2023年春季高等数学A（二） 习题课讲义

曾偲 北京大学

最后更新于 2023 年 6 月 5 日

课程信息：文史楼108, 每周二晚18:40 – 20:30.

课程安排：

1. 第$n(n \geq 3)$周习题课收第$n-1$周周二、第$n-2$周周四所留作业, 反馈第$n-1$周习题课所交作业（我自己也理不清楚, 见后文表格）；接受习题课前上交纸质版作业/电子版作业, 电子版作业用邮件发到邮箱zengcai@pku.edu.cn, 请不要上交手写拍照的“假电子版”；作业按完成度判定成绩, 所有得分去掉最低分后取平均值为最终得分.

2. 习题课教学内容主要为高等数学A（二）课程内容相关的习题, 在习题讲解之外也将对偏微分方程以及少量其它拓展内容进行介绍.

有用的工具：LaTeX(编辑数学文章), Mathematica(辅助计算等), Geogebra(辅助作图).

有用的网站：Overleaf(在线编辑LaTeX), Mathematics Stack Exchange(数学问答论坛), arXiv(查找前沿已发表论文或预印本), nLab(范畴论风格的数学百科).

符号约定：

(a) $\mathbb{Q}$: 有理数域; $\mathbb{N}_{(+)}$: (正)自然数集; $\mathbb{Z}$: 整数环; $\mathbb{R}$: 实数域; $\mathbb{C}$: 复数域.

(b) pt: 单点集; $\mathbb{S}^n$: n维单位球面; $\mathbb{D}^n$: n维单位闭球; $\mathbb{B}^n$: n维单位开球.

(c) id: 恒同映射; inc: 包含映射; pr: 投影映射.

(d) const: 常值.

前言：

本讲义为北京大学2023年春高等数学A（二）习题课所用讲义, 各章内容待定.

关于学习本讲义, 以“[*]”标注的内容不在课程要求的范围内, 无需掌握；补充习题有助于学习本课程, 但同样不要求掌握.

* 作业上交日期与内容[1]：

上交日期	作业内容
第3周3月7日	习题7.1: 3, 4;
	习题7.2: 2.(2)(3), 5, 8, 12, 14, 17, 21, 24, 26;
	习题7.3: 4, 6, 8, 14, 16, 19, 21.
第4周3月14日	习题7.4: 2, 3, 7, 9;
	习题8.1: 4, 5, 6;
	习题8.2: 3, 4, 8, 10.
第5周3月21日	习题8.3: 1.(2)(4), 2.(2), 4.(1), 7, 8, 11.
第6周3月28日	习题8.4: 1, 3, 6;
	习题8.5: 1, 4, 5, 10;
	习题8.6: 1, 4, 7, 10, 12, 13.
第7周4月4日	习题9.1: 2.(1)(5), 3.(4), 5(2);
	习题9.2: 1.(2)(5)(8), 3.(4), 4.(1), 5.(4), 13.(2)(3), 14.(4)(8), 15.(5), 16.(2)(4).
第8周4月11日	习题9.3: 4, 5;
	习题9.4: 2, 5;
	习题9.5: 1.(2)(3), 2.
第9周4月18日	习题9.5: 3.(6)(7), 4.(5);
	习题9.6: 1, 3, 5, 6;
	习题9.7: 1.(2), 2.(3).
第10周4月25日	习题10.1: 1.(2)(3), 3.(2)(7), 5;
	习题10.2: 1.(1)(4)(6), 2.(5)(8)(9)(11), 4, 6.
第12周5月9日	习题10.3: 1.(3)(6)(10), 2, 3, 7;
	习题10.4: 2.(4)(5).
第13周5月16日	习题10.4: 1.(1)(2), 3.(2)(5)(6), 5, 6;
	习题10.5: 2.(4)(7)(10), 3.(2)(4)(5).
第14周5月23日	习题10.6: 1.(2)(9), 2.(2), 3;
	习题11.1: 1.(3)(8)(10)(12)(13), 3.(6)(9), 4.(1).
第15周5月30日	习题11.2: 1.(1), 2.(2), 3.(1);
	习题11.3: 1.(1)(3)(4), 2.(3)(5), 3.

[1]此处作业题号所指均为教材[5]《高等数学（第二版）》（李忠, 周建莹）中习题, 除非另有说明.

目录

1 重积分

1.1 重积分计算技术

习题 1.1.1. 利用积分换序计算以下累次积分：

1. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$
2. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^y \left(\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^x \sin x\right)\mathrm{d}x.$

Solution. 1. 作积分换序得到

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1 (\sin x - x\sin x)\,\mathrm{d}x = 1 - \sin 1,$$

即原式$= 1 - \sin 1$.

2. 作积分换序得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^y \left(\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^x \sin x\right)\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \left(\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^x \sin x\right)\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \left(x\mathrm{e}^{-x^2} + x\mathrm{e}^x \sin x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}\sin 1}{2},\end{aligned}$$

即原式$= \frac{1}{2\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}\sin 1}{2}$. □

习题 1.1.2. 作极坐标变换，将重积分$\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$化为以径向距离为积分变量的（一元）定积分，其中函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$在$\mathbb{R}$上内闭可积，积分区域$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$.

Solution. 作变换$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$，由此

$$\begin{aligned}\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} rf(r)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta + \int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r - \int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\arccos\frac{1}{r}\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

即得所求. □

补充习题 1.1. 对如下累次积分作直角坐标变换：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}r \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3 z^2 \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}z.$

习题 1.1.3. 设$D\subset\mathbb{R}^3$为曲线$\gamma:\begin{cases} x^2+z^2=x \\ y=\sqrt{x^2+z^2}\end{cases}$绕$z$轴旋转一周所得曲面围成的区域, 计算重积分

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v.$$

Solution. 记曲线γ旋转得到曲面S, 设其上一点(x_0,y_0,z_0)由曲线γ上一点(x_1,y_1,z_1)旋转得到, 也即

$$x_0^2+y_0^2=x_1^2+y_1^2,\ z_0=z_1$$

与γ的方程联立消去x_1,y_1,z_1, 得到

$$(x_0^2+y_0^2+z_0^2-1)^2=1-4z_0^2$$

因此S的方程为$(x^2+y^2+z^2-1)^2=1-4z^2$, 作球坐标变换$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$, 此时整理得$S$的方程为$r^2=2-4\cos^2\varphi$, 于是

