5.17

广义积分(I)　　Date

[计算]

例: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

解. 原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+\frac{1}{2})}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)}{\left[\left(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}$

$=\frac{16}{3\sqrt{3}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^2}\overset{t=\tan\theta}{=\!=}\frac{16}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{16}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{16}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi.$

几个回顾点，见《高数刷题册》"不定积分"一节.

$\Delta 1.$ $I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\quad(a\neq 0)$;

使用递推式: $I_{n-1}=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}=\int\frac{d(x+\frac{b}{2a})}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$

$=\frac{(x+\frac{b}{2a})}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}-\int(x+\frac{b}{2a})\,d\left(\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right)$

$=\frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}-(1-n)\int\frac{(x+\frac{b}{2a})\cdot(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

$=\frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}-2(1-n)\int\frac{(ax^2+bx+c)-(\frac{b^2}{4a}-c)}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

$=\frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+2(n-1)\cdot I_{n-1}-2(n-1)\cdot\frac{1}{4a}\cdot\Delta\cdot I_n.$

故

$\therefore\ I_n=\frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}}-\frac{(2n-3)}{(n-1)\Delta}\cdot 2a\cdot I_{n-1}.$

例: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx.$

令 $x=\frac{1}{t}$. 则原式 $=\int_{+\infty}^{0}\frac{t^4}{t^4+1}\,d(\frac{1}{t})=-\int_{+\infty}^{0}\frac{t^2}{t^4+1}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$

因此 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2}$

$= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

例: $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac14 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{(1+x^2)^2}\,d(x^2) = -\frac14\int_0^{+\infty} \ln t\, d\left(\frac{1}{t+1}\right).$

$= -\frac14 \cdot \frac{\ln t}{t+1}\Big|_0^{+\infty} + \frac14\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1}\cdot\frac1t\,dt.$

$= \frac14\left[\ln t - \ln(t+1) - \frac{\ln t}{t+1}\right]\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac14\left[\frac{t}{t+1}\ln t - \ln(t+1)\right]\Big|_0^{+\infty}$ ($t=x^2$回代).

$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac14\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)} - \frac14\ln(1+x^2)\right).$

$= 0.$

两个求积:

$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac1a e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac ba\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$

$= \frac1a + \frac{b}{a^2}e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

同理 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$

例: $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ ($I_0 = 1$).

$I_n = -e^{-x}x^n\Big|_0^{+\infty} + \int n x^{n-1}e^{-x} = nI_{n-1}$

∴ 得 $I_n = n!$

例: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

由分式分解定理, $\frac{1}{x\cdots(x+n)} = \frac{a_0}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x+n}$, 利用极限法.

$a_0 = \frac{1}{n!}$, $a_k = \frac{1}{(-k)(-k+1)\cdots(n-k)} = \frac{(-1)^k}{n!}C_n^k$

∴ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)} = -\sum_{k=0}^n a_k\ln(1+k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1}C_n^k\ln(1+k).$

$\to \left(= \left(\sum_{k=0}^n a_k\ln(x+k)\right)\Big|_1^{+\infty}\right)$, $\lim LHS = 0$)

※例：（欧拉积分）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$

首先知这个广义积分收敛 $\left(\lim_{x\to 0^+} \ln \sin x \sim o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)\right)$，$\varepsilon$为任意大于0的常数。

※见到 $\sin x$ 与 $\frac{\pi}{2}$，考虑对称性构造

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) + \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \sin 2x - \ln 2) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, d(2x) - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

$$\therefore I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

※※有等式 $\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right) dx.$

证：$ax+\frac{b}{x} = \sqrt{u^2+4ab} \Rightarrow$ 取 $u = ax - \frac{b}{x}$. $\Rightarrow x = \frac{1}{2a}\left(u+\sqrt{u^2+4ab}\right)$.

