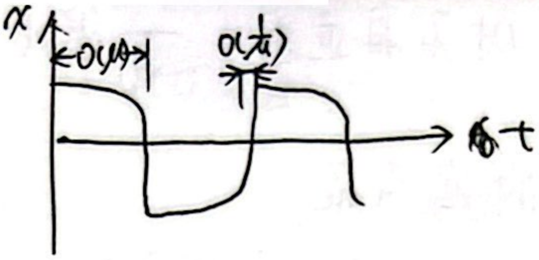
$$\tau=\frac{b^4+(2a-1)b^2+(a+a^2)}{a+b^2}.$$

$\tau=0$ 当 $b^2=\frac{1}{2}(1-2a\pm\sqrt{1-8a})$ ⇒



⇒ $a=0.08$, $b=0.6$ 可

考虑 $x-t$ 图



$\dot{x} \sim 0$ 时 $y \sim F(x)$. $\dot{y} = F'(x)\,\dot{x} = (x^2-1)\,\dot{x} = -\frac{x}{\mu}$

$\Rightarrow T = \mu[3-2\ln 2] \sim O(\mu)$

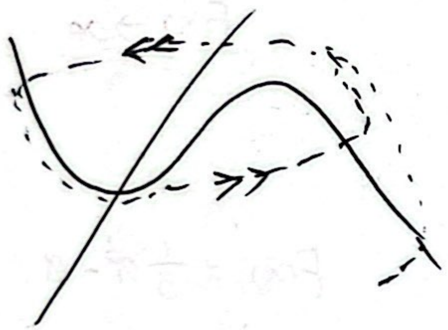
VI) Excitability & Canard explosion 兴奋与金丝雀爆炸

• FitzHugh-Nagumo 模型

$\dot{x} = x - \frac{1}{3}x^3 - y$

$\dot{y} = \varepsilon(x-ay-b)$ $0<\varepsilon \ll 1$ 兴奋性可用 $\frac{1}{\varepsilon}$ 表征

$\Rightarrow$



类似于上面的~~弛~~张弛振荡

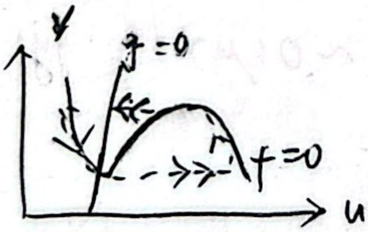
但快慢置换了 . why

• General form for Excitability system

u: trigger variable $\partial_t u = \frac{1}{\varepsilon} f(u,v) + D_u \nabla^2 u$

v: recovery variable. $\partial_t v = g(u,v) + D_v \nabla^2 v$

$\rightarrow$



注意！此定理 $n>2$ 时不再适用 —混沌

IV) Lienard System 利纳德系统

范德波尔振荡器 $\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0$.

$\xrightarrow[\text{equation}]{\text{Lienard's}}$ $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$.

类阻尼 类恢复力

若 1) f, g 对 x 连续可微

2) g 为奇函数 3) $x>0 \Longrightarrow g(x)>0$.

4) f 为偶函数. 5) $F(x)=\int_0^x f(u)\,du$. 有 $x^*=a>0$.

$F(x)<0$. $x\in(0,a)$.

$F(x)>0$ $x\in(a,+\infty)$

$F(x)\to\infty$ $x\to\infty$.

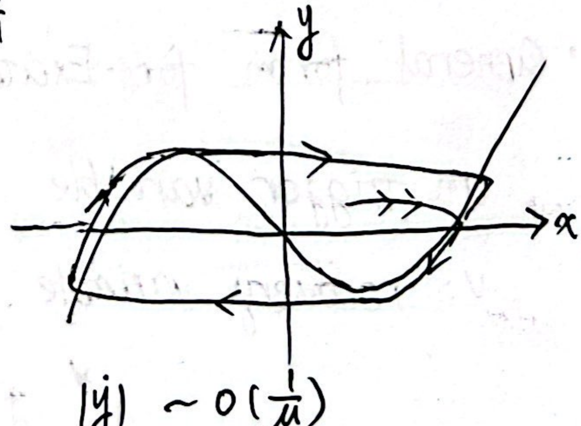
则 极限环 ✓

V) 弛豫振荡 (类脉冲)

$\ddot{x}+\mu\dot{x}(x^2-1)=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}+\mu\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\right)$ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x$. $w=\dot{x}+\mu F$

$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=w-\mu F(x)\\ \dot{w}=-x\end{cases}$ 令 $y=\frac{w}{\mu}$

$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=\mu[y-F(x)]\\ \dot{y}=-\frac{1}{\mu}x\end{cases}$ $\xrightarrow[\mu>>1]{\text{一般的相图}}$



此时 $y\sim O(1)$ $|\dot{x}|\sim O(\mu)$ $|\dot{y}|\sim O(\frac{1}{\mu})$

其

对于 $u=u(t)$ $v=v(t)$. 有

$$\varepsilon\, d_t u = f(u,v)$$
$$d_t v = g(u,v)$$

$\varepsilon \ll 1$

要求 ① 非线性系统

② 两种非常不同的时间尺度

特点 ① 只有一种稳态，能抗小微扰

② 存在阈值，超过阈值系统被激发

③ 恢复稳态需要弛豫时间（不应期）

小振幅振荡 $\longleftrightarrow$ 弛豫振荡 "N" + "/"

eg. BZ反应

$$A+Y \xrightarrow{k_1} X+P$$
$$X+Y \xrightarrow{k_2} 2P$$
$$A+X \xrightarrow{k_3} 2X+Z$$
$$X+X \xrightarrow{k_4} A+P$$
$$B+Z \xrightarrow{k_5} fY$$

$$\dot{X} = k_1AY - k_2XY + k_3AX - 2k_4X^2$$
$$\dot{Y} = -k_1AY - k_2XY + k_5 fBZ$$
$$\dot{Z} = k_3AX - k_5BZ$$

取 $\tau = t/T$ $x = X/X_0$ $y = Y/Y_0$ $z = Z/Z_0$

无量纲化 $\rightarrow$

$$\frac{dz}{d\tau} = x - z$$
$$\varepsilon_1 \frac{dx}{d\tau} = x - x^2 - y(x-q)$$
$$\varepsilon_2 \frac{dy}{d\tau} = -qy - xy + fz$$

$T = \frac{1}{k_5B}$ $X_0 = \frac{k_3A}{2k_4}$ $Y_0 = \frac{k_3A}{k_2}$

$\varepsilon_1 = \frac{k_5B}{k_3A}$ $q = \frac{2k_1k_4}{k_2k_3}$

$\varepsilon_2 = \frac{2k_4k_5B}{k_2k_3A}$

由数据 $\varepsilon_1 \sim 10^{-2}$ $\varepsilon_2 \sim 10^{-4}$ 故 $\frac{dy}{d\tau}=0$ 最快.

$\Rightarrow y = fz/(q+x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 \frac{dx}{d\tau} = x - x^2 - fz\,\frac{x-q}{x+q} \\ \frac{dz}{d\tau} = x - z \end{cases}$$

$\boxed{\text{化学波}}$ oregonator

此时,若因 x 平衡远快于 z,使 $\frac{dx}{d\tau}=0$

共存性质均被掩藏、

Lecture 7. Bifurcation in 2D systems.

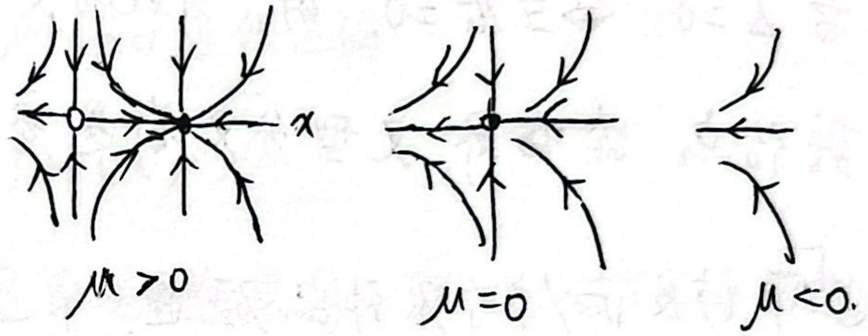
不动点/闭合轨/鞍点连结 个数/稳定性 的改变

I) Saddle-Node, Transcritical & Pitchfork Bifurcation.

鞍结点、跨临界和叉型分岔.

- Saddle-Node Bifurcation 鞍结点分岔.

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \Rightarrow$$



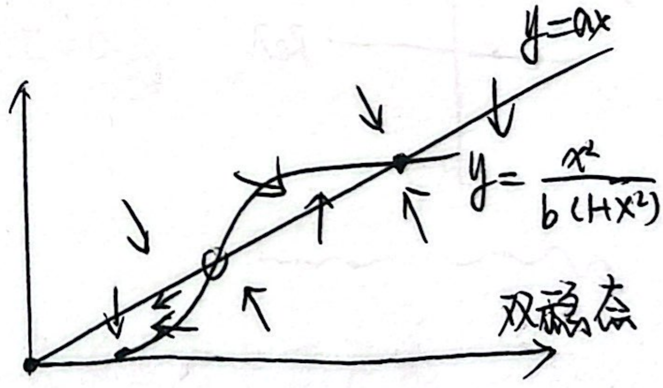
高维分岔一定是在某个子空间(一维)上的分岔

额外维度的流动来自子空间的简单吸引(排斥).

eg. Genetic switch

$\dot{x} = -ax + y$ mRNA

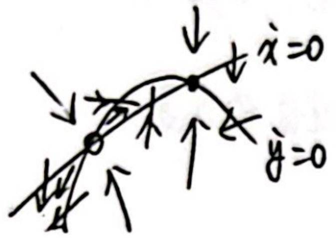
$\dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - by$ protein.



$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2b^2}}{2ab} \qquad a_c = \frac{1}{2b}. \qquad A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}.$$

分岔点 $x=1$. $\Delta = 0$

对一般情况 $\dot{x}=f(x,y)$ $\dot{y}=g(x,y)$



两零解线两交点→一稳/不稳结点+一鞍点.

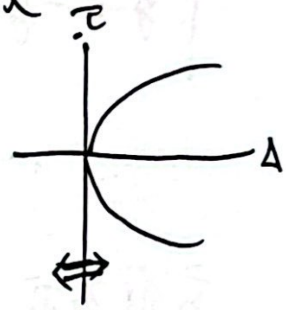
即分岔图两支均可能不稳定.

更多的、……　统一分岔条件均在$\lambda=0$.

I) 零特征值分叉.