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2-4\cos^2\varphi}}r^3\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(2-4\cos^2\varphi)^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{16\sqrt{2}\pi}{15}.\end{aligned}$$

即原式=$\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{15}$. □

习题 1.1.4. 设$D\subset\mathbb{R}^2$为直线$l:x+y=1$与两坐标轴围成的区域, 计算重积分

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}\mathrm{d}\sigma$$

Solution. 作变换$\begin{cases} x=r\cos^2\theta, \\ y=r\sin^2\theta,\end{cases}$ 则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=2r\cos\theta\sin\theta$, 从而

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 2r^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{20},$$

即原式=$\dfrac{\pi}{20}$. □

补充习题 1.2. 设$D\subset\mathbb{R}^2$为曲线$\gamma:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$与两坐标轴围成的区域, 计算重积分

$$\iint_D\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

[Hint] 作变换$\begin{cases} x=r\cos^4\theta, \\ y=r\sin^4\theta\end{cases}$ 即可. 答案为$\dfrac{2}{15}$.

习题 1.1.5. 设$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x,y,z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$, $0<c<3$为常数, 计算重积分

$$\iiint_D \frac{\mathrm{d}v}{(x+y+z)^c}.$$

Solution. 作变换$\begin{cases} x=u(1-v),\\ y=uv(1-w),\\ z=uvw, \end{cases}$ 则$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=u^2v$, 从而

$$\iiint_D \frac{\mathrm{d}v}{(x+y+z)^c}=\int_0^1 \mathrm{d}w\int_0^1 u^{2-c}\mathrm{d}u\int_0^1 v\mathrm{d}v=\frac{1}{2(3-c)},$$

即原式$=\dfrac{1}{2(3-c)}$. □

习题 1.1.6. 设$D\subset\mathbb{R}^2$为曲线$\gamma_{11}: x^2-y^2=1$, $\gamma_{12}: x^2-y^2=9$, $\gamma_{21}: xy=2$, $\gamma_{22}: xy=4$围成的有限区域, 计算重积分

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma.$$

[Hint] 作代换$\begin{cases} u=x^2-y^2,\\ v=2xy \end{cases}$ 即可, 结果为8.

习题 1.1.7. 设$a,b,c\in\mathbb{R}$为常数, $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 函数$f\in C[-r,r]$, 证明:

$$\iiint_{\mathbb{D}^3} f(ax+by+cz)\mathrm{d}v=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(r\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Proof. 作第一类正交变换$(x,y,z)\mapsto(\xi,\eta,\zeta)$, 使得$\zeta=\dfrac{1}{r}(ax+by+cz)$, 则有

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{D}^3} f(ax+by+cz)\mathrm{d}v&=\iiint_{\mathbb{D}^3} f(r\zeta)\mathrm{d}v\\ &=\int_{-1}^1 f(r\zeta)\mathrm{d}\zeta\iint_{\xi^2+\eta^2\leq 1-\zeta^2}\mathrm{d}\sigma_{\xi\eta}\\ &=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(r\zeta)\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

即命题成立. □

习题 1.1.8. 设$A\in\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$为正定矩阵, 计算$\mathbb{R}^3$中椭球体$D:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\leq 1$的体积.

Solution. 由A正定, 存在$C\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$使得$A=C^{\mathrm{T}}C$, 作代换$\boldsymbol{\xi}=C\boldsymbol{x}$, 则所求体积

$$\mathrm{Volume}(D)=\iiint_{x^{\mathrm{T}}Ax\leq 1}\mathrm{d}v=\frac{1}{\det C}\iiint_{\xi^{\mathrm{T}}\xi\leq 1}\mathrm{d}v=\frac{4\pi}{3\det C},$$

其中$\det C=\sqrt{\det A}$, 也即所求为$\dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$. □

习题 1.1.9 (Gauss积分). 考虑下列问题：

1. 计算（广义）积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{c^2}}\mathrm{d}x$, 其中$c>0$为常数.
2. 证明：$\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right)} < \int_0^a \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x < \sqrt{\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-a^2})}$, 其中$a>0$为常数.

Solution. 1. 考虑

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{c^2}}\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{c^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{c^2}}\mathrm{d}r = c^2\pi,$$

由此即知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{c^2}}\mathrm{d}x = c\sqrt{\pi}$.

2. 对待证式平方, 并利用对称性, 即需证明

$$2\pi\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\right) < \iint_{[-a,a]^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma < 2\pi\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right).$$

为此, 只需注意$\mathbb{D}^2(a)\subsetneq[-a,a]^2\subsetneq\mathbb{D}^2(\sqrt{2}a)$, 故

$$\iint_{\mathbb{D}^2(a)} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma \le \iint_{[-a,a]^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma \le \iint_{\mathbb{D}^2(\sqrt{2}a)} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma,$$

利用极坐标变换易知上式即给出前式, 进而原命题成立. □

习题 1.1.10. [*] 设$f\in C^1[0,1]$, 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\sin\varphi\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Proof. 令$\cos t=\sin\varphi\sin\theta$, 则有$\mathrm{d}\theta = -\frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2 t}}\mathrm{d}t$, 进而

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\sin\varphi\sin\theta)\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\sin t f(\cos t)}{\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2 t}}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t f(\cos t)\mathrm{d}t\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2 t}}\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t f(\cos t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即命题成立. □

补充习题 1.3. [*] [*] 计算累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(2-\sin\varphi\sin\theta)\sin\theta}{2-2\sin\varphi\sin\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$.

[Hint] 利用习题1.1.10的结果. 答案为$-\frac{\pi^2\ln 2}{16}$.

习题 1.1.11. [∗] 设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$在$u=0$处可导, $f(0)=0$, 且$f'(0)=a$, 计算

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{1}{t^5}\iiint_{D_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

其中积分区域$D_t=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 2tz\}$.