$\therefore dx = \frac{1}{2a}\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+4ab}}\right) du$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right)\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+4ab}}\right) du. \quad (1)$$

（将 $u=-v$ 代上：再将式子中 v 替为 u）$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right)\left(1-\frac{u}{\sqrt{u^2+4ab}}\right) du \quad (2)$

$\frac{(1)+(2)}{2}$，$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right) du = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right) du.$ ✓

[敛散性]：

例：研究积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 的收敛性。

解：原式 $= \underbrace{\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx}_{(*)} + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$

$p>0$ 时收敛，$p\le 0$ 时 $(*)$ 发散，故发散。

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0.$$

例：对 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$，研究其收敛性。

分析：~~$\int_0^1 x^p \ln^q$~~ $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$

$$= \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx}_{(*)} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx}_{(\Delta)}.$$

（其实 $\frac{1}{2}$ 不是特定的，分点标准是将 $x\to0$ 时的 x^p 与 $x\to1^-$ 时的 $\ln\frac{1}{x}$ 分开）

(Δ) 由 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0) \Rightarrow \ln\frac{1}{x}\sim 1-x\ \ (x\to1^-)$.

$x^p\ln^q\frac{1}{x}\sim(1-x)^q\ \ (x\to1^-)$ $\begin{cases} q\le-1 \text{ 发散} \\ q>-1 \text{ 收敛}\end{cases}$

$(*)$：前提已有：$q>-1$，可知 x^p 起主导作用

（事实上 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^q\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^\varepsilon}}=0$，$\varepsilon>0$）.

$p\le-1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1}\ln^q\frac{1}{x}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}}\ln^q\frac{1}{x}\,d(\ln\frac{1}{x}) = -\frac{1}{q+1}(\ln\frac{1}{x})^{q+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = +\infty$.

$\therefore$ $p>-1$，$q>-1$ 时收敛。

例：$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx$：$(n\ge0)$.

① $a=0$，$n>1$ 时收敛；否则发散，

② $a\ne0$，$n=0$，发散。

③ $a\ne0$，$n>0$：

$\int_0^{b'}\cos ax\,dx = \frac{\sin ab'}{a}$ 在 $b'\in[0,+\infty)$ 上有界，$\frac{1}{1+x^n}\searrow$.

由狄利克雷判别法，此积分收敛。

$n>1$，原式 $<\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\,dx$ 绝对收敛。

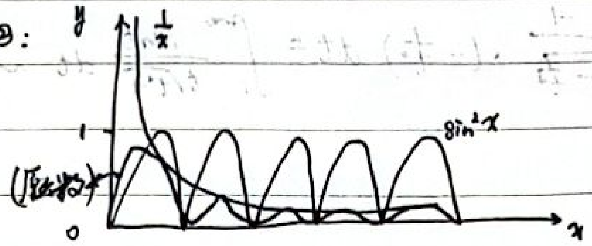
$0<n\le1$：$\int_0^{+\infty}\frac{|\cos ax|}{1+x^n}\,dx \ge \int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 ax}{1+x^n}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}}_{(\text{发散})} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax\,dx}{1+x^n}$.

$\therefore$ $a\ne0$ $\begin{cases} n>1，\text{绝对收敛} \\ 0<n\le1，\text{条件收敛}.\end{cases}$

例：研究 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 的收敛性.

法①：二倍角公式变换，得出积分发散.

法②：



$$\int_0^{n\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

$$\geq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

从而 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx=+\infty$，积分发散.

例：研究 $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,dx\ (q\neq 0)$ 的收敛性.

(1) $q=1$ 时，原式 $=\underbrace{\int_0^1 x^p\sin x\,dx}_{(*)}+\underbrace{\int_1^{+\infty}x^p\sin x\,dx}_{(\triangle)}$

(*)项：$p>-2$ 时收敛，$p\leq -2$ 时 由于 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$ 而发散.

(△)项：$0>p\geq -1$ 时条件收敛，$p<-1$ 时绝对收敛；$p>0$ 时发散.

$\therefore\begin{cases} p\geq 0\ /\ p\leq -2,\ \text{发散} \\ -2<p<-1,\ \text{绝对收敛} \\ -1\leq p<0,\ \text{条件收敛.}\end{cases}$

(2) $q\neq 1$，代换 $t=x^q$，原式 $=\frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$

$\therefore\begin{cases} -1<\frac{p+1}{q}<0,\ \text{绝对收敛} \\ 0\leq\frac{p+1}{q}<1,\ \text{条件收敛} \\ \frac{p+1}{q}\leq -1\ \text{或}\ \frac{p+1}{q}\geq 1,\ \text{发散.}\end{cases}$

例：研究 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sec x)\,dx$ 的收敛性.