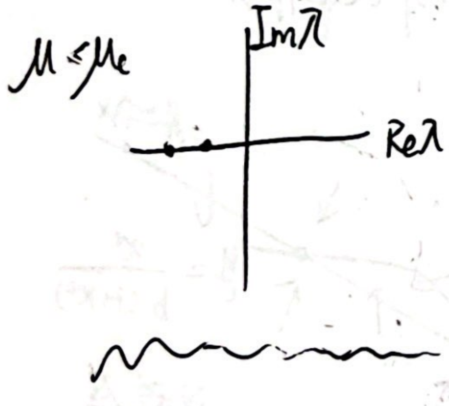
当$\Delta=0$ $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda_i=0$ 时. 出现分叉.

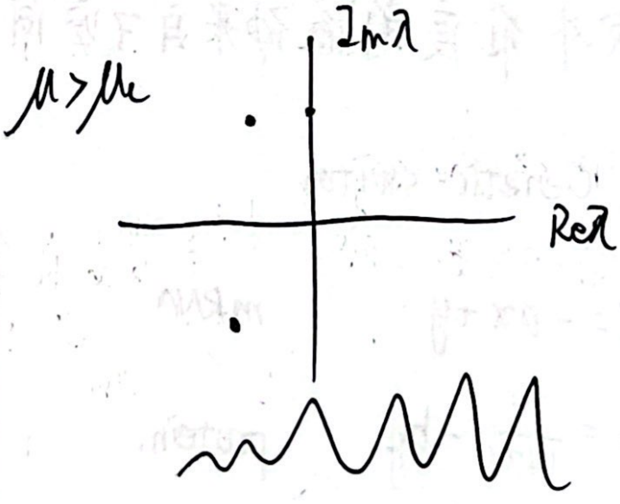
鞍结点、跨临界、叉型分叉都是零特征值分叉

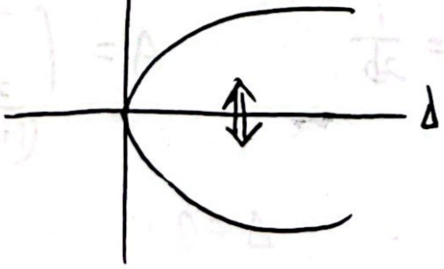


一般涉及两/多个不动点碰撞.

II) Hopf Bifurcation 霍普夫分叉.





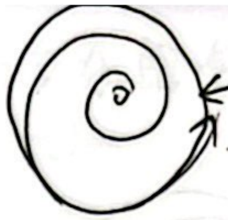


稳定性改变

$\tau=0$　$\Delta>0$

eg. $\dot{r} = \mu r - r^3$
$\dot{\theta} = \omega + br^2$.

$\mu<0$ 

$\mu>0$  极限环(稳定)

换为 x. y 后. $\lambda = \mu \pm i\omega$　　$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$

一 超临界 Hopf 分叉.

特征: 极限环以 $\propto \sqrt{\mu-\mu_c}$ 的速度增大. 在 $\mu \sim O(\mu_c)$ 时

其频率近似由 $\omega = \sqrt{\Delta}$ 给出 $= \mathrm{Im}\lambda$. 在 $\mu = \mu_c$ 时精确.

在 $\mu \sim O(\mu_c)$ 近似正确.

$\therefore T = \left(\frac{2\pi}{\mathrm{Im}\lambda}\right) + O(\mu-\mu_c)$.

分叉处极限环通常是椭圆形. 随 $\mu-\mu_c$ 增大而扭曲.

参量变化时, 有 $\frac{d(\mathrm{Re}\lambda)}{d\mu} \neq 0$.

Question. 若 μ_c 处 $\frac{d(\mathrm{Re}\lambda)}{d\mu} = 0$ 会发生什么? 无实部. $\Delta=0$ 属

如何找到 μ_c? $\tau=0$

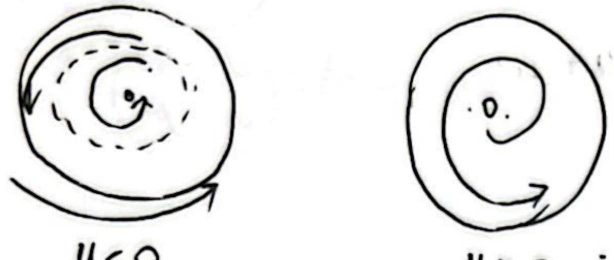
· 次临界 Hopf 分叉.

稳定性突变(因分叉)可能导致实际应用中的危险.

必须跳到某吸引子(不动点, 极限环. 无穷大. 混沌吸引子)

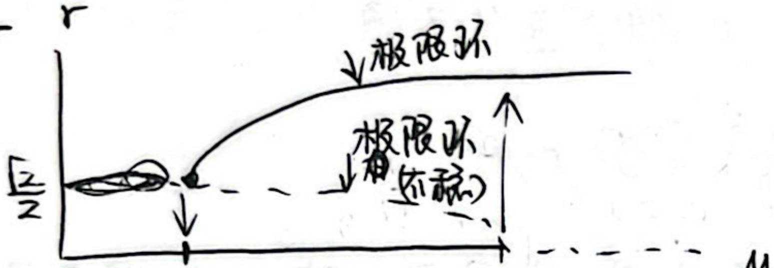
eg. $\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = \omega + br^2 \end{cases}$ → 三次项是不稳定的, 驱动轨迹远离

(0,0) 处的分叉：



不稳定区收缩吞没原点，稳定。

Hysteresis 迟滞现象：出现在调参在分叉点前后时，如下。



即 $\mu_c = -\frac{1}{4}$ 时出现鞍结点分叉。

② 亚临界 Hopf 分叉：稳定不动点失稳，不稳极限环消失，$\mu_c = 0$

▷ 如何判定 Hopf 分叉 亚 or 超

① 线性化分析不提供信息（特征值实部正负区别）

② 快速方法：计算机

③ 若不动点失稳后极限环从 0 开始增大 → 超

否则可能~~出现~~为亚，参数反转引发滞后。

• 退化 Hopf 分叉 — 本征值虽通过虚轴，不动点失稳，

但并不伴随极限环的产生 or 消失。

（分叉两边都没有极限环）

eg. 阻尼摆 damped pendulum $\ddot{x}+\mu\dot{x}+\sin x=0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=y \\ \dot{y}=-\sin x-\mu y\end{cases} \xrightarrow{*} (0,0) \begin{cases}\mu>0 & \text{globle stable.} \\ \mu<0 & \text{unstable} \\ \mu=0 & \text{nonlinear center. 非线性中心点}\end{cases}$$

考虑杜拉克标准. $g(x,y)=1$.

$\nabla\cdot(g\vec{F}) = -\mu$. ⇒ 不存在 closed orbits (除非 $\mu=0$)

eg. $\dot{x}=\mu x-y+xy^2$
$\dot{y}=x+\mu y+y^3$ $\xrightarrow{*}$ $(0,0)$ $A=\begin{pmatrix}\mu & -1\\ 1 & \mu\end{pmatrix}$ $\tau=2\mu$, $\Delta=\mu^2+1>0$. $\lambda=\mu\pm i$

Hopf 分叉: $\tau=0 \Rightarrow \mu_c=0$. $\dfrac{\mu<0 \to \mu>0}{\text{稳螺} \to \text{不稳螺}}$

∵ $\mu>0$. 由此,不存在闭合轨道, 原点不为非线性中心点

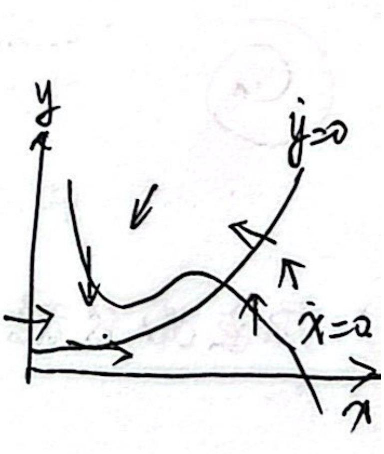
而 $\Delta r \sim \mu e^{\mu t}$, $\gg O(\mu)$. $\dot{r}=\dfrac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}=\dfrac{2\mu xy+(x^2+y^2)\cdot y^2}{r}$
$= 2\mu r\sin\theta\cos\theta + r^3\sin^2\theta$

又可知分叉不能退化,
$\mu<0$ 时存在极限环. } ⟶ 次临界分叉.

•例. ($ClO_2 - I_2 - MA$) 反应,

$\dot{x}=a-x-\dfrac{4xy}{1+x^2}$ $\xrightarrow{\dot{x}=0}$ $y=\dfrac{(a+x)(1+x^2)}{4x}$ } 相图

$\dot{y}=bx\left(1-\dfrac{y}{1+x^2}\right)$ $\xrightarrow{\dot{y}=0}$ $y=1+x^2$.



$\xrightarrow{*}$ $\left(\dfrac{a}{5}, 1+\left(\dfrac{a}{5}\right)^2\right)$ ~~结合图形~~.

$\Delta=\dfrac{5bx^*}{1+(x^*)^2}>0$ $\tau=\dfrac{3(x^*)^2-5-bx^*}{1+(x^*)^2}$

考虑 Fixed point 需要为 排斥点 repeller 而非鞍点 saddle.

这样可形成极限环, $\Rightarrow \tau > 0 \Rightarrow b < b_c = \frac{3}{5}a - \frac{25}{a}$

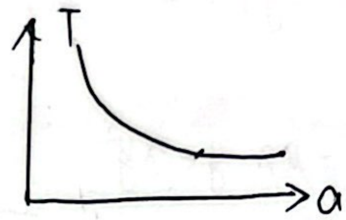
$\uparrow$

④ Hopf 分叉点

< 极限环　　> 稳定点

▷ 分叉点附近的振荡周期. $b \sim b_c$. $\tau \sim 0$. $\lambda \sim \pm i$区.

$\therefore \omega \sim \Delta^{\frac{1}{2}}$　$T \sim 2\pi/\omega = 2\pi \cdots$



• 一些模型...　　总结. ① 不动点区域检查 ② 利纳德系统判断 ③ 光态模型与弛豫振荡 ④ Hopf 分叉.

III) 循环的全局分叉 Global Bifurcation of Cycles

④ 相平面而非不动点领域

• Cycle的 ~~鞍结点分叉~~ eg. $\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$　　$\mu_c = -\frac{1}{4}$

$\dot{\theta} = \omega + b r^2$

$\mu < \mu_c$　　$\mu = \mu_c$.　　$\mu > \mu_c$.　　P

原点始终稳定, 如何计算 μ_c? $\boxed{\text{转化为一维 } \dot{r}}$.

• 周期 $T\to\infty$ 分岔：鞍结同宿分叉、Saddle-node homoclinic bifurcation

一个鞍点和一个节点出现在一个循环上.

eg. $\dot r = r(1-r^2)$ $\mu\geq 0$. $\mu_c=1$ increase in $(\mu-\mu_c)^{\frac{1}{2}}$

$\dot\theta = \mu-\sin\theta$.