Proof. 作球坐标变换$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$, 则有

$$\iiint_D f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2t\cos\varphi} r^2 f(r^2)\mathrm{d}r,$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+0}\frac{1}{t^5}\iiint_{D_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v &= \lim_{t\to 0+0}\frac{2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2t\cos\varphi} r^2 f(r^2)\mathrm{d}r}{t^5}\\ &= \lim_{t\to 0+0}\frac{2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi(2t\cos\varphi)^2 f\left((2t\cos\varphi)^2\right)2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{5t^4}\\ &= \frac{16\pi}{5}\lim_{t\to 0+0}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi f\left((2t\cos\varphi)^2\right)\mathrm{d}\varphi}{t^2},\end{aligned}$$

这里由$f(0)=0$及$f'(0)=a$可得, 对任意$\varepsilon>0$, 当t充分小时有

$$\left|\frac{f\left((2t\cos\varphi)^2\right)}{(2t\cos\varphi)^2}-a\right|\le\varepsilon \Rightarrow (a-\varepsilon)(2t\cos\varphi)^2\le f\left((2t\cos\varphi)^2\right)\le(a+\varepsilon)(2t\cos\varphi)^2,$$

将不等关系代入前式计算有

$$\begin{aligned}&\frac{2(a-\varepsilon)t^2}{3}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi f\left((2t\cos\varphi)^2\right)\mathrm{d}\varphi\le\frac{2(a+\varepsilon)t^2}{3}\\ \Rightarrow&\lim_{t\to 0+0}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi f\left((2t\cos\varphi)^2\right)\mathrm{d}\varphi}{t^2}=\frac{2a}{3},\end{aligned}$$

于是所求值为$\dfrac{16\pi}{5}\cdot\dfrac{2a}{3}=\dfrac{32\pi a}{15}$. □

习题 1.1.12. 设$f\in C^1(\mathbb{D}^2)$, 计算重积分$\displaystyle\iint_{\mathbb{D}^2}\frac{xf'_y(x,y)-yf'_x(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$.

Solution. 作极坐标变换$\begin{cases} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$, 注意$f'_\theta=-f'_x r\sin\theta+f'_y r\cos\theta$, 故

$$\iint_{\mathbb{D}^2}\frac{xf'_y(x,y)-yf'_x(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} f'_\theta\mathrm{d}\theta=0$$

其中注意显然$f|_{\theta=0}\equiv f|_{\theta=2\pi}$. □

1.2 重积分相关不等式问题

习题 1.2.1. 设$f \in R[a,b]$, 证明：

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x,$$

且当f连续时, 等号成立当且仅当f为常值函数.

Proof. 对待证式两端乘2, 此时

$$\text{LHS} = 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]^2} 2f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma,$$

$$\text{RHS} = (b-a)\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b f(y)^2\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]^2}\left(f(x)^2+f(y)^2\right)\mathrm{d}\sigma,$$

由此只需证明

$$\iint_{[a,b]^2}\left(f(x)^2+f(y)^2\right)\mathrm{d}\sigma - \iint_{[a,b]^2} 2f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{[a,b]^2}(f(x)-f(y))^2\mathrm{d}\sigma \ge 0,$$

自然成立.

在连续性的条件下, 可见等号成立当且仅当$f(x)-f(y)\equiv 0, \forall (x,y)\in[a,b]^2$, 即$f\equiv \text{const}$. □

[Remark] 注意结论：设$f\in C(D)$, $D\subset\mathbb{R}^2$（事实上任意维数均成立）, 若$f\ge 0$, 则有$\iint_D f\mathrm{d}\sigma \ge 0$, 等号成立当且仅当$f\equiv 0$.

习题 1.2.2. 设$f\in C[0,1]$, $f(x)\ge c>0, \forall x\in[0,1]$（$c$为常数）, 证明：

$$1 \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \le \frac{(m+M)^2}{4mM},$$

其中m, M分别为f在$[0,1]$上的最小和最大值.

Proof. 首先有

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}\sigma \ge \iint_{[0,1]^2}\mathrm{d}\sigma = 1,$$

另一方面, 考虑

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}+\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\right)\mathrm{d}x\right]^2\\ &\le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2 = \frac{(m+M)^2}{4mM},\end{aligned}$$

即知命题成立. □

习题 1.2.3. 设$f\in C^1[a,b]$, 证明：$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\le \max\left\{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|,(b-a)\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right\}$.

Proof. 若f在(a,b)上恒正或恒负, 自然有$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

现设存在$c\in(a,b)$, 使得$f(c)=0$, 则$f(x)=\displaystyle\int_c^x f'(t)\mathrm{d}t$, 此时

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b\left|\int_c^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\le\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t=(b-a)\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

也有命题成立. □

习题 1.2.4. 设$f\in C^1[a,b]$, $f(a)=0$, 证明：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(t)^2\mathrm{d}t.$$

Proof. 由$f(a)=0$可得$f(x)=\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^b\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right||f'(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\left(\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t\right)\\&\le\int_a^b\left(\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t\right)\\&=\frac12\left(\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\Bigg|_a^b=\frac12\left(\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\\&\le\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(t)^2\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即命题成立. □

补充习题 1.4. 设$f\in C^1[a,b]$, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, 证明：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{4}\int_a^b f'(t)^2\mathrm{d}t.$$

[Hint] 模仿习题1.2.4, 分区间$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$与$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$进行讨论.

习题 1.2.5. 设$f\in C[0,1]$, $a\in\mathbb{R}$满足

$$f(x)=1+a\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y,$$

证明：$a\le\dfrac12$.

Proof. 记$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则由题意可得

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1+a\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y=1+a\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(y-x)\mathrm{d}x,$$

换元$t=y-x$, 则有

$$\text{前式}=1+a\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(t)\mathrm{d}t=1+a\int_0^1\left(\int_0^y f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\int_0^y f(t)\mathrm{d}t\right)=1+\frac{I^2a}{2},$$

从而$a=\dfrac{2(I-1)}{I^2}\leq\dfrac{1}{2}$成立（注意由上述结果可见$I\neq 0$）. □

习题 1.2.6. 设$f\in C^1(\mathbb{D}^2(R))(R>0)$, $f|_{\partial\mathbb{D}^2(R)}\equiv 0$, 证明:

$$\left|\iint_{\mathbb{D}^2(R)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\sigma\right|\leq\frac{\pi R^3}{3}\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{D}^2(R)}\left\|\nabla f\right\|.$$

Proof. 记$\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{D}^2(R)}\left\|\nabla f\right\|=M$, 对任意点$\boldsymbol{x}\in\mathbb{D}^2(R)$, $\boldsymbol{x}\neq 0$, 从0向$\boldsymbol{x}$引射线l_x交$\partial\mathbb{D}^2(R)$于点$\tilde{\boldsymbol{x}}$, 考虑微分中值定理可知存在$\boldsymbol{\xi}\in l_x$, 使得

$$|f(\boldsymbol{x})|=|f(\boldsymbol{x})-f(\tilde{\boldsymbol{x}})|=\left|\nabla f|_\xi\cdot(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})\right|\leq\left\|\nabla f|_\xi\right\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\leq M(R-\|\boldsymbol{x}\|),$$