解 记 $t=\sec x$, $x=\arccos\frac{1}{t}$ ⇒

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sec x)\,dx=\int_1^{+\infty}\sin t\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt\sim\begin{cases}O(x^{-\frac{1}{2}}), & x\to 0\\ O(x^{-2}), & x\to+\infty\end{cases}$$

∴绝对收敛.

附：关于广义积分的若干理论：

若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛，当 $x\to+\infty$ 时，不一定有 $f(x)\to 0$

例如 $\int_0^{+\infty}\sin^2 x^2\,dx$.

设 $f\in C[a,+\infty)$，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛，则 $f(+\infty)=0$ 的充要条件是 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

广义积分的 Cauchy 主值：

设 $c\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中唯一奇点.

$$v.p.\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right)$$

如 $\int_{-1}^1\frac{dx}{x}$ 发散而 $v.p.\int_{-1}^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=0.$

或：对 $(-\infty,+\infty)$ 内没有有限奇点的 $f(x)$.

可定义 $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$ ✓

5.17 含参变量的广义积分、常义积分 Date

例：研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性，其中 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正连续函数

解：依题，$F(0)=0$. 而 $\lim\limits_{y\to 0^+} F(y) \ge m\cdot\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx = m\arctan\frac{1}{y} = \frac{m}{2}\pi$

($f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在最小值 m)

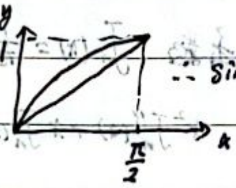
$$\therefore \lim_{y\to 0^+} F(y) \ge \frac{m\pi}{2} > 0.$$

可见 $F(y)$ 于 $y=0$ 处不连续.

例：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left((1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\right)^x} = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{dt}{t\cdot(t+1)} = \ln\frac{2e}{1+e}$.

例. 求 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta$ ⇒



$\therefore \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$.

利用右图结论，有:

$$0 \le e^{-R\sin\theta} \le e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}$$

代入. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\theta}{\pi}R}d\theta = \lim\limits_{R\to+\infty}\left(-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

例：设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x (f(t+h)-f(t))dt = f(x)-f(a) \quad (A<a<x<B).$$

(解1.) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F(t+h)-F(t)\right]\Big|_a^x$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F(x+h)-F(x)+F(a)-F(a+h)\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = f(x)-f(a)$.

(解2): $\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t+h)dt - \int_a^x f(t)dt\right]$.

$= \frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{a+h} f(t)dt\right]$

$= f(x)-f(a)$.

以几条或不会证的估计：

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy$$

有如下估计：$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\le\frac{1}{n+1}$

以含参变量常义积分的应用：

例：完全椭圆积分 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$，$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ $(0<k<1)$.

其中 $E(k)$ 满足积分方程. $E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0$.

例：阶数 n 为整数的 Bessel 函数 $J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$.

满足 Bessel 方程 $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$

例：$I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}$，证明：当 $0<\alpha<a$ 时，

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx.$$

解：变换 $x=\alpha t$，$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)\,dt}{\sqrt{1-t}}$

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)dt}{\sqrt{1-t}}+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{t\,\varphi'(\alpha t)dt}{\sqrt{1-t}}$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\left[-2\sqrt{\alpha-x}\cdot\varphi(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\,\varphi'(x)dx+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{x\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}$$

$$=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}(\alpha-x+x)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x-\alpha}}dx.$$

例：泊松积分 $\int_0^\pi\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx$.