$\mu>1$

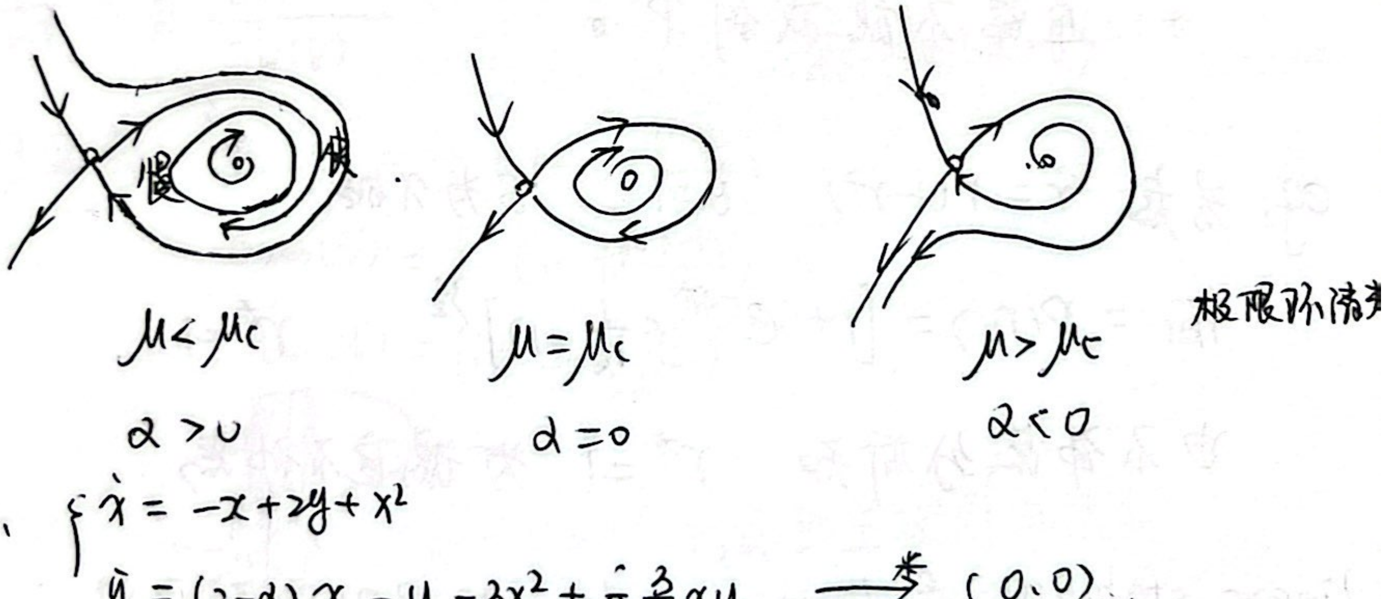
已寄生

寄生效应

• 同宿分叉：一个极限环与鞍点碰撞与消失

eg. $\dot x = y$

$\dot y = \mu y + x - x^2 + xy$. $\mu_c \simeq -0.8645$,



$\mu<\mu_c$ $\mu=\mu_c$ $\mu>\mu_c$

$\alpha>0$ $\alpha=0$ $\alpha<0$

eg. $\begin{cases}\dot x = -x+2y+x^2 \\ \dot y = (2-\alpha)x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy\end{cases}$ $\xrightarrow{*}$ $(0,0)$.

总结	A	T
超临界 Hopf	$O(\sqrt{\mu})$	$O(1)$
鞍结点 Cycle	$O(1)$	$O(1)$
周期 $T\to\infty$ 分岔	$O(1)$	$O(1/\sqrt{\mu})$
同宿分叉	$O(1)$	$O(\ln\mu)$

之 $\dot x\propto x$. $\dot y\propto y$ 三类

IV) Poincare Map and Linear Stability of Periodic Orbits

庞加莱图和周期轨道的线性稳定性

· Poincare Map 庞加莱图

考虑 n 维系统 $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$

S 为 n-1 维表面, flow 流的截面.

P 为庞加莱图, 通过轨道与S的交点获得

$$\vec{x}_{k+1} = P(\vec{x}_k)$$

考虑 P 的不动点 $\vec{x}^*$, $P(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$.

轨道为闭合轨道, 可通过 P 在 $\vec{x}^*$ 附近稳定性确定轨道稳定性.

从而将闭合轨道问题转化为映射问题.

*: 通常不能找到 P.

eg1. 考虑 $\dot{r} = r(1-r^2)$. $\dot{\theta} = 1$. S 为 x 轴

$$r_{k+1} = P(r_k) = \left[1 + e^{-4\pi}\left(\frac{1}{r_k^2} - 1\right)\right]^{1/2} \qquad r^* = 1$$

由不动点分析知 $r^* = 1$ 为稳定不动点.

· Linear stability of limited cycle 极限环的稳定性

考虑无穷小扰动 $\vec{v}_0$

$$\vec{x}^* + \vec{v}_1 = P(\vec{x}^* + \vec{v}_0) = P(\vec{x}^*) + \underbrace{[DP(\vec{x}^*)]}_{\text{线性化的P映射}} \vec{v}_0 + O(\|\vec{v}_0\|^2)$$

$$\vec{v}_1 = [DP(\vec{x}^*)]\, \vec{v}_0$$

特征值为周期轨道的 Floquet 乘子

DP有 $n-1$ 个本征值 λ_i，本征矢 $\hat{e}_i$

$$\vec{v}_0 = \sum v_j \hat{e}_j \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \sum v_j \lambda_j \hat{e}_j \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_k = \sum v_j (\lambda_j)^k \hat{e}_j$$

若 $|\lambda_j|<1 \ \forall j$，则 $\|\vec{v}_k\| \to 0$

V) Oscillations resulting from hysteresis 迟滞引起振荡

双稳态系统如 $\dot{x} = a + x - x^3$.

引入 $\dot{a} = \varepsilon(x_0 - x)$ $\quad \varepsilon \ll 1$. 形成反馈调节.

例. 电流反馈的 Morris-Lecar 模型（神经元极化）

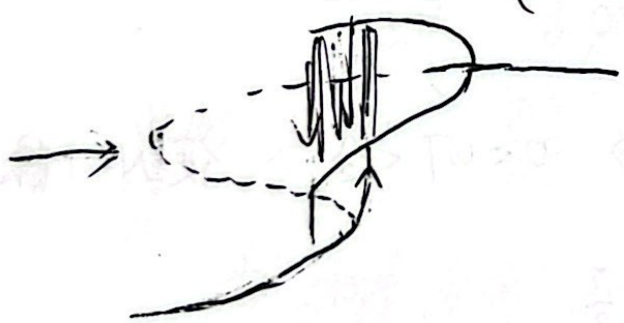
$$\underset{\text{电容}}{C}\frac{dV}{dt} = g_{Ca}\underset{\text{归一化概率系数}}{m_\infty(V)}(V_{Ca}-V) + g_K \underset{\text{归一化系数}}{w}(V_K - V) + \underbrace{g_L(V_L - V)}_{\text{漏电流}} + \underset{\text{触发电流}}{I}$$

$$\frac{dw}{dt} = \phi\frac{w_\infty(V) - w}{\tau_w(V)} \qquad \frac{dI}{dt} = \varepsilon(V_0 - V) \qquad \varepsilon = 0.001$$

门函数 $\quad m_\infty(V) = \frac{1}{2}\left(1 + th\frac{V-V_1}{V_2}\right)$

$$w_\infty(V) = \frac{1}{2}\left(1 + th\frac{V-V_3}{V_4}\right)$$

$$\tau_w(V) = \left(1 + ch\frac{V-V_3}{2V_4}\right)^{-1}$$



形成如左相图和轨迹.

VI) Hopf 分岔在时间延迟等式中.

- $\dot{x}(t) = f(x(t-\tau))$ 一维. $\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = x(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tau)^n}{n!}\frac{d^n x(t)}{dt^n}$

· 线性平衡性分析.

eg. 人口的 Logistic 模型.

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left[1-\frac{N(t-T)}{K}\right] \quad 取 \hat{t}=rt,\ \hat{T}=rT \quad \hat{N}=\frac{N}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{dN(t)}{dt} = N(t)\left[1-N(t-T)\right]$$

稳定时 $N(t)=N(t-T) \quad \rightarrow \quad N^* = 0,1$

① 在 $N^*=0$ 附近, 总是不稳定.

② 在 $N^*=1$ 附近, 取 $N(t)=1+n(t)$.

$$\frac{dn(t)}{dt} = -n(t-T)\left[1+n(t)\right] \sim -n(t-T).$$

以而 T 为参量, 考虑 $n(t)=n_0 e^{\lambda t}$, 则有 $\lambda = e^{-\lambda T}$.

解为 $\lambda = \mu \pm i\omega \quad (\omega \neq 0)$

$$\Rightarrow \mu = -e^{-\mu T}\cos\omega T$$

$$\omega = e^{-\mu T}\sin\omega T$$

关于 $\pm\omega$ 对称.

只考虑 $\omega>0$. 即 $\sin\omega T>0$.

则~~若~~须有 $\cos\omega T>0 \Rightarrow 0<\omega T<\frac{\pi}{2}$ 使 $N=1$ 稳定.

即 $\omega T = Te^{-\mu T}\sin(\omega T) < \frac{\pi}{2}$.

实际上, 此时 $|\lambda|$ 有限 且 $N^*=1$ 为螺旋不动点.

若 $\omega T > \frac{\pi}{2} \Rightarrow N=1$ 不稳定, 出现极限环

在临界点，$\omega_c T_c = \frac{\pi}{2}$，$\mu_c = 0$. $\omega_c = \sin(\omega_c T_c) = 1$.

$\Rightarrow T_c = \frac{\pi}{2}$，即 $\boxed{\omega_c = 1,\ T_c = 1}$ 为振荡临界点

根据 Hopf 分岔定理. $\frac{\partial\mu}{\partial T}\Big|_{T_c} \neq 0$. ~~故~~，$\mu = 0$ 时，Hopf 分岔出现

$=1$

振荡周期 $P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi = 4T_c$.

▷超出 Hopf 分岔点. 取 $T = T_c + \varepsilon$. $\mu = \delta$, $\omega = 1 + \sigma$

$\Rightarrow \sigma \cong -\frac{\pi}{2}\delta$ $\quad \delta \simeq \varepsilon + \frac{\pi}{2}\sigma$. $\Rightarrow \delta \simeq \frac{\varepsilon}{1+\frac{\pi^2}{4}}$ $\quad \sigma \simeq \frac{-\varepsilon\pi}{2+\frac{\pi^2}{2}}$

$\sigma < 0$ 表示系统进一步进入振荡. $T\uparrow$ 而 $\omega\downarrow$.