作极坐标变换, 即知

$$\left|\iint_{\mathbb{D}^2(R)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\sigma\right|\leq\iint_{\mathbb{D}^2(R)}|f(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}\sigma\leq\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R M(R-r)r\mathrm{d}r=\frac{\pi R^3M}{3},$$

即命题成立. □

1.3 重积分的应用

习题 1.3.1. 证明极坐标系中由连续曲线$\gamma: r=r(\theta)$与射线$l_1:\theta=\alpha$, $l_2:\theta=\beta$所围区域D的面积

$$\mathrm{Area}(D)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\mathrm{d}\theta,$$

由此计算如下区域面积:

1. 曲线$\gamma:(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$与两条坐标轴所围区域.
2. 双纽线$\gamma_1:(x^2+y^2)^2=8xy$与圆$\gamma_2:(x-1)^2+(y-1)^2=1^2$所围有界区域.

Solution. 按极坐标系下的重积分, 计算即有

$$\mathrm{Area}(D)=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\mathrm{d}\theta.$$

后续具体区域面积计算略去, 结果分别为$\dfrac{\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}+\dfrac{\pi}{6}$以及$\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{8}\right)$. □

习题 1.3.2. 计算$\mathbb{R}^3$中由三个柱面$S_1: y^2+z^2=1, S_2: x^2+z^2=1, S_3: x^2+y^2=1$所围区域$D$的体积.

Solution. 注意对称性, 并利用柱坐标, 即有

$$\text{Volume}(D) = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_0^{\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}} \mathrm{d}z = 8\sqrt{2}-\frac{16}{3}.$$

即所求区域体积为$8\sqrt{2}-\dfrac{16}{3}$. □

习题 1.3.3. 计算$\mathbb{R}^3$中密度均匀的单位上半闭球D的重心坐标.

Solution. 不妨设半球密度为1, 由对称性可见其重心坐标具有$(0,0,\bar{z})$的形式, 其中

$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z\mathrm{d}v}{\iiint_D \mathrm{d}v} = \frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r} = \frac{3}{8}$$

即知重心坐标为$\left(0,0,\dfrac{3}{8}\right)$. □

习题 1.3.4. 设$D\subset\mathbb{R}^2$为摆线段$\gamma: \begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$以及x轴所围区域, 其中$a>0$为常数, 令该区域具有均匀面密度1, 计算其对x轴的转动惯量.

Solution. 所求转动惯量为

$$\iint_D y^2\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(t(x))} y^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y(t(x))^3\mathrm{d}x,$$

这里由$x=a(t-\sin t)$, 可得$\mathrm{d}x = a(1-\cos t)\mathrm{d}t$, 于是

$$\text{前式} = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^4(1-\cos t)^4\mathrm{d}t = \frac{35\pi a^4}{12}.$$

即所求转动惯量为$\dfrac{35\pi a^4}{12}$. □

习题 1.3.5 (平行轴定理). [*] 设质量为m的（3维）物体对经过其重心的轴l的转动惯量为I, 对与轴l平行且与其相距$d(d>0)$的轴$\tilde{l}$的转动惯量为$\tilde{I}$, 证明：$\tilde{I}=I+md^2$.

Proof. 作直角坐标系, 使得物体重心为原点, 且l为z轴, 记$\tilde{l}$过点$(x_1,y_1,0)$, 另记物体所占区域为D, 相应有密度函数$\rho\in R(D)$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \iiint_D \rho\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\mathrm{d}v \\ &= \iiint_D \rho(x^2+y^2)\mathrm{d}v + (x_1^2+y_1^2)\iiint_D \rho\mathrm{d}v - 2x_1\iiint_D \rho x\mathrm{d}v - 2y_1\iiint_D \rho y\mathrm{d}v \\ &= I+md^2-2x_1m\bar{x}-2y_1m\bar{y} = I+md^2,\end{aligned}$$

其中注意D的重心在原点. □

补充习题

补充习题 1.5. 设$D \subset \mathbb{R}^2$为有界闭区域, C^1同胚变换$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 满足Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

并将区域D变换到$\tilde{D}$, 证明: $\displaystyle\iint_D (f_x'^2 + f_y'^2)\mathrm{d}\sigma = \iint_{\tilde{D}} (f_u'^2 + f_v'^2)\mathrm{d}\sigma.$

[Hint] 注意$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u'^2 + x_v'^2 = y_u'^2 + y_v'^2$即可. □

补充习题 1.6. [*] 计算积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x.$

[Hint] 首先注意原积分可写作$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 x^y \mathrm{d}y$, 再做积分换序即可, 但需注意说明可积性. 答案为$\ln 2$.

补充习题 1.7. 设$D \subset \mathbb{R}^2$为直线$l: x + y = 1$与两条坐标轴围成的区域, 计算重积分

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}\sigma.$$

[Hint] 答案为$\dfrac{16}{15}$.

补充习题 1.8. 设$D \subset \mathbb{R}^2$为双纽线$\gamma: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$所围区域, 其中$a > 0$为常数, 计算重积分

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma.$$

[Hint] 答案为$\dfrac{\pi a^4}{8}$.

补充习题 1.9. 设$a, b \in \mathbb{R}$为常数, $a^2 + b^2 \neq 0$, 计算（广义）重积分$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} |ax+by|\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}\sigma.$

[Hint] 答案为$-2\sqrt{2(a^2+b^2)}\pi$.

补充习题 1.10. [*] 计算下列曲线在第一象限所围有界区域面积:

$$\gamma_i: \frac{x^2}{\lambda_i} + \frac{y^2}{\lambda_i - c^2} = 1,$$

其中$\lambda_i, i = 1,2,3,4$依次取$\dfrac{c^2}{3}, \dfrac{2c^2}{3}, \dfrac{4c^2}{3}, \dfrac{5c^2}{3}$, $c > 0$为常数.

[Hint] 模仿习题1.1.6, 通过换元将积分区域变为方形区域. 答案为$\dfrac{c^2(\sqrt{10}-2)}{6}\arcsin\dfrac{1}{3}$.