证明：$0\le|a|\le1$ 时 $I(a)=0$；$|a|>1$ 时 $I(a)=2\pi\ln|a|$

5.19

证: $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx$

$=\int_0^{\pi}\left[2\ln a+\ln\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x+1\right)\right]dx$

$=2\pi\ln a+I(\frac{1}{a})$

下计算 $|a|<1$ 时: $I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{1}{1-2a\cos x+a^2}\cdot(2a-2\cos x)\,dx$

$\cancel{=2\int_0^{\pi}\frac{a-\cos x}{a^2-2a\cos x+1}dx}=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx$

$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\cdot\frac{1}{1+a^2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1-(\frac{2a}{1+a^2})\cos x}$

利用 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+e\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}$, 原式 $=\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{a}=0$.

(我们也可直接应用 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1-2r\cos x+r^2}=\frac{\pi}{1-r^2}$).

☆ $g(y)=\int_{V(y)}^{U(y)}f(x,y)\,dx$. $g'(y)=\int_{V(y)}^{U(y)}f_y'(x,y)\,dx+f(U(y),y)\,U'(y)$

$-f(V(y),y)\,V'(y)$.

例: $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ (计算其值)

一眼看出 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\underline{\int_a^b x^y\,dy}\left(=\int_0^b e^{y\ln x}dy=\left[\frac{1}{\ln x}e^{y\ln x}\Big|_a^b\right]\right)$

$\therefore$ 原式 $=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx=\int_a^b\left(\frac{1}{y+1}x^{y+1}\right)\Big|_0^1dy=\ln\frac{b+1}{a+1}$

含参变量的广义积分. 积分的一致收敛性.

例: 研究 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 的收敛性:

首先, $a\geq0$ 时不难推出其发散. ~~(……)~~ 原点处 $\frac{\cos x}{x}\sim\frac{1}{x}$ $(x\to0)$.

$a<0$: 若 $a=(n-\frac{1}{2})\pi$ 即 $\cos a=0$:

对~~奇点~~ $x=-a$, $\lim\limits_{x\to -a}\frac{\cos x}{x+a}\xlongequal{\text{洛必达}}\sin a$, 可知 $x=-a$ 不是奇点 // 若 $a\neq(n-\frac{1}{2})\pi$ 则发散

∴ 原函数收敛 ($\Rightarrow$ 同理使用狄利克雷判别法. ($\int_0^A \cos x\,dx < M$; $\frac{1}{x+a}\downarrow$, $\lim \frac{1}{x+a}=0$.)).

$a>0$

∴ $a=0$ 时发散. $a>0$ 时收敛. $a<0$ 时 $\begin{cases} a=(n-\frac{1}{2})\pi, \text{收敛} \\ a\neq(n-\frac{1}{2})\pi, \text{发散}. \end{cases}$

例: 研究 $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$ 的敛散性 (Tips: 与级数比较).

※ 先阐述一个重要命题:

对 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 和满足条件 $a_0=a$ 且严格单调递增趋于正无穷大的序列 $\{a_n\}$ $(n\geq 0)$. 则该广义积分与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx$ 之间,

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\xLeftrightarrow{\text{充要}}$ 对满足以上条件的每一个序列 $\{a_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx$ 均收敛

(2) 若 $f(x)$ 保号 (或 x 充分大时保号), 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\xLeftrightarrow{\text{充要}}$ 存在满足上述条件的某一个数列 $\{a_n\}$, 其相应的无穷级数收敛.

回到本题:

我们易得 $f(n\pi)=n\pi$. 因此有 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=+\infty$.

由于 $f(x)\geq 0$, 我们只要找到一个序列使其对应的无穷级数收敛/发散.

取 $a_0=0$, $a_k=k\pi$.

因此 由夹逼定理估计
$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{(k-1)\pi\,dx}{1+(k\pi)^n\sin^2 x} \leq \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}}_{A_k} \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{k\pi\,dx}{1+[(k-1)\pi]^n\sin^2 x}.$$

由于 $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$.

先计算 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+p^2\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\arctan(\sqrt{1+p^2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+p^2}} = O^*(p^{-1})$

∴ $A_k = O^*\left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\right)$. ∴ $\begin{cases} n>4, \text{收敛} \\ n\leq 4, \text{发散}. \end{cases}$

5.19

例：利用与级数比较的方法研究 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$.

拆分为 $\int_0^1\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$.