▷(3) 若 $\frac{dn(t)}{dt} = n(t-T)$? 取 $n(t) = n_0 e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda = e^{-\lambda T}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ 则~~不稳~~ $\lambda > 0$ $\Rightarrow \lambda = \mu \pm i\omega$, $\omega \neq 0$.

$$\begin{cases} \mu = e^{-\mu T}\cos\omega T \\ \omega = -e^{-\mu T}\sin\omega T \end{cases}$$

$n(t) = 0$ 不稳 当 $\mu > 0$ $\quad \omega T \in (0, \frac{\pi}{2})$.

稳定 当 $\mu < 0$ $\quad \omega T \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.

此时 $\mu = 0$. $\frac{\partial\mu}{\partial T} = \cancel{\left(\frac{\omega\mu}{\sin\omega T} + \frac{\mu\cdot\mu}{\cos\omega T}\right)e^{-\mu T}}\Big|_{T_c = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3}{2}\pi,\ \omega_c = 1} = \cancel{0}\ -1$.

为 Hopf 分岔. $\rightarrow$ T ~~足够~~小可使得 $n = 0$ 解稳定.

~~注意~~,

例：蒸汽机比例反馈控制.

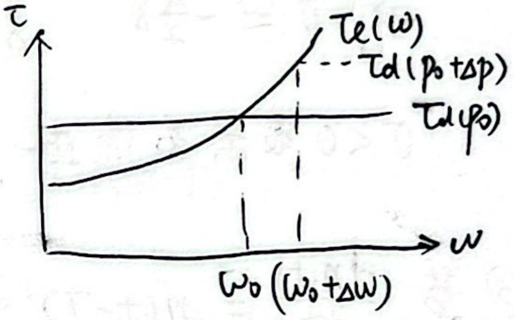
$I\dot{\omega} = \tau_d(p) - \tau_e(\omega) \qquad \tau_d(p_0) = \tau_e(\omega_0).$

无控制：$p_0 \to p_0 + \Delta p$. $\quad \frac{d\omega}{dt} = (\omega_f - \omega)\frac{1}{I}\left(\frac{d\tau_e}{d\omega}\right)_{\omega_0}.$

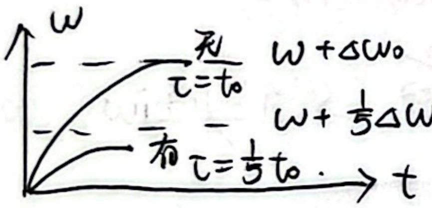
比例反馈控制. $p_0 \to p_0 + \Delta p - k(\omega - \omega_0)$

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega_f' - \omega)\frac{1}{I}\left(\frac{d\tau_e}{d\omega}\right)_{\omega_0}(1+G). \qquad G = k\frac{(d\tau_d/dp)_{p_0}}{(d\tau_e/d\omega)_{\omega_0}}$$

$$\omega_f' = \omega_0 + \frac{(d\tau_d/dp)_{p_0}\Delta p_0}{(d\tau_e/d\omega)_{\omega_0}(1+G)}$$



控制效果.



→ 有时间延迟时，$p(t) - p_0 = \Delta p_0(t) - k(\omega(t-t_g) - \omega_0)$

$\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} \simeq [\omega_f' - \omega(t-t_g)]\frac{1}{t_1} \qquad$ (G较大)

$\Omega \equiv \omega_f' - \omega(t) \qquad \frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{\Omega(t-t_g)}{t_1}.$

若 $t_g \to 0$. $\quad \Omega(t) \to \Omega(0)e^{-t/t_1}$ ⇒ 延迟大将失稳！

VIII) 周期受迫振荡

$$\boxed{\text{外驱}} \xrightarrow{F} \boxed{\text{内振}}$$

$$Q \longrightarrow P$$

频率比 Frenquency ratio P/Q

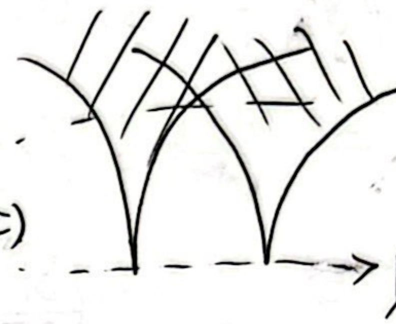
耦合强度

当 $\frac{P}{Q}$ $\begin{cases} \text{有理} & \text{周期性振荡} \\ \text{无理} & \text{准周期} \end{cases}$

/// \\\

空白

(无初态敏感)



耦合强度↑ ⇒ 多稳态的振荡(临界线上)

周期加倍

混沌.

eg. $\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega + \underbrace{\frac{K}{2\pi}\sin 2\pi\theta_i}_{\text{外驱力}}$ $\theta_i \in (0,1)$, $\Omega = \frac{P}{Q}$, K为耦合强

$\frac{d\theta}{dt} = 0$

$I\frac{d\omega}{dt} = M - \gamma\omega + \sum_n rF_0 \sin\theta\, \delta(t-nT)$.

Lecture 8 n-D system $n>2$.

$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \lambda)$. $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ λ 参量

不动点 $\vec{F}(\vec{x}_s, \lambda) = 0$. 微扰, $\vec{x}(t) = \vec{x}_s + \vec{x}(t)$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_s + \vec{x}, \lambda)$$

$$= \left(\frac{\delta \vec{F}}{\delta \vec{x}}\right)_{\vec{x}_s} \cdot \vec{x} + \cdots = \underbrace{\vec{L}(\vec{x}_s, \lambda)}_{\text{雅可比行列式}} \cdot \vec{x} + \underbrace{h(\vec{x}, \lambda)}_{\text{非线性部分}}$$

若 $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{L}(\vec{x}_s, \lambda) \cdot \vec{x}(t)$ 解渐近稳定,

则 $\vec{x} = \vec{x}_s$ 为 $\vec{F}$ 的渐近稳定解

特征值方程. $\vec{L}(\vec{x}_s, \lambda) \cdot \vec{u} = \omega \vec{u}$ 或 $\vec{x}(t) = \vec{u} e^{\omega t}$

$$\Rightarrow \sum_j L_{ij}(\vec{x}_s, \lambda) u_j = \omega u_i \quad \Rightarrow \sum_j (L_{ij} - \omega \delta_{ij}) u_j = 0$$

即 $\det|\hat{L} - I\omega| = 0$

从而 $\vec{x} = \sum_m C_m \vec{u}_m e^{\omega_m t}$ #

$$\text{令 } D = T^{-1} L \underset{\text{本征矢阵}}{T} = \mathrm{diag}(\omega_m)$$

$$\longrightarrow T^{-1} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = T^{-1} L T T^{-1} \vec{x} \qquad \text{令 } \vec{z} = T^{-1} \vec{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{z}}{dt} = \hat{D} \cdot \vec{z} \quad \Rightarrow \frac{dz_i}{dt} = \omega_i z_i$$

从而对非线性项, $\frac{dz_i}{dt} = \omega_i z_i + \hat{h}_i(\vec{z}, \lambda)$

$$\hat{h}(\vec{z}, \lambda) = T^{-1} h(T \cdot \vec{z}, \lambda)$$

(逐渐开始线代).

D是n阶约当标准块J的~~直和~~不可约矩阵的直和.

每个J对应一个ω_m

记μ_m为ω_m的多重性—代数多重度

ν_m为本征矢线性独立的ω_m的多重性—几何多重度

对每个m.

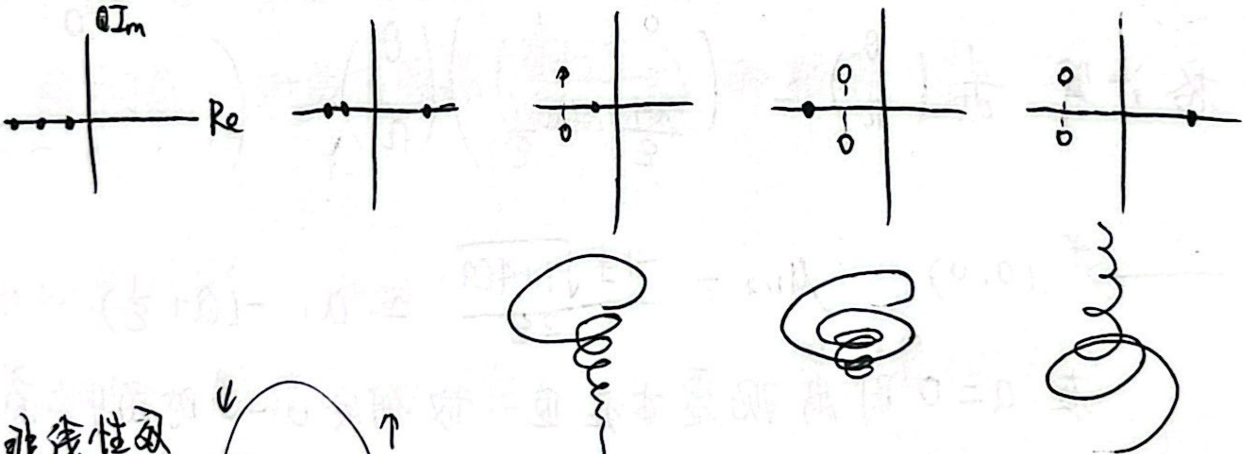
若$\mu_m=\nu_m$ → 本征矢无简并. $n=1$ $J_1=[\omega_m]$ ω

若$\mu_m>\nu_m$ → 本征矢出现简并 $n>1$.

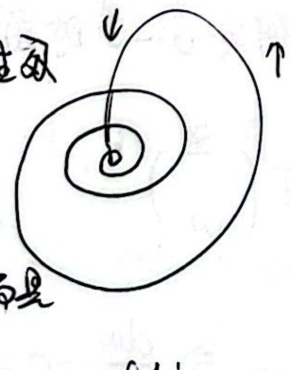
① $\omega_m\in\mathbb{R}$. $J_s=\begin{pmatrix}\omega_m & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ 0 & & & \omega_m\end{pmatrix}$ $\mu_m\times\mu_m$

② $\omega_m\in\mathbb{C}$. $J_s=\begin{pmatrix}R_m & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ 0 & & & R_m\end{pmatrix}$ $R_m=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\omega_m & -\mathrm{Im}\,\omega_m\\ \mathrm{Im}\,\omega_m & \mathrm{Re}\,\omega_m\end{pmatrix}$

I) $n=3$. 3D系统. 本征值可有~~四~~不止3种分布(非退化)(对称的不画)



由于非线性效应最终不会趋向无穷远,而是



闭合轨道.