补充习题 1.11. [*] 设$A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$为正定矩阵, 计算重积分

$$\iiint_{x^{\mathrm{T}}Ax\leq 1} \mathrm{e}^{\sqrt{x^{\mathrm{T}}Ax}}\mathrm{d}v.$$

[Hint] 对A作正交对角化. 答案为$\dfrac{4\pi(\mathrm{e}-2)}{\sqrt{\det A}}$.

补充习题 1.12. 计算

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \iint_{\mathbb{D}^3(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

其中$f \in C(\mathbb{R}^3)$, 且$f(1)=1$.

[Hint] 作球坐标变换即可. 答案为4π.

补充习题 1.13. 设$f \in C^1[a,b]$, $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)^2\left[(b-a)^2-(x-a)^2\right]\mathrm{d}x.$$

[Hint] 由$f(a)=0$可得$f(x)=\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$, 利用Cauchy-Schwarz不等式对$f(x)^2$作放缩后代回待证式.

补充习题 1.14. [*] 设$\mathbb{R}^3$中闭球$\mathbb{D}^3(R)(R>0)$具有质量M, 满足其各点处密度与该点到球心的距离成正比, 计算该球对其直径的转动惯量.

[Hint] 答案为$\dfrac{4MR^2}{9}$.

补充习题 1.15. [*] 给定（3维）物体, 以其重心为原点建立直角坐标系, 轴l过原点, 且与各坐标轴分别成夹角α,β,γ, 证明：该物体对轴l的转动惯量为

$$I = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma,$$

其中I_x, I_y, I_z为物体对各坐标轴的转动惯量,

$$K_{xy} = \iiint_D \rho xy\mathrm{d}v,\ K_{yz} = \iiint_D \rho yz\mathrm{d}v,\ K_{xz} = \iiint_D \rho xz\mathrm{d}v$$

为惯性积, 其中$D \subset \mathbb{R}^3$为物体所占区域, $\rho \in R(D)$为物体密度函数.

2 曲线与曲面上的积分

2.1 曲线, 曲面积分计算技术

习题 2.1.1. 计算曲线
$$\gamma:\begin{cases}(x-y)^2=a(x+y),\\ x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2,\end{cases}$$
在原点与点(x_0,y_0,z_0)间弧长, 其中$a>0$为常数, $x_0>0$.

Solution. 用z表示$x+y,x-y$, 进而表示x,y, 得到曲线参数方程有
$$x=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{4}{3}}+\frac{\sqrt[3]{9a}}{4}z^{\frac{2}{3}},\ y=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{4}{3}}-\frac{\sqrt[3]{9a}}{4}z^{\frac{2}{3}},$$
其中参数$z\in(0,z_0)$或$(z_0,0)$, 于是
$$\mathrm{d}s=\left\|\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right\|\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}z=\sqrt{2}\mathrm{d}x,$$
由此所求弧长为$\int_\gamma \mathrm{d}s=\int_0^{x_0}\sqrt{2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}x_0.$ □

补充习题 2.1. 计算曲线
$$\gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ \sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=a,\end{cases}$$
在点$(a,0,0)$与点(x_0,y_0,z_0)间弧长, 其中$a>0$为常数.

[Hint] 答案为$\sqrt{2}a\arcsin\dfrac{|z_0|}{a}$.

习题 2.1.2. 设γ为平面$\pi:x+y+z=0$与球面$\mathbb{S}^2(a)(a>0)$的交线, 计算曲线积分
$$\oint_\gamma x^2\mathrm{d}s.$$

Solution. 利用对称性可见$\oint_\gamma x^2\mathrm{d}s=\oint_\gamma y^2\mathrm{d}s=\oint_\gamma z^2\mathrm{d}s$, 于是
$$\oint_\gamma x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\gamma(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\,\mathrm{Length}(\gamma)=\frac{2\pi a^3}{3},$$
即原式$=\dfrac{2\pi a^3}{3}$. □

习题 2.1.3. 设S为柱面$S_1:x^2+z^2=2az$被锥面$S_2:z=\sqrt{x^2+y^2}$所截曲面片, 其中$a>0$为常数, 计算曲面积分
$$\iint_S z\mathrm{d}A.$$

Solution. 在S上, 由$z = a + \sqrt{a^2 - x^2}$, 作参数化$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = a + \sqrt{a^2 - x^2}, \end{cases}$ 于是

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right), \\ \frac{\partial S}{\partial y} = (0, 1, 0), \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}A = \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} \right\| \mathrm{d}\sigma_{xy} = \frac{a \mathrm{d}\sigma_{xy}}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

这里S在xOy平面上的投影区域$\mathrm{pr}_{xy}(S)$的边界为

$$\partial\, \mathrm{pr}_{xy}(S) : y^2 = 2(a^2 - x^2) + 2a\sqrt{a^2 - x^2},$$

记$\mathrm{pr}_{xy}(S)$在第一象限的部分为D, 于是由对称性有

$$\iint_S z \mathrm{d}A = 4 \iint_D \frac{a^2 + a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}\sigma_{xy} = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{2},$$

即原式$= \dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. □

习题 2.1.4. 设螺旋面片$S : \begin{cases} x = u \sin v, \\ y = u \cos v, \\ z = av, \end{cases}$ $\begin{cases} u \in [0, r], \\ v \in [0, 2\pi], \end{cases}$ 其中$a > 0$为常数, 计算曲面积分

$$\iint_S z^2 \mathrm{d}A.$$

Solution. 计算有

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial u} = (\sin v, \cos v, 0), \\ \frac{\partial S}{\partial v} = (u \cos v, -u \sin v, a), \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}A = \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| \mathrm{d}\sigma_{uv} = \sqrt{a^2 + u^2} \mathrm{d}\sigma_{uv},$$

于是

$$\iint_S z^2 \mathrm{d}A = \iint_{[0,r]\times[0,2\pi]} a^2 v^2 \sqrt{a^2 + u^2} \mathrm{d}\sigma_{uv} = \frac{4\pi^3 a^2}{3} \left(r\sqrt{r^2 + a^2} + a^2 \ln \frac{r + \sqrt{r^2 + a^2}}{a} \right),$$

即原式$= \dfrac{4\pi^3 a^2}{3} \left(r\sqrt{r^2 + a^2} + a^2 \ln \dfrac{r + \sqrt{r^2 + a^2}}{a} \right)$. □

补充习题 2.2. 设椭球面$S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 其中$a, b, c > 0$为常数, 记$h$为原点到$S$上各点处切平面的距离函数, 计算曲面积分

$$\oiint_S \frac{\mathrm{d}A}{h}.$$

[Hint] 可对S作参数化$\begin{cases} x = a \sin\varphi \cos\theta, \\ y = b \sin\varphi \sin\theta, \\ z = c \cos\varphi. \end{cases}$ 答案为$\dfrac{4\pi(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{3abc}$.