对左项：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+x^2}{x^n}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^{n-1}}$

$n<2$ 时收敛，否则发散.

对右项：$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$

原式 $=-\frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)}\Big|_1^{+\infty}-n\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x+x^2)}{\underline{x^{n+1}(1+2x)}}dx$

$n>-1$ 时收敛；

$n\le-1$ 时，取 $\{a_k\}$ 满足 $a_k+a_k^2=k\pi$，$a_k\nearrow$

配凑

$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx\right|=\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{|\sin(x+x^2)|(1+2x)}{x^n(1+2x)}dx$

$\ge\frac{1}{a_k^n(1+2a_k)}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}\sin(x+x^2)\,d(x+x^2)\right|$

$\ge\frac{1}{3}\cdot\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,dt\right|=\frac{2}{3}$.

$n\le-1$ 时 $\left(x^n(1+2x)\right)'=x^{n-1}\left[n+2(n+1)x\right]<0$ $(x>1$ 时$)$

而 $1<a_k<a_{k+1}$.

含参变量的广义积分的一致收敛性.

√先阐述以下几个命题：

(1) 阿贝尔一致收敛判别法：设广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 (y_1,y_2) 上一致收敛，且有函数 $\varphi(x,y)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 和 $y\in(y_1,y_2)$ 时一致有界且关于 x 单调. 则 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\varphi(x,y)dx$ 在 (y_1,y_2) 上一致收敛.

(2) 狄利克雷一致收敛判别法：设 $\int_a^c f(x,y)\,dx$ 在 $c\ge a$ 和 $y\in(y_1,y_2)$ 时一致有界，$\varphi(x,y)$ 关于 x 单调且 $x\to+\infty$ 时关于 $y\in(y_1,y_2)$ 一致收敛于0。

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx$ 在 (y_1,y_2) 内一致收敛.

例：$I=\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}dx$ 在 $y\in(0,1)$ 上一致收敛，但不存在其积分为收敛且与参数无关的强函数.

首先，假设 $0\le e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}\le\varphi(x)$；

取 $y=\frac{1}{x}$ 则 $\varphi(x)\ge1$ 显然 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)$ 发散，故不存在这样的 $\varphi(x)$.

下面证明 I 关于 $y\in(0,1)$ 一致收敛. $\int_M^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}dx$.

由定义，只要~~找到~~对 $\forall\varepsilon>0$，找到 $M\ge1$ 使 $\underline{\ }<\varepsilon$. ✓.

分类讨论：对充分小的 $y\in(0,1)$.

$$原式=\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}}\,dt = y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}}\,d\left(\frac{t}{y}\right).$$

$$<y\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2}\,dk = y\sqrt{\pi}.\quad \left(0<y<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\ 均可\right)$$

对 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\le y<1$：取 $M_0>1$ 使 $\int_{M_0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx<\varepsilon$.

取 $M>M_0+\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}$，$M-\frac{1}{y}>M_0$ 而 $\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}}\,dt = y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}}\,d\left(\frac{t}{y}\right)$ (由 $y<1$) $<(\ast)<\varepsilon$.

思路：y 充分小，对 y 放缩；
y 不充分小，集在 M 上下文章.

例：证明：狄利克雷积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$

(a). 在不含 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛

(b) 在每个包含 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上非一致收敛.

5.19　　　　　　　　　　　　　　　　Date

(a) 证：不妨考虑 $0<a<b$ 时：对于 $0<a<b$：

$$\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{M\alpha}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$$

由于 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$，因此 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K_0$ 使得 $K>K_0$ 时，

$\left|\int_K^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\varepsilon$；取 $M_0=\frac{K_0}{a}$，$M>M_0$ 时均有 $\left|\int_M^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|<\varepsilon$.

故一致收敛！

(b)：加强结论：只需证其对 $\alpha\in[0,b]$ 不一致收敛.

依题有：~~……~~ 反证法，假设之一致收敛

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M_0>0$，当 $M>M_0$ 时，$\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|<\varepsilon$.

而 $\lim\limits_{\alpha\to0}\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|=\lim\limits_{\alpha\to0}\left|\int_{M\alpha}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right|=\frac{\pi}{2}>\varepsilon$.