II) Central manifold 中心流形.

将ω_m以$\mathrm{Re}(\omega_m)$ $\begin{cases} <0 & s & n_+\\ \sim 0 & c & n_0\\ >0 & u & n_-\end{cases}$ 三类. $n_++n_0+n_-=n$.

因为 $Re(w)<0$ 项衰减很快，故对应分析时可认为对应变量 $x_n=0$

从而微扰流形被压缩至 $Re(w)\sim 0$ 的子空间中讨论。 Slave 原理

中心流形

在中心流形中，系统行为主要由非线性项控制。

$Re(w)=0$ 时，分岔发生，非线性项支配系统

$\Downarrow$ 从而将快变量表示为慢变量的函数

eg. $\dot{u}=Bu+g(u,v)$

$\dot{v}=Cv+h(u,v)$ v 为快变量 $\Rightarrow v=V(u)$ 为 W^c 面

从而 $\dot{u}=Bu+g(u)$，即降为 $v=0$ 面上分析。

eg. $\frac{d\theta}{dt}=\Omega$ $\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon}\Omega+\frac{1}{\varepsilon}\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)$ $\varepsilon\ll 1$, $a=\lambda-1$

Ω 快 $\Rightarrow \frac{d\Omega}{dt}=0 \Rightarrow \Omega=\sin\theta(\lambda\cos\theta-1)=\frac{d\theta}{dt}$.

严格计算 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{\lambda-1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \cdots\end{pmatrix}$

$\longrightarrow^{*}(0,0)$ $\mu_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\varepsilon a}}{2\varepsilon}\simeq a,\ -(a+\frac{1}{\varepsilon})$

在 $a=0$ 时出现零本征值，故研究 $a\sim 0$ 时的中心流形

$T=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ a & -(1+\varepsilon a)\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix}$.

故有 $\frac{dz}{dt}=\cdots$ $\frac{dw}{dt}=\cdots$ $\Rightarrow \frac{dw}{dt}=0$.

↑慢 (a) ↑快 $-(a+\frac{1}{\varepsilon})$

返回 θ,Ω，即得上式

②.

这种类似的近似 应用于Re0本征值的临界分析.

以及有关这分岔时间尺度的参量分析

(由于参量数量级差异)

Ⅲ) 在nD 极限环分岔.

最简单的，实本征值分岔 3种

Hopf 分岔

其它？ n维分岔极限环 往往与P图中不动点稳定性有关.

• 离散系统不动点稳定性 $x \mapsto f(x^*)$, x^*, 雅可比 $f_x(x^*) = A(x^*)$

稳定点 → $A(x^*)$ 本征值 $|\mu_i| < 1$. $\forall i$

双曲不动点：不存在 $|\mu_i| = 1$，有 $|\mu_i| > 1$ 和 $|\mu_i| < 1$

▷ P图 上 双曲不动点

流相图 双曲极限环 (有乘子在单位圆内外) 即鞍环

• 不动点分叉 $|\mu| = 1$

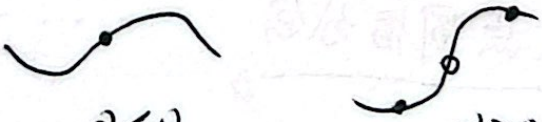
① $\mu = 1$ 鞍结点 or 叉型

② $\mu = -1$ 跨临界 or 倍周期.

③ 一对 $|\mu| = 1$ 环面 or N-S 分叉

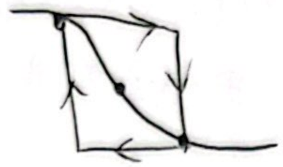
鞍结点：$x_{n+1} = \alpha + x_n + x_n^2$

叉型：$x_{n+1} = (\alpha + 1) x_n - x^3$



倍周期/翻转：$x_{n+1} = -(1+\alpha)x_n + x_n^3$

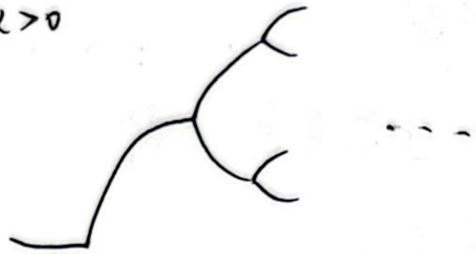
$\alpha<0$



$\alpha>0$

周期不动点对，周期翻倍

$x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$.



环形分岔. $r_{n+1} = r_n(1+\alpha) - r_n^3$. $\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma$.

即径向叉形分岔.

· 3D极限环分岔

① 超临界Hopf分岔 (2D) + 不动点 (1D)

② 鞍结环分岔 (P图上鞍结点分叉)

③ 倍周期分岔 (P图上出现倍周期分岔).

④ 环型分岔/第二Hopf分岔. (P图上Hopf分岔).

④ 鞍结点同宿分岔 (SNIC).

P图上螺旋$_{(2D)}$ + 一值环上鞍结点分岔

鞍点同宿分岔. 三维上的鞍点与极限环碰. P图鞍

鞍焦点同宿分岔 ---- 螺旋鞍点与极限环. P图螺

余维二分岔.

余维值 n 分岔：n 参，n 分支，(通常会有 n 个参).

n=1，调一个参，通常出单个分岔条件，如 $\tau=0$，$\Delta=0$

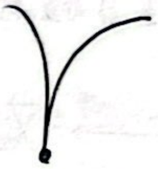
n=2，调二个参，同时满足 ~~二值或一值分岔条件~~ 才能出现分岔

共 只有5种余维二分岔

① 尖点分岔 Cusp

i) $\lambda_1=0$，$a=\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)=0$. 常有 $\dot\eta=\beta_1+\beta_2\eta-\eta^3$

在 $\beta_1-\beta_2$ 面上出现



线上为叉型分叉

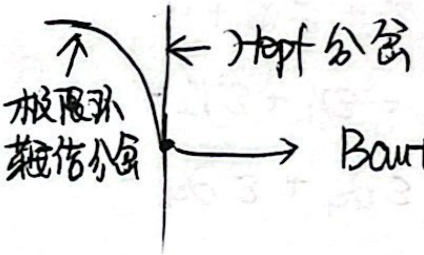
尖点为 Cusp 分叉

② Bautin 分岔 $\lambda_{1,2}=f_x(0,0)=\pm i\omega_0$，$l_1=0$ (3阶系数)

$Re(\lambda)=0$.

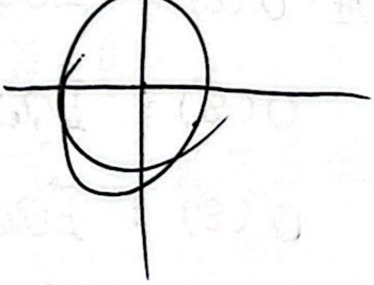
在常有 $\dot\rho=\beta_1+\beta_2\rho^2-\rho^4$，$\dot\varphi=1$.

在 $\beta_1-\beta_2$ 面上出现

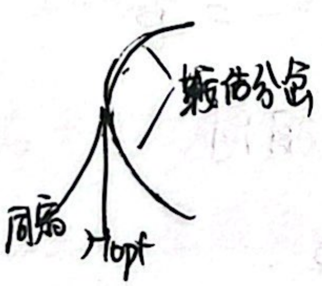


③ B-T 分岔 $\lambda_{1,2}=0$

常有 $\begin{cases}\dot\eta_1=\eta_2\\ \dot\eta_2=\beta_1+\beta_2\eta_1+\eta_1^2-\eta_1\eta_2\end{cases}$.



在 $\beta_1\beta_2$ 图上有



④ Fold-Hopf 分岔. $\lambda_1=0$ $\lambda_{2,3}=\pm i\omega_0$.

⑤ Hopf-Hopf 分岔 $\lambda_{1,4}=\pm i\omega_1$ $\lambda_{2,3}=\pm i\omega_2$ $\omega_1>\omega_2>0$.

~~剩~~ 以上是余维二分岔. β_1,β_2 相同

IV) ~~四~~ nD系统局部分岔的正则方程

线性稳定性分析可预测临界点 而不能足够分析分岔行为.

局部分叉发生在低维中心流形中. 一般的低维方程是定量的

即. 线性分析思路是展成多项式. ~~因~~不断纳入非线性项分析

换种思路. 强化线性方程效果, 将非线项阶数不断升上去.

$$\frac{d\vec{X}}{dt}=\vec{F}(\vec{X},\lambda) \xrightarrow{\text{求}} \vec{X}_s.$$

常规上分析 $\vec{X}=\vec{X}_s+\vec{\alpha}$. $\frac{d\vec{\alpha}}{dt}=\vec{L}(\lambda)\vec{\alpha}+\vec{h}(\vec{\alpha},\lambda)$

临界: $Re(\omega_c)=0$ 与 λ_c

若有 $\vec{\alpha}=\varepsilon\vec{x}_1+\varepsilon^2\vec{x}_2+\cdots$

$\lambda-\lambda_c=\varepsilon\gamma_1+\varepsilon^2\gamma_2+\cdots$

$d_t=\varepsilon\partial_{\tau_1}+\varepsilon^2\partial_{\tau_2}+\cdots$ $\tau_1=\varepsilon t \ll \tau_2=\varepsilon^2 t,\cdots$

不同时间尺度.

在 $O(\varepsilon)$: $\vec{L}(\lambda_c)\vec{x}_1=0$.

$O(\varepsilon^2)$: $\vec{L}(\lambda_c)\vec{x}_2=-\gamma_1\vec{L}_\lambda(\lambda_c)\vec{x}_1-\frac{1}{2}\vec{h}_{xx}\vec{x}_1\vec{x}_1+\frac{\partial\vec{x}_1}{\partial\tau_1}=\vec{g}_2$

$O(\varepsilon^3)$: $\vec{L}(\lambda_c)\vec{x}_3=\cdots=\vec{g}_3$

$\uparrow$

左边算符完全相同

问题化为递归的代数方程.

①·考虑 $\omega_c=0$ (零本征值)

$O(\varepsilon)$: $L(\lambda_c)\vec{x}_1=0$　　$\vec{x}_1=C(\tau_1,\tau_2,\cdots)\vec{u}$ → 本征矢.

$O(\varepsilon^2)$: $L(\lambda_c)\vec{x}_2=\vec{g}_2(C,\vec{u},\lambda_c)$　　C 表示微扰,有任意性

$$\vec{x}_2=L^{-1}(\lambda_c)\vec{g}_2(C,\vec{u},\lambda_c).$$

问题在于 L 并不总可逆, ∵ $\lambda_c=0$.

$\xrightarrow[\text{可解性条件}]{\text{Fredholm}}$　$MX=F$ 有解 ⇔ $F\cdot Y=0$. Y 为 $M^{+}Y=0$ 的解.