习题 2.1.5 (Pappus定理). 设S为$\mathbb{R}^3$中的光滑旋转面，γ为其具有有限长$l(l>0)$的母线，设s为其弧长参数，由此记$\rho(s)$为γ上s处到S的旋转轴的距离，$\bar{\rho}$为γ的重心到旋转轴的距离，证明：S的面积为

$$\mathrm{Area}(S)=2\pi\int_0^l \rho(s)\mathrm{d}s=2\pi\bar{\rho}l.$$

Proof. 令旋转面的转轴为z轴，作参数化$S:\begin{cases}x=\rho(s)\cos\theta,\\ y=\rho(s)\sin\theta,\\ z=h(s),\end{cases}\begin{cases}\theta\in[0,2\pi],\\ s\in[0,l],\end{cases}$ 计算有

$$\mathrm{d}A=\left\|\frac{\partial S}{\partial\theta}\times\frac{\partial S}{\partial s}\right\|\mathrm{d}\sigma_{\theta s}=\rho(s)\mathrm{d}\sigma_{\theta s},$$

其中注意由于在γ上取弧长参数，故[1]$\rho'(s)^2+h'(s)^2\equiv1$，于是

$$\mathrm{Area}(S)=\iint_S\mathrm{d}A=\iint_{[0,2\pi]\times[0,l]}\rho(s)\mathrm{d}\sigma_{\theta s}=2\pi\int_0^l\rho(s)\mathrm{d}s=2\pi\bar{\rho}l.$$

即命题成立. □

习题 2.1.6. 设$a,b,c\in\mathbb{R}$不全为0，$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，证明：

$$\oiint_{\mathbb{S}^2}f(ax+by+cz)\mathrm{d}A=2\pi\int_{-1}^1 f(ru)\mathrm{d}u.$$

Proof. 作正交变换$(x,y,z)\to(u,v,w)$，将坐标系$Oxyz$变换到$Ouvw$，其将平面$\pi:ax+by+cz=0$变换到vOw平面，此时有$u=\dfrac{1}{r}(ax+by+cz)$，并且

$$\oiint_{\mathbb{S}^2}f(ax+by+cz)\mathrm{d}A=\oiint_{\mathbb{S}^2}f(ru)\mathrm{d}A,$$

现考虑参数化$\mathbb{S}^2:\begin{cases}u=u,\\ v=\sqrt{1-u^2}\cos\theta,\\ w=\sqrt{1-u^2}\sin\theta,\end{cases}\begin{cases}u\in[-1,1],\\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$ 则

$$\mathrm{d}A=\left\|\frac{\partial\mathbb{S}^2}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbb{S}^2}{\partial\theta}\right\|\mathrm{d}\sigma_{u\theta}=\mathrm{d}\sigma_{u\theta},$$

于是

$$\text{前式}=\iint_{[-1,1]\times[0,2\pi]}f(ru)\mathrm{d}u=2\pi\int_{-1}^1f(ru)\mathrm{d}u.$$

即命题成立. □

[1]这里说明一个更强的结论：任取曲线γ的（正则）参数t，可见

$$s'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_0}^t\left\|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\|\mathrm{d}t=\left\|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\|,$$

而$t'(s)=\dfrac{1}{s'(t)}$，这表明$\left\|\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\|=1$当且仅当$t-s\equiv\mathrm{const}$，也即使得切向量取单位长度的曲线参数必为弧长参数.

习题 2.1.7. 计算累次积分$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\varphi(\cos\theta-\sin\theta)}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$

Solution. 作代换$\begin{cases} x=\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\cos\varphi,\end{cases}$ 则

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\varphi(\cos\theta-\sin\theta)}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\oiint_{\mathbb{S}^2}\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}A,$$

接着再作正交变换, 使得$(x,y,z)\to(u,v,w)$, 其中$w=\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}$, 于是

$$\text{前式}=\oiint_{\mathbb{S}^2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}w}=\sqrt{2}\pi\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right),$$

即原式$=\sqrt{2}\pi\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right)$. □

习题 2.1.8. 计算曲线积分$\oint_{\mathbb{S}^1}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

Solution. 作参数化$\begin{cases} x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$, 则

$$\left(\frac{x+y}{x^2+y^2},-\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbb{S}^1}{\mathrm{d}\theta}=1$$

则原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$. □

习题 2.1.9. 设曲线γ为柱面$S:x^2+y^2=ax$与球面$\mathbb{S}^2(a)(a>0)$在上半空间中的交线, 定向取为从x轴正向看回的逆时针方向, 计算曲线积分

$$\oint_\gamma(y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z).$$

Solution. 作参数化$\begin{cases} x=a\cos^2\theta,\\ y=a\cos\theta\sin\theta,\\ z=a|\sin\theta|,\end{cases}$ $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, 则

$$(y^2,z^2,x^2)\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}=-2a^3\cos^3\theta\sin^3\theta+a^3\sin^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+a^2\cos^4\theta z'(\theta),$$

注意上式第一项与第三项均为奇函数, 于是原式

$$\oint_\gamma(y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi a^3}{4},$$

即原式$=-\frac{\pi a^3}{4}$. □

补充习题 2.3. 设曲线γ为平面$\pi: y = x\tan\alpha$与球面$\mathbb{S}^2(a)(a>0)$的交线, 定向取为从x轴正向看回的逆时针方向, 其中$\alpha\in(0,\pi)$为常数, 计算曲线积分

$$\oint_\gamma [(y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z].$$

[Hint] 答案为$2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

习题 2.1.10. 设S为$\mathbb{R}^3$中球心在点$(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, 常数$r(r>0)$为半径的上半球面, 计算曲面积分

$$\iint_S (x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-a)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

Solution. 由对称性有$\iint_S (x-a)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, 作参数化$\begin{cases} x = a + r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = b + r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c + r\cos\varphi, \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \\ \theta\in[0,2\pi], \end{cases}$ 则有

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} (a + r\sin\varphi\cos\theta)^2 r^2\sin^2\varphi\cos\theta\mathrm{d}\sigma_{\varphi\theta} = \frac{4\pi br^3}{3},$$

$$\iint_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]} (b + r\sin\varphi\sin\theta)^2 r^2\sin^2\varphi\sin\theta\mathrm{d}\sigma_{\varphi\theta} = \frac{4\pi ar^3}{3},$$

故原式$=\dfrac{4\pi br^3}{3} + \dfrac{4\pi ar^3}{3} = \dfrac{4\pi(a+b)r^3}{3}$. □

补充习题 2.4. 设椭球面$S: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 法向取外侧, 其中$a,b,c>0$为常数, 计算曲面积分

$$\oiint_S \left(\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right).$$

[Hint] 答案为$\dfrac{4\pi(a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2)}{abc}$.