故矛盾！（不可包含 $\alpha=0$ 这个点）

例：证明 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha+1}$ 在 $\alpha\in(1,+\infty)$ 上不一致收敛.

（虽然很显然但是过程很经典！）.

反证法，假设其一致收敛，则有：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M$，当 $b'>b>M$ 时有

$\int_b^{b'}\frac{1}{x^\alpha+1}dx<\varepsilon$ 对一切 $\alpha>1$ 成立

而 $\lim\limits_{\alpha\to1}\int_b^{b'}\frac{1}{x^\alpha+1}dx=\int_b^{b'}\frac{1}{x+1}dx\le\varepsilon$ 不成立！

∴ 不一致收敛.

例：研究 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$ 在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

（阿贝尔判别法　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$；$e^{-\alpha x}\downarrow$ ✓）

积分号、极限号互换；

例：用Wallace公式（存疑）证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

首先证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{x^2}{n})^{-n}\right]dx$. (Δ)

取函数序列 $f_n(x) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$，有 $\frac{1}{f_n(x)} \le \frac{1}{f_{n+1}(x)}$，

$\{f_n(x)\}$ 单调递减收敛于 e^{-x^2}

$\therefore$ (Δ) 成立.

下有：$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx \xlongequal{x=\sqrt{n}\tan\theta} \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\tan^2\theta)^{-n}\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{(2n-2)}\theta\, d\theta = \sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (n\to\infty)$$

一个精妙的改写：

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$$

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-x}}{(\sin x)^{\alpha}}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha}x}dx.$$

例：计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$.

令 $x=\frac{1}{t}$ 反代

$\Downarrow$

分段 $(\int_0^1 \sim + \int_1^{+\infty} \sim)$

0

$\parallel$（二級结论）

解：首先 $\beta=0$ 时发散，故限定 $\beta>0$.

$\alpha=0$ 时，对 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x^2}{\beta^2+x^2}dx$,

令 $x=\beta t$，原式 $=\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\beta^2t^2)}{1+t^2}dt=\frac{2\ln\beta}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt+\underline{\frac{2}{\beta}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt}$

$=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}$;

$\alpha>0$ 时，看作 α 相关的积分，记为 $I(\alpha)$.

求导，$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}=\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2+x^2}-\frac{1}{\beta^2+x^2}\right)dx$

$=\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\pi}{\beta(\alpha+\beta)}$.

$\therefore I(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)+C(\beta)$，再去求 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\beta^2+x^2)}{\beta^2+x^2}$.

$\overset{x=\beta\tan\theta}{=\!=}\frac{1}{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\beta^2\sec^2\theta)d\theta=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}-\frac{2}{\beta}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\theta\, d\theta}_{\text{(欧拉积分)}}$

$=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}+\frac{2}{\beta}\cdot\frac{\pi}{2}\ln2$

$=\frac{\pi}{\beta}\ln(2\beta)\Rightarrow C(\beta)=0$

$\therefore I(\alpha)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)$.

$\therefore$ 综上，$\beta=0$ 时积分发散，$\beta\neq0$ 时 原式 $=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$

欧拉－泊松积分专题：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

例：计算 $\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx$.

法①：原式 $=e^{2a}\int_0^{+\infty}e^{-(x+\frac{a}{x})^2}dx$，利用 $\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx$

$=e^{2a}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+4a)}dx=e^{-2a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

法②：记原积分为 $I(\alpha)$，则

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}\cdot\left(-\frac{2a}{x^2}\right)dx.$$

记 $x=\frac{a}{t}$ 则 $I'(a)=-2I(a)$，

$$I(a)=Ce^{-2a}，由 I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

例. 利用欧拉-泊松积分计算 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx\quad(a>0)$

解：依题记其为 $I(b)$，首先 $I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.