∴ 即 $L^{+}(\lambda_c)\vec{u}^{+}=0$, $(\vec{u}^{+},\vec{g}_2)=0$. $\vec{g}$ 与 $\vec{u}^{+}$ 正交!

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \tau_1}=\gamma_1 P_1 C_0-P_2C^2$$

$$P_1=\frac{1}{(\vec{u}^{+},\vec{u})}(\vec{u}^{+},L_\lambda(\lambda_c)\vec{u})\qquad P_2=\frac{-1}{2(\vec{u}^{+},\vec{u})}(\vec{u}^{+},h_{xx}(\lambda_c)\cdot\vec{u}\vec{u})$$

取 $A=\varepsilon C$, $\varepsilon\gamma_1\simeq\lambda-\lambda_c$. $\frac{\partial}{\partial t}\simeq\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}$. 有

$$\frac{dA}{dt}=(\lambda-\lambda_c)P_1A-P_2A^2,\quad \text{范方程}.$$

若 $P_2\neq0$. 此时为临界的正则形式 (普适).

此时所有 n-D 问题变为 1-D 问题, A 称序参量.

$$P_1=d\omega(\lambda)/d\lambda.$$

② 考虑 $\omega_c=0$ 但 $P_2=0$. 此时由镜面对称性, $\gamma_1=0$.

∴ $\frac{\partial C}{\partial\tau_1}=0$.　$L(\lambda_c)\vec{x}_2=-\frac{1}{2}h_{xx}(\lambda_c)\vec{x}_1\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ 不依赖 τ_1

$$\vec{x}_2=C_2(\tau_2)\vec{u}_0+L^{-1}(\lambda_c)[-\tfrac{1}{2}C^2h_{xx}(\lambda_c)\vec{u}\vec{u})$$

现在 $\vec{g}_2$ 与 $\vec{u}^{+}$ 正交是显然的. 但不能获得 $\vec{x}_1$ 了.

此时考虑 $O(\varepsilon^3)$

同理 $(u^+, \vec{\varphi}_2) = 0$ $\Rightarrow (u^+ \cdot h_{xx} \vec{u}\vec{u}) = 0$.

$\Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial \tau_2} = \gamma_2 P_1 C - P_3 C^3$.

令 $\lambda - \lambda_c = \varepsilon^2 \gamma_2$. $\quad A = \varepsilon C$. $\quad d_t = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = (\lambda - \lambda_c) P_1 A - P_3 A^3$. 为叉型分岔一般形式

③ Hopf 分岔. 不存在临界减速, $T \sim \Omega_c t$.

$\therefore \frac{d}{dt} = \Omega_c \frac{\partial}{\partial T} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}$.

$O(\varepsilon)$: $\left[\Omega_c \frac{\partial}{\partial T} \vec{I} - \vec{L}(\lambda_c)\right] \vec{x}_1 = 0$ $\quad O(\varepsilon^2)$ 同理.

从而 $\vec{x}_1 = \tilde{C}(\tau_1, \cdots) u e^{iT} + c.c.$ $\quad u$ 是 $i\Omega_c$ 本征矢.

$O(\varepsilon^2)$ 正交条件: $\frac{1}{2} \tilde{C}^2 (u^+ e^{iT}, h_{xx} u e^{iT} u e^{iT}) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \tau_1} = \gamma_1 P_1 C$. $\xrightarrow{\text{不发散}} \frac{\partial C}{\partial \tau_1} = 0$.

$\xrightarrow{O(\varepsilon^3)}$ $\frac{\partial C}{\partial \tau_2} = \gamma_2 P_1 C - P_3 |C|^2 C$ $\Rightarrow \underbrace{\frac{dA}{dt} = (\lambda - \lambda_c) P_1 A - P_3 |A|^2 A.}_{A,\, P_1,\, P_3 \text{ 为复数.}}$

令 $A = r e^{i\phi}$. 有 $\begin{cases} \text{实部} & \frac{dr}{dt} = \\ \text{虚部} & \frac{d\phi}{dt} = \end{cases}$

$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_s = \left[\frac{\mathrm{Re} P_1}{\mathrm{Re} P_3} (\lambda - \lambda_c)\right]^{1/2}$.

$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\Omega = \left(\mathrm{Im} P_1 - \frac{\mathrm{Im} P_3 \, \mathrm{Re} P_1}{\mathrm{Re} P_3}\right)(\lambda - \lambda_c)$.

$\therefore$ 频率为 $\Omega_c + \alpha(\lambda - \lambda_c)$.

$\mathrm{Re}(P_3) > 0$ 超临 $\quad < 0$ 次临

eg. $\frac{d\theta}{dt} = \Omega$ $\qquad\qquad \lambda_c = 1.$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sin\theta\,(\lambda\cos\theta - 1) - b\Omega$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-1 & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \Omega\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \frac{1-4\lambda}{6}\theta^3\end{pmatrix} + O(\theta^5)$$

$L(\lambda_c) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -b\end{pmatrix}$ $\quad u = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad P_1 = 1/b$

$L^+(\lambda_c) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -b\end{pmatrix}$ $\quad u^+ = \begin{pmatrix}b\\ 1\end{pmatrix}.$ $\quad P_3 = \frac{-(1-4\lambda)}{6b}$

$L_\lambda(\lambda_c) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow b\frac{dA}{dt} = (\lambda-1)A - \left(\frac{4\lambda-1}{6}\right)A^3$$

eg. Brusselator model.

$\dot{X} = A - (B+1)X + X^2Y$

$\dot{Y} = BX - X^2Y$ $\quad \longrightarrow^{*} (A, B/A).\quad B_c = A^2+1.\quad \Omega_c = A$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B-1 & A^2\\ -B & -A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \left(\frac{B}{A}x^2 + 2Axy + x^2y\right)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{B-B_c}{2}z - \Big(\underbrace{\frac{A^2+2}{2A^2}}_{\hookrightarrow\ \text{超临界 Hopf}} + i\,\cdots\Big)|z|^2 z.$$

Lecture 9. Turing Pattern 图灵斑图

不随时间变化的空间有序结构

远离热平衡态的平衡 —— 耗散结构，形成图组织

来源于扩散/反应过程的动力学不稳定性

I) 反应扩散方程 $\partial_t C = D\nabla^2 C + \underbrace{F_R(C)}_{\text{非线性项，化学动力学项}}$.

eg. $A + B \xrightarrow{k} C$.

充分搅拌. $d_t A = -kAB = d_t B$

R-D方程: $\partial_t A = -kAB + D_A \nabla^2 A$. 网格法解.
$\partial_t B = -kAB + D_B \nabla^2 B$

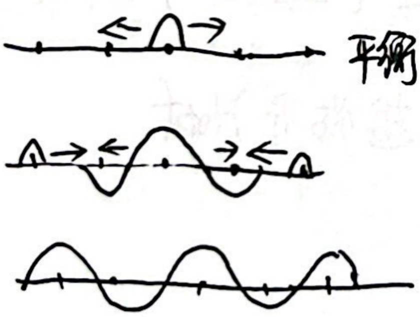
D 图案形成的定性解释（图灵分岔）→ 扩散引起不稳定

Turing分岔：空间齐次稳态 ↔ 非均匀稳态

若在某点反应时有小的扰动.

考虑 C 活化剂，D 抑制剂，$D_D > D_C$.

则有



平衡浓度.

稳定.

D 线性稳定性分析.

对 $\partial_t X = f(X, Y) + D_X \nabla^2 X$

$\partial_t Y = g(X, Y) + D_Y \nabla^2 Y$

找到平衡/均匀稳态. $f(X_s, Y_s) = g(X_s, Y_s) = 0$

$$D_x \nabla^2 X_s = D_y \nabla^2 Y_s = 0 \text{. (均匀)}$$

$\Rightarrow X = X_s + x$, $Y = Y_s + y$.

$$\partial_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D_x, D_y)\nabla^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} C_k^1 \\ C_k^2 \end{pmatrix} e^{\lambda_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \lambda_k \begin{pmatrix} C_k^1 \\ C_k^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} - k^2 D_x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 D_y \end{pmatrix}}_{=: A_k} \begin{pmatrix} C_k^1 \\ C_k^2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_k = a_{11} + a_{22} - k^2(D_x + D_y) = \tau_0 - k^2(D_x + D_y)$$

$$\Delta_k = \det(A_k)$$

$$\lambda_k = \frac{\tau_k \pm \sqrt{\tau_k^2 - 4\Delta_k}}{2}.$$

当 λ_k 的实部均为负时，系统稳定，

若存在正实部. 系统不稳定

Turing 分岔 $\Rightarrow \mathrm{Im}(\lambda_k) = 0$.

$\neq 0$ 时为 Hopf 分岔

Turing 失稳条件. ① $\lambda_0 \leq 0$. 即无扩散时稳定.

① $\tau_0 < 0$ $\Delta_0 > 0$.

② $\lambda_k > 0$. 对确定的 k.

$\tau_k < \tau_0 < 0$. $\Rightarrow \Delta_k < 0$

最危险时，$\Delta_k = \Delta_0 - k^2(a_{11}D_y + a_{22}D_x) + k^4 D_x D_y$ 最小

$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial (k^2)} = 0 \Rightarrow k_{min}^2 = \frac{a_{11}D_y + a_{22}D_x}{2D_x D_y}$$

$$\Delta_{kmin} = \Delta_0 - \frac{(a_{11}D_y + a_{22}D_x)^2}{4D_x D_y}$$

Turing 失稳：$\Delta_{kmin} < 0 \Rightarrow D_y a_{11} + a_{22}D_x \geqslant 2\sqrt{\Delta_0 D_y D_x}$

临界点：$\Delta_{kmin} = 0$.

总结：① $T_0 = a_{11} + a_{22} < 0$. a_{11} a_{22} 反号

② $\Delta_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. a_{12}, a_{21} 反号.

③ $D_y a_{11} + D_x a_{22} \geqslant 2\sqrt{\Delta_0 D_x D_y}$ $D_x \neq D_y$

若 X → activator Y → inhibitor $\begin{cases} a_{11} > 0 & a_{12} > 0 \\ a_{21} < 0 & a_{22} < 0. \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$

Turing Pattern 则存在于 Hopf 稳定区 和 Turing 失稳区 重叠区

$\Rightarrow D_y > D_x$. 即 $D_{抑} > D_{激}$

临界波长：$k_c^2 = \frac{(\ +\ )}{2D_x D_y}$ $\Delta_{k_c} = 0$

$$\Rightarrow \Delta_0 = k_c^4 D_x D_y \Rightarrow k_c^2 = \sqrt{\frac{\Delta_0}{D_x D_y}}$$

而波形分岔点不出现.