习题 2.1.11. 设S为球面$\mathbb{S}^2(r)(r>0)$在第一卦限内的部分, 计算曲面积分

$$\iint_S xyz(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\mathrm{d}A.$$

Solution. 考虑S的单位法向量取为$\left(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},\dfrac{z}{r}\right)$, 由此

$$\iint_S xyz(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\mathrm{d}A = \iint_S r(y^3z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^3x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

这里利用对称性, 就有

$$\text{前式} = 3r\iint_S x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{r^9}{32},$$

即原式$=\dfrac{r^9}{32}$. □

补充习题 2.5. 设S为球面$S_1 : x^2+y^2+z^2=2Rx$被柱面$S_2 : x^2+y^2=2rx$所截于上半空间的曲面片, 法向取S_1外侧, 其中$R>r>0$为常数, 计算曲面积分

$$\iint_S [(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y].$$

[Hint] 注意单位法向量为$\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)$. 答案为$\pi Rr^2$.

2.2 Gauss-Green公式, 调和函数

习题 2.2.1. 设上半圆周$\gamma : x^2+y^2=ax, y\geq 0$, 方向取点$(a,0)$至原点, 其中$a>0$为常数, 计算曲线积分

$$\int_\gamma \left[(\mathrm{e}^x\sin y-y^2)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y\right].$$

Solution. 作原点至点$(a,0)$的直线段l, 其与γ围成半圆区域D, 利用Green公式可得

$$\left(\int_\gamma+\int_l\right)\left[(\mathrm{e}^x\sin y-y^2)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y\right]=\iint_D 2y\mathrm{d}\sigma=\frac{a^3}{6},$$

另一方面, 自然

$$\int_l \left[(\mathrm{e}^x\sin y-y^2)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y\right]=0,$$

由此原式$=\frac{a^3}{6}-0=\frac{a^3}{6}$. □

补充习题 2.6. 设$f\in C^1(\mathbb{R})$, γ为点$\left(3,\frac{2}{3}\right)$至点$(1,2)$的直线段, 计算曲线积分

$$\int_\gamma \left[\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{xy^2f(xy)-x}{y^2}\mathrm{d}y\right].$$

[Hint] 利用Green公式, 将积分路径转化到直线段进行计算. 答案为-4.

习题 2.2.2. 计算曲线$\gamma : \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{xy}{ab}\right)^n$所围区域$D$的面积, 其中$a,b,c>0$为常数, $n\in\mathbb{N}_+$.

Solution. 作参数化$\begin{cases} x=ar\cos^{\frac{2}{2n+1}}\theta, \\ y=br\sin^{\frac{2}{n+1}}\theta, \end{cases}$ $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 其中代回计算可得$r=c\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\theta\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\theta$, 于是

$$x=ac\cos^{\frac{2n+2}{2n+1}}\theta\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\theta,\ y=bc\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\theta\sin^{\frac{2n+2}{2n+1}}\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],$$

其中注意γ仅在第一象限围成有限区域, 利用Green公式, 则

$$\mathrm{Area}(D)=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\oint_\gamma(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{abc^2}{2n+1}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{abc^2}{4n+2},$$

即所求面积为$\frac{abc^2}{4n+2}$. □

补充习题 2.7. 计算叶形线$\gamma: x^3+y^3=3axy$所围区域的面积, 其中$a>0$为常数.

[Hint] 设$y=tx$引入参数t, 代回方程可得到参数化$\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^3}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases}$ $t\in[0,+\infty)$. 答案为$\dfrac{3a^2}{2}$.

习题 2.2.3. 计算曲线积分$\displaystyle\oint_{\mathbb{S}^1}\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y\right]$.

Solution. 对$\varepsilon>0$, 作$\mathbb{S}^1(\varepsilon)$, 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{e}^y(y\sin x-x\cos x)}{x^2+y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{-\mathrm{e}^y(x\sin x+y\cos x)}{x^2+y^2}=0,$$

应用Green公式, 即知题式与被积函数在$\mathbb{S}^1(\varepsilon)$上的积分一致, 再利用Green公式有

$$\oint_{\mathbb{S}^1}\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y\right]=\iint_{\mathbb{D}^2(\varepsilon)}\frac{-2\mathrm{e}^y\cos x}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\sigma,$$

这里应用积分中值定理, 可知存在$(\xi,\eta)\in\mathbb{D}^2(\varepsilon)$, 使得

$$\text{前式}=\frac{-2\pi\varepsilon^2\mathrm{e}^\eta\cos\xi}{\varepsilon^2}=-2\pi\mathrm{e}^\eta\cos\xi,$$

再令$\varepsilon\to0$, 即知原式$=-2\pi$. □

习题 2.2.4. 设γ为$\mathbb{R}^2$上的（逐段）光滑的简单闭曲线, $\boldsymbol{n}$为其上单位外法向量场, 计算曲线积分

$$\oint_\gamma\frac{\cos\measuredangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})}{\|\boldsymbol{x}\|}\mathrm{d}s.$$

Solution. 记γ所围区域为D, 分三种情况进行讨论：

(a) 若D不含原点, 则应用Green公式直接得到

$$\oint_\gamma\frac{\cos\measuredangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})}{\|\boldsymbol{x}\|}\mathrm{d}s=\oint_\gamma\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2},\boldsymbol{n}\right)=\iint_D\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$

(b) 若原点在D的内部, 对充分小的$\varepsilon>0$, 作$\mathbb{S}^1(\varepsilon)$包含在$D$的内部, 应用Green公式, 可知题式与被积函数在$\mathbb{S}^1(\varepsilon)$上的积分一致, 此时$\cos\measuredangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})\equiv1$, $\|\boldsymbol{x}\|\equiv\varepsilon$, 于是

$$\oint_\gamma\frac{\cos\measuredangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})}{\|\boldsymbol{x}\|}\mathrm{d}s=\oint_{\mathbb{S}^1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}s}{\varepsilon}=2\pi.$$