其次，$I'(b)=\int_0^{+\infty}(-xe^{-ax^2}\sin bx)\,dx=\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$

$$=-\frac{b}{2a}I(b)\Rightarrow$$

$I(b)=Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$. C 待定 $\Rightarrow$ $b=0$ 代入得 $C=I(0)$.

$$\therefore I(b)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

例：求 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx.$　（Tips：分部积分＋规约）

$$原式=-\frac{1}{x}\left(e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x\right)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(-2\alpha xe^{-\alpha x^2}+\beta\sin\beta x\right)dx$$

$$=-2\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx+\beta\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=-\sqrt{\alpha\pi}+\frac{\pi}{2}|\beta|.$$

~~例：~~

还有几个更难的…先不例了…

后学者有刷完前几道觉得不够的可

联系本人

几个著名广义积分：

弗鲁拉尼：$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\ln\frac{b}{a}$ 其中 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛.

欧拉-泊松：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

狄利克雷：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$.

拉普拉斯：$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}$

$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}\operatorname{sgn}a$.

菲涅尔：$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

应用：设 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}dx\ (\alpha>0)$.

$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

$\therefore I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+C.$ 设 $|I(\alpha)|\le\int_0^{+\infty}\beta e^{-\alpha x}dx=\frac{\beta}{\alpha}$

$\therefore I(+\infty)=0,\ C=\frac{\pi}{2}$.

即 $I(\alpha)=\arctan\frac{\beta}{\alpha}$.

拉普拉斯变换：

$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$.

(1) $f(t)=t^n$. 原式 $=\frac{n!}{p^{n+1}}$;

(2) $f(t)=\sqrt{t}$. $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sqrt{t}\,dt=2\int_0^{+\infty}e^{-px^2}x^2dx=\frac{2}{p\sqrt{p}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^2du$.

$=\frac{2}{p\sqrt{p}}\left(-\frac{1}{2}ue^{-u^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$.

(3): $f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t} \Rightarrow F(p)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}-e^{-(p+1)t}}{t}dt=\ln\frac{p+1}{p}$.

(4): $f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$.

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\alpha\sqrt{t}\,dt=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}.$$

(5): $f(t)=J_0(bt)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)d\varphi$.

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-at}dt\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)dt$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(a^2+b^2)-b^2\cos^2\varphi}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d(\tan\varphi)}{a^2+(a^2+b^2)\tan^2\varphi}$$

$$=\frac{2a}{\pi}\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\tan\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

例：切比雪夫—埃米特多项式：$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.

有：$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n.\end{cases}$$

5-21 下午 Date

欧拉积分：

☆ 贝塔函数 $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

令 $t=\cos^2\varphi$. $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\, d\varphi$.

令 $t=\frac{1}{1+u}$，即 $u=\frac{1-t}{t}$，$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du$.

☆ 伽玛函数 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$. ☆ 熟记 $\frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}$ 型！

$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$

(1): $\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-t}d(t^x)=\frac{1}{x}e^{-t}t^x\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t^x\cdot -e^{-t}dt$

即 $\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$，$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

即 $\Gamma(n+1)=n!$

☆ 狄利克雷公式：$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

余元公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

勒让德加倍公式：$\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$.

例. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}=B(\frac{5}{4},\frac{3}{4})=\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)}$

由 $\Gamma(\frac{5}{4})=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$，$\Gamma(2)=1$，$\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\pi$

∴原式 $=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

☆例：$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx \xlongequal{令x^n=t}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}dt$，$0<m<n$ 时积分收敛.

$I=\frac{1}{n}B(1-\frac{m}{n},\frac{m}{n})=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$

特别地，$m=1<n$ 时. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}dx=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.

~~（有些难）~~……

例（拓）：求 $\int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx$ $(0<a<b,\ c>0)$，并用欧拉积分表示。

① 令 $x=a+(b-a)t$，

$$I=\frac{1}{b-a}\int_0^1\frac{t^m(1-t)^n}{(t+\lambda)^{m+n+2}}dt,\quad 其中\ \lambda=\frac{a+c}{b-a}.$$

例② 作线性分式代换 $\frac{t}{t+\lambda}=\frac{\tau}{1+\lambda}$，即 $\tau=\frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda}$.