∵ 若 $Im(\lambda) \neq 0$，满足时 $Re(\lambda) < 0$ 总成立. ok

I. Amplitude equation and spatial resonance

振幅方程和空间共振　　寻找斑图具体形式

$$\vec{x} = \sum \vec{C}_k e^{\lambda_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c.$$

考虑仅有一个空间模式不稳定

靠近 Turing 分岔点时. $\vec{X} = \vec{X}_s + \vec{x}$

$$= \vec{X}_s + A(t)\vec{u}e^{i\vec{k}_c\cdot\vec{r}} + \bar{A}(t)\vec{u}e^{-i\vec{k}_c\cdot\vec{r}}$$

可将系统的所有非线性效应包在A中，u为临界特征向量

推导A(t)有多尺度摄动分析和对称性分析两种方法

对称约束：① 空间平移不变性.　$\vec{r} \to \vec{r} - \vec{r}_0$

② 反射对称性　$\vec{r} \to -\vec{r}$

对1-D系统. $\frac{dA}{dt} = f(A, \bar{A})$　　$k_c^2 = \sqrt{\frac{\Delta_0}{D_x D_y}}$

$$\xrightarrow{\text{Taylor}} d_t A = \mu A + b\bar{A} + cA^2 + d\bar{A}^2 + e|A|^2 + fA^3$$

$$+ g|A|^2 A + h|A|^2\bar{A} + i\bar{A}^3 + O(A^4)$$

在 $A \to Ae^{i\phi_0}$ 下应不变　　$\phi_0 = -k_c r_0.$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \mu A + g|A|^2 A$$

在反射对称性下有. $\bar{A} \to A$ 应不变.

$\Rightarrow \mu, g \in R$

得到饱和项 $\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \mu A - g|A|^2 A$.　$\mu, g > 0$

$$\frac{dA}{dt} = \mu A + g_1|A|^2 A - g_2|A|^4 A$$

2-D 系统

由系统旋转不变性，Turing 分岔开始时，有无限个临界模式

Q. 系统如何寻找模式？

$$\xrightarrow{\text{Taylor}} \frac{dA_k}{dt} = \mu A_k + \sum_{l,m}^{N,N} h_{lm} A_l A_m + \sum g_{mnl} A_l A_m A_n + O(A^4) \quad k=1,\cdots,N$$

~~空间平移不变~~. $\vec{x} = \vec{u} \sum_k A_k e^{i\vec{k}_k\cdot\vec{r}} + \bar{A}_k e^{-i\vec{k}_k\cdot\vec{r}}$

$\vec{A} \to A e^{i\phi} \quad \Rightarrow$ 由：$\vec{k}_k = \vec{k}_l + \vec{k}_m$

$\vec{k}_k = \vec{k}_l + \vec{k}_m + \vec{k}_n \cdots$

二阶：取 $\vec{k}_k = \vec{k}_1$，$\vec{k}_l = -\vec{k}_2$，$\vec{k}_m = -\vec{k}_3$. 即 $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$.

$\frac{dA_1}{dt} \longleftrightarrow h \bar{A}_2 \bar{A}_3 \longleftrightarrow \vec{k}_1 = -\vec{k}_2 - \vec{k}_3$. $\frac{dA_2}{dt}$. $\frac{dA_3}{dt}$ 同理.

三阶：$k_1 = k_l + k_m + k_n$. $\Rightarrow$ 15种取法. 对"k_1, k_2, k_3"

$|A_1|^2 A_1$ $|A_2|^2 A_1$ $|A_3|^2 A_1$

3 6 6

从而 $\frac{dA_1}{dt} = \mu A_1 + h \bar{A}_2 \bar{A}_3 - (g_1 |A_1|^2 + g_2 |A_2|^2 + g_3 |A_3|^2) A_1$.

且 $g_1, g_2, g_3 > 0$ 且 $g_2 = g_3$

$A \to \bar{A}$ 不变 $\Rightarrow \mu, g_1, g_2 \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \frac{dA_1}{dt} = \mu A_1 + h \bar{A}_2 \bar{A}_3 - [g_1 |A_1|^2 + g_2 (|A_2|^2 + |A_3|^2)]. \quad A_2, A_3 \text{同理}$$

通常 μ 为控制参量、h, g_1, g_2 由系统决定.

考虑 $A_i = \rho_i e^{i\phi_i} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = \mu \rho_1 + h \rho_2 \rho_3 \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) - [g_1 \rho_1^2 + g_2 (\rho_2^2 + \rho_3^2)] \rho_1 \\ \rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{d\phi}{dt} = -h \rho_2^2 \rho_3^2 \sin\phi \end{cases} \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$

从而得4条方程 $\frac{d\phi}{dt}=$, $\frac{dA_{1,2,3}}{dt}$

由 $\frac{d\phi}{dt}=0$ 有 $\phi=0$ or π

线性稳定性分析. $h>0$ $\phi=0$ 稳 ⇒ 给定环境会有 ⇒ 两种模式

$h<0$ $=\pi$ 稳.

取 $\phi=0, \pi$. 解不动点, 有.

① 无序解. $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0$ $\forall\mu$,

② 条纹解 $\rho_1=\sqrt{\frac{\mu}{g_1}}$, $\rho_2=\rho_3=0$. $\mu>0\equiv\mu_2$

③ 六边形解 $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho\neq0$.

满足 $\mu\rho+|h|\rho^2-(g_1+2g_2)\rho^3=0$.

$$\Rightarrow \rho=\frac{|h|\pm\sqrt{h^2+4\mu(g_1+2g_2)}}{2(g_1+2g_2)}.$$

$$\Rightarrow \mu>\frac{-h^2}{4(g_1+2g_2)}\equiv\mu_1$$

④ 混合解. $\rho_1\neq0$, $\neq\rho_2=\rho_3\neq0$

$$\Rightarrow \rho_1=\frac{|h|}{|g_2-g_1|} \qquad \rho_2=\rho_3=\sqrt{\frac{\mu(g_2-g_1)^2-g_1h^2}{(g_1+g_2)(g_2-g_1)^2}}$$

$g_2>g_1$, $\mu>\frac{g_1h^2}{(g_2-g_1)^2}$.

可证明此态点不稳定. 我们忽略

▷线性稳定性分析.

$$\frac{d}{dt}(\delta\rho_i)=({}^{3\times3}A)(\delta\rho_i)$$

① $\rho_{1s}=\rho_{2s}=\rho_{3s}=0$. $A=\mu I$ $\mu>0$ 不稳
$\mu<0$ 稳

② $\rho_{1s}=\sqrt{\frac{\mu}{g_1}}$. $\rho_{2s}=\rho_{3s}=0$. $A=\begin{pmatrix} -2\mu & & \\ & (1-\frac{g_2}{g_1})\mu & |h|\sqrt{\frac{\mu}{g_1}} \\ & |h|\sqrt{\frac{\mu}{g_1}} & (1-\frac{g_2}{g_1})\mu \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \omega_1 = -2\mu$. $\omega_{2,3} = (1-\frac{g_2}{g_1})\mu \mp |h|\sqrt{\frac{\mu}{g_1}}$.

而 $\mu>0$、$g_2>g_1$. $\Rightarrow \omega_2<0$.

稳定要求 $\omega_3<0$ $\Rightarrow \mu > \frac{g_1 h^2}{(g_2-g_1)^2} \equiv \mu_3$.

③ $\rho_{1s}=\rho_{2s}=\rho_{3s}\neq 0 \equiv \rho_0$ $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ $a=\mu-(3g_1+2g_2)\rho_0^2$
$b=|h|\rho_0-2g_2\rho_0^2$.

$\omega_1=\omega_2=-b+a$

$\omega_3=2b+a$

若 $\mu<\frac{(2g_1+g_2)h^2}{(g_2-g_1)^2}\equiv\mu_4$. $\omega_1, \omega_2<0$

对 $\rho_0=\rho_{0\pm}$, $\rho_0^+ \to \omega_3<0$ 稳

$\rho_0^- \to \omega_3>0$ 不稳

$\omega_3=\mp\rho_0\sqrt{h^2+\mu\cdot4(g_1+2g_2)}$. 要求 $\mu\geq\frac{h^2}{4g_1+8g_2}\equiv\mu_1$

$\mu=\mu_1$ 时出现鞍结点分叉

总结. $\mu>\mu_1$ 出现六边形

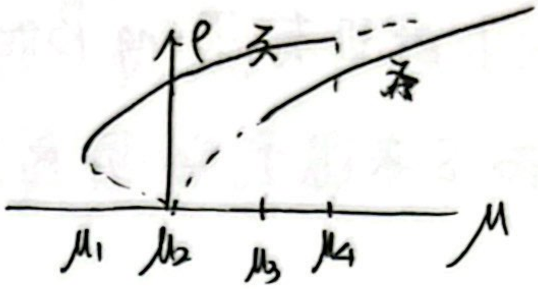
$>\mu_2$ ⓪均匀解不稳，条纹出现.

$>\mu_3$ 条纹稳定

$>\mu_4$ 六边形不稳

$\because \mu_1<\mu_2<\mu_3<\mu_4$.

会出现两种滞后行为



例 CIMA 系统.

$$\frac{\partial X}{\partial t}=f(X,Y)+D_x\nabla^2X-k_+XS-k_-C. \longrightarrow \frac{\partial(X+C)}{\partial t}=f(X,Y)+D_x\nabla^2X$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=g(X,Y)+D_y\nabla^2Y$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k_+XS-k_-C \qquad \cancel{\frac{dC}{dt}=0.}$$

$$\frac{dC}{dt}=0\rightarrow\frac{C}{SX}=\frac{k_+}{k_-}\equiv K. \qquad C=KSX$$

$$\Rightarrow (1+KS)\frac{\partial X}{\partial t}=f(X,Y)+D_x\nabla^2X$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=g(X,Y)+D_y\nabla^2Y.$$

均匀解仍存在.

线性稳定分析. $\frac{dx}{dt}=\delta(a_{11}x+a_{12}y+D_x\nabla^2x)$ $\quad \delta=\frac{1}{1+KS}$

$$\frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+D_y\nabla^2y$$

~~考虑δ引入~~

Turing分岔点 $\begin{cases} T_0=\delta a_{11}+a_{22}<0 \\ \delta\Delta_0=\delta a_{11}a_{22}-\delta a_{21}a_{12}>0 \\ \frac{D_y}{\delta D_x}\delta a_{11}+a_{22}\geq 2\sqrt{\delta\Delta_0\frac{D_y}{\delta D_x}} \end{cases}$ 临界 $\frac{D_y}{D_x}a_{11}+a_{22}=2\sqrt{\Delta_0\frac{D_y}{D_x}}$

Hopf 分岔: $\delta a_{11}+a_{22}=0$. $\qquad \delta a_{11}+a_{22}=0$.

$\frac{D_Y}{D_X} \sim 1$ 时仍有 Turing Pattern（因为δ存在）

而 δ 来源于 C. 即反应复合物

Lect

Lecture 10 Spiral waves, turbulence.

湍流和螺旋波.

⓪ 图案形成和不稳定性.

来源: 可激发介质, 励磁自组织.

相位波: 振荡介质, Hopf分岔, 相位自组织

I) 可激发介质中的三角波

可激发系统, $\varepsilon \partial_t u = f(u,v)$
$\partial_t v = g(u,v)$

要求 ① 非线性
② $\varepsilon \ll 1$. 时间尺度差距大

特征 ① 只有一个稳态, 对小扰动稳定
② 扰动过阈值时会被激发
③ 回归初态需要弛豫时间

引入扩散. 未激发: 恒齐次
激发, 出现波峰

假定激发源为直线, 激发后行成行波.

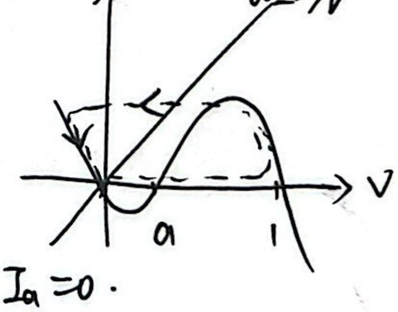
截成~~半直线~~射线 → 形成拓扑缺陷 → 螺旋波 (无需外部再刺激 为自组织行为

靶波同理, 截成小点

例. F-N model, without D.

$\partial_t v = f(v) - w + I_a$ $f(v) = v(a-v)(v-1)$

$\partial_t w = bv - \gamma w$



$I_a = 0$.

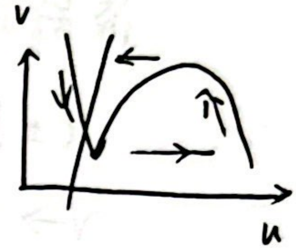
例. BZ模型

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u,v) + \underbrace{\varepsilon \frac{1}{k_5 B} D_u \nabla^2 u}_{\Rightarrow \varepsilon^2 \nabla^2 u}$$ 取 $\delta = \frac{D_v}{D_u}$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u,v) + \frac{1}{k_5 B} D_v \nabla^2 v \Rightarrow \varepsilon \delta \nabla^2 v$$

行波解(1-D) $u(x,t) = u(z)$ $z = x - ct$. v同.

(原点振到行波上).



$$\Rightarrow \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \varepsilon c \frac{du}{dz} + f(u,v) = 0$$

$$\varepsilon\delta \frac{d^2 v}{dz^2} + c\frac{dv}{dz} + g(u,v) = 0$$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow f(u,v) = 0 = (u-h_-)(u-h_0)(u-h_+)$

$z \to -\infty$ $u = h_+(v)$ $z \to +\infty$ $u = h_-(v)$.

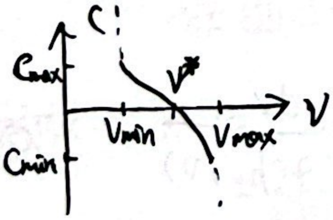
假设~~尖端~~中间端 $z \sim 0$, 厚度 $\sim O(\varepsilon)$. 取 $\xi = z/\varepsilon$.

$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + c\frac{du}{d\xi} + f(u,v) = 0.$ $\xi \to \pm\infty$. $u = h_\mp(v)$, $v = v_0$

$\delta \frac{d^2 v}{d\xi^2} + c\frac{dv}{d\xi} + \varepsilon g(u,v) = 0.$ $\varepsilon \to 0$, $v = v_0 + ce^{-\frac{c}{\delta}\xi}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + c\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + \frac{du}{d\xi} f = 0$$

$$c(v_0) = \int_{h_-}^{h_+} f(u, v_0)\, du \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi$$ 取决于 v_0!

① 

存在 $c(v^*) = 0$

② Luther relation 路德关系

$\vec{c} = c\vec{c_0}$. $\propto \sqrt{k_3 A \cdot D_u}$ 反应速率 打散尺度 $L \propto \sqrt{D\tau}$

$$\Rightarrow c \propto \frac{L}{\tau} = \sqrt{\frac{D}{\tau}} \simeq \sqrt{D \times k_3 A}.$$

最初 (u_s, v_s) 为均匀稳定解，解在 $h_-(v_s)$ 上。

给初态矩形波 $u(x,t)=\begin{cases} h_+(v_s) & |x|\le x_0 \\ h_-(v_s) & |x|\ge x_0 \end{cases}$ （$2x_0$宽）

波峰在 x_0 处形成。

若 $v_s<v^*$，波锋向正方向以 $c(v_s)$ 传播。

波锋过后，v 由 $\partial_t v = g(u,v)$ 决定，开始增大。

u 以 $h_+(v)$ 形式变化，

$v\to v_{max}$，h_+ 与 h_0 合并，$u \xrightarrow{跳} h_-(v)$，波背。

此时，若 $c(v_s) > c(v_{max})$ ⇒ c 完全由 $v_锋$ 决定，$c=c(v_s)$

波背行为由弛豫所定

若 $c(v_s) < c(v_{max})$ ⇒ 波背快于波锋。

$v_背 = v_b < v_{max}$ 时 u 下跳至 $h_-(v)$

满足 $|c(v_b)|=|c(v_s)|$

此后 ∵ $g<0$，v 逐渐减少至 v_s。

由此以上知，波速由 v_s 唯一决定。

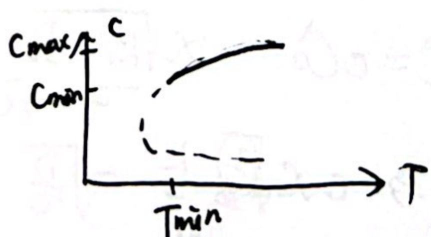
若有激扰源，周期 T，且 T 足够小，使弛豫时间未结束

此时逐渐有 $|c(v_f)|=|c(v_b)|$

忽略 u 跃迁时间，$T_\pm = \int_{v_f}^{v_b} \frac{dv}{g(h_\pm, v)}$ ②

可表达为 v_f 函数，$T=T(v_f)$，$c=c(v_f)$

⇒ $c=c(T)$。



2D 解 c 与波形状 特别是波前曲率有关

引入原点在曲率中心的极坐标. 忽略 ∂_ϕ ($\because$ 切向 ∇c 很小可忽略)

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r} \qquad k = \frac{1}{r}$$

$$\partial_t v = g + \varepsilon \delta \, \partial_r^2 v + k\varepsilon\delta \partial_r v$$

令 $r' = r - Nt$. N 为法向速度.

$$\Rightarrow \varepsilon d_{r'}^2 u + \varepsilon [N + \varepsilon k] d_{r'} u + f = 0$$

$$\varepsilon \delta d^2 v + [N + \varepsilon \delta k] dv + g = 0$$

$K=0$ 还原为一维问题 ($r \to \infty$)

在波锋附近. $\xi = r'/\varepsilon$. 有.

$$d_\xi^2 u + [N + \varepsilon k] d_\xi u + f = 0 \qquad\qquad v = v_0 \quad (\xi \to \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$\delta d_\xi^2 v + [N + \varepsilon k\delta] d_\xi v + \varepsilon g = 0 \qquad u(\pm\infty) = h_\mp(v_0).$$

令 $\varepsilon = 0$. 有 $N = C(v_0) - \underbrace{\varepsilon k}_{}$ 加上曲率曲修正. (程函关系)

$K \gg 1$ 有效.

若 $|k| \sim O(1) \Rightarrow$ 行波为平面波 .

对 BZ 反应. 还原后即 $N = c - Dk$.

这在 $Dk \sim \sqrt{D/c}$ 时影响显著. 同心波相碰. 尖点消失 / 行波点缺陷. 螺旋波

保证了行波的稳定.

对螺旋波. 可用 $\phi = \Omega t \pm m\theta + \psi(r)$

Ω: 频率 m: 臂数 $\psi(r)$: 螺旋类.

~~波锋曲线, $x = r\cos(\psi(r)$~~ 取 $t=0$. 时 $\phi = \phi_0$. 取 $\theta = \psi(r)$

若 $\theta = ar$ 阿基米德螺旋

$\theta = a\ln r$ 对数螺旋

D 螺旋波与本构方程 $\psi = r\theta'(r)$ ~~$\theta(r) = \omega r$~~

波释 $N = \frac{\omega r}{(1+\psi^2)^{1/2}}$ $\quad K = \frac{\psi'}{(1+\psi^2)^{3/2}} + \frac{\psi}{r(1+\psi^2)^{1/2}}$ $\quad$ (曲线 $x = r\cos(\theta-\omega t)$, $y = r\sin(\theta-\omega t)$)

$$r\frac{d\psi}{dr} = (1+\psi^2)\left(\frac{rc}{\varepsilon}\sqrt{1+\psi^2} - \frac{\omega r^2}{\varepsilon} - \psi\right)$$

$\psi(r=0) = 0 \qquad \psi(r\to\infty) = kr$ (阿氏螺线)

从而进一步得到 $\theta(r) = \int \frac{\psi(r)}{r}\, dr$

r 很小时，有 $\psi \sim -\frac{c}{2\varepsilon} r + \frac{\omega}{3\varepsilon} r^2 + O(r^3)$ $\quad \xleftarrow{r\to 0}$ $\psi = -\frac{\omega r}{c}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}+\frac{cr}{\varepsilon}}\right)$

r 很大时有 $\psi \sim -\frac{\omega}{c} r - \frac{\omega\varepsilon}{c^2} + O(\frac{1}{r})$ $\quad \xleftarrow{r\to\infty}$

故其先决条件 $\underbrace{\omega = \frac{m^* c^2}{\varepsilon}}_{\text{本构关系}}$ $\quad m^* = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \simeq 0.317$

$$\Rightarrow \theta = -m^*\left(\frac{cr}{\varepsilon} + \ln\left(\sqrt{3} + \frac{cr}{\varepsilon}\right)\right) + \text{const}$$

权边界为 $\psi(r_0) = 0 \quad \Rightarrow \psi = \frac{\alpha r}{r_0} + \frac{\beta r}{r_0 + \gamma r} \qquad \alpha = -\frac{\bar{\omega}}{\bar{c}}$.

$\beta = \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega}}{\bar{c}} - \bar{c}$. $\qquad \gamma = -\frac{\bar{c}}{2\beta}$

$$\Rightarrow \omega = m^*\frac{c^2}{\varepsilon} + \alpha^* c^4 r_0^2/\varepsilon^2.$$

这是普适的