(c) 若原点在D的边界上, 过其作$\partial D=\gamma$在两个方向上的切线, 内夹角为θ_0, 对充分小的$\varepsilon>0$, 作$\mathbb{S}^1(\varepsilon)$, 记其在前述切线之间的弧$\alpha_\varepsilon$与两条切线段连接得到扇形边界$\gamma_\varepsilon$, 应用Green公式, 可知题式与被积函数在$\gamma_\varepsilon$上的积分一致, 同时注意在切线段上$\cos\measuredangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})\equiv0$, 于是

$$\oint_\gamma\frac{\cos\measuredangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})}{\|\boldsymbol{x}\|}\mathrm{d}s=\int_{\alpha_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}s}{\varepsilon}=\theta_0.$$

综上即得. □

习题 2.2.5. 设γ为$\mathbb{R}^2$上的（逐段）光滑闭曲线，$\boldsymbol{X}$为其上非零C^1向量场，其与x轴正方向的夹角为θ，记

$$r(\boldsymbol{X},\gamma)=\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \mathrm{d}\theta,$$

称为$\boldsymbol{X}$沿γ的旋转度。现设$D\subset\mathbb{R}^2$为闭区域，其边界有限条（逐段）光滑闭曲线组成，也即有$\partial D=\sqcup_i\gamma_i$，此时则定义

$$r(\boldsymbol{X},\partial D)=\sum_i r(\boldsymbol{X},\gamma_i)$$

为$\boldsymbol{X}$沿∂D的旋转度。证明：

1. 若$\boldsymbol{X}$在D上非零，则$r(\boldsymbol{X},\partial D)=0$.
2. [*] 设$f,g\in C[0,1]$，满足
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1,$$
则存在闭区间$[a,b]\subset[0,1]$，使得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Proof. 1. 只需证明D为单连通区域的情形，此时记$\boldsymbol{X}=(u,v)$，则$\theta=\arctan\dfrac{v}{u}$，此时

$$r(\boldsymbol{X},\partial D)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}\mathrm{d}\arctan\frac{v}{u}=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}$$

利用Green公式即知原式$=0$.

2. 在区域$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le y\le 1\}$上考虑向量场

$$\boldsymbol{X}(x,y)=\left(\int_x^y f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2},\int_x^y g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right),$$

由f,g的连续性可知$\boldsymbol{X}$为C^1向量场，这时注意到

$$\boldsymbol{X}(\xi,\xi)=\left(\int_\xi^\xi f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2},\int_\xi^\xi g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right)\equiv\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ \forall\xi\in[0,1],$$

$$\boldsymbol{X}(0,\xi)+\boldsymbol{X}(\xi,1)=\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-1,\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t-1\right)\equiv(0,0),\ \forall\xi\in[0,1],$$

以及$\boldsymbol{X}(0,1)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，可得

$$r(\boldsymbol{X},\partial D)=\frac{0+2(2k+1)\pi}{2\pi}=2k+1\neq 0,$$

其中$k\in\mathbb{Z}$，这与第1小题结果矛盾，因此$\boldsymbol{X}$在D上必有零点，即给出原命题成立. □

习题 2.2.6. 设S为xOz平面上的曲线段$\gamma:z=\mathrm{e}^x,x\in[0,a]$绕$z$轴生成的旋转面，法向取下侧，其中$a>0$为常数，计算曲面积分

$$\iint_S\left[4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right].$$

Solution. 作平面片$S_0: z = e^a, x^2+y^2 \le a^2$, 法向取上侧, 其与$S$围成区域$D$, 利用Gauss公式可得

$$\left(\iint_S + \iint_{S_0}\right)\left[4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] = 0,$$

另一方面有

$$\iint_{S_0}\left[4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] = \iint_{x^2+y^2\le a^2}(1-e^{2a})\mathrm{d}\sigma_{xy} = (1-e^{2a})\pi a^2,$$

于是原式$= 0-(1-e^{2a})\pi a^2 = (e^{2a}-1)\pi a^2$. □

补充习题 2.8. 设圆锥面片$S: x^2+y^2=z^2, z\in[0,h]$, 法向取下侧, 其中$h>0$为常数, 计算曲面积分

$$\iint_S [(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y].$$

[Hint] 答案为0.

习题 2.2.7. 计算曲面积分$\oiint_{\mathbb{S}^2}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中$a,b,c>0$为常数.

Solution. 对充分小的$\varepsilon>0$, 作曲面$S_1: ax^2+by^2+cz^2 \le \varepsilon^2$包含在$S$所围区域内, 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

应用Gauss公式, 即知题式与被积函数在曲面S_1上的积分一致, 再利用Gauss公式有

$$\oiint_{\mathbb{S}^2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}} = \iiint_D \frac{3\mathrm{d}v}{\varepsilon^3} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}},$$

其中D为S_1所围区域, 故原式$=\dfrac{4\pi}{\sqrt{abc}}$. □

习题 2.2.8 (Green恒等式). 设$u,v\in C^2(\overline{\Omega})(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{n}$为$\partial\Omega$上的单位外法向量场, 证明:

1. $\displaystyle\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{dvol}_\Omega = \oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{dvol}_{\partial\Omega} - \int_\Omega(\nabla u,\nabla v)\mathrm{dvol}_\Omega.$
2. $\displaystyle\int_\Omega(v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{dvol}_\Omega = \oint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{dvol}_{\partial\Omega}.$

Proof. 第2小题为第1小题的直接推论, 下证第1小题：注意$\mathrm{div}(v\nabla u) = (\nabla u,\nabla v)+v\Delta u$, 于是

$$\int_\Omega \mathrm{div}(v\nabla u)\mathrm{dvol}_\Omega = \int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{dvol}_\Omega + \int_\Omega(\nabla u,\nabla v)\mathrm{dvol}_\Omega,$$

另一方面, 利用Gauss-Green公式可得

$$\int_\Omega \mathrm{div}(v\nabla u)\mathrm{dvol}_\Omega = \oint_{\partial\Omega}(v\nabla u,\boldsymbol{n})\mathrm{dvol}_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{dvol}_{\partial\Omega},$$

综上即有命题成立. □

习题 2.2.9. 设区域$\Omega \in \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$称为调和函数, 如果有$\Delta u = 