有：$\frac{1-t}{t+\lambda}=\frac{1-\tau}{\lambda}$；$\frac{\lambda dt}{(t+\lambda)^2}=\frac{d\tau}{1+\lambda}$.

$$\therefore I=\frac{1}{b-a}\int_0^1\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right)^m\left(\frac{1-\tau}{\lambda}\right)^n\frac{d\tau}{\lambda(1+\lambda)}$$

$$=\frac{1}{(b-a)(1+\lambda)^{m+1}\lambda^{n+1}}B(m+1,n+1).$$

$$=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}B(m+1,n+1).$$

例 求 $\int_0^\pi\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx$ $(0<|k|<1)$.

解：令 $t=\tan\frac{x}{2}$，即 $x=2\arctan t$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$原式=\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{n-1}}{\left(1+k\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^n}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{(2t)^{n-1}}{(1+t^2+k(1-t^2))^n}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{(2t)^{n-1}}{(1+k+(1-k)t^2)^n}dt$$

~~作代换~~ $\cancel{k(1-t^2)=\ldots}$

令 $(1-k)t^2=(1+k)p$ 则.

$t=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}p}$，$dt=\frac{1}{2\sqrt{p}}\cdot\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}dp$ 代入得.

原式 $= 2\int_0^{+\infty} \frac{\left[2\cdot\frac{(1+k)}{1-k}\cdot p\right]^{\frac{n-1}{2}}}{(1+k)^n(1+p)^n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\,dp$

$= \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{n}{2}}}{(1+k)^n} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{p^{\frac{n}{2}-1}}{(1+p)^n}$

$= \frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$

$\left(= \frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right).$

例：拉比积分 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$

∵ $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx + \int_0^1 \ln(1-x)\,dx = \int_0^1 \ln\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)dx$

$= \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,dx$

∴ $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin s\,ds$

$= \ln\sqrt{2\pi}.$

※欧拉乘积：$\prod_{m=1}^{n}\int_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$

欧拉公式：(a) $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$

(b) $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x.$

※曲线 $r^n = a^n\cos n\varphi$, $L = aB\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2}\right) = a2^{\frac{1}{n}-1}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{n})}$

傅里叶级数.   Date

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

$\mathcal{L}$ 一般理论:

(1) Parseval 等式: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$.

(2) 记 $f'(x)$ 的 Fourier 级数为 $\{a_n'\}\ \{b_n'\}$, 则 $a_0' = 0$, $a_n' = n b_n$. $b_n' = \cancel{\ } -na_n$.

几个基本的计算:

$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$;

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l \\ 0, & l < x < 2l \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{A}{2}\left(1 + \operatorname{sgn}\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{l}}{2n-1}.$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

对 $f(x) = |x| \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \Rightarrow$ 利用(2).

$$|x| = \int_0^x \operatorname{sgn} t\,dt = \int_0^x \left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t\right]dt.$$

$$= -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t\Big|_0^x = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t + \underbrace{\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}}_{a_0}$$

可由 a_0 求 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cdot\frac{\sin nx}{\sin x}\ (|\alpha| < 1) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nx\right).$$

(由于
$$\begin{cases} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} = 1 + 2[\cos 2x + \cos 4x \cdots + \cos(2n-2)x] \\ \frac{\sin(2n)x}{\sin x} = 2[\cos x + \cos 3x \cdots + \cos(2n-1)x]. \end{cases}$$

对 x^2: $\because\ 2x = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$

$$x^2 = \int_0^x 2t\,dt = \int_0^x \left[4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nt\right]dt = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 4}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \sin nt\,dt$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt\Big|_0^x = \frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx + \frac{\pi^2}{3}.$$

($a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ 代入)

例: $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-e^{ix}q}-\frac{1}{1-e^{-ix}q}\right)=\sum_{n\geq 1}^{\infty}q^n\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx.$

积分有 $\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx.$

对 $\ln|\sin\frac{x}{2}|$ 做傅氏级数展开:

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt.=-2\ln 2.$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\left(\sin nx\cdot\ln\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_{0^+}^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx.$

$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t+\sin(2n-1)t}{\sin t}\,dt=-\frac{1}{n}.$

(由于 $\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt=\pi$).

例 对 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,dt\Rightarrow F(x)\sim\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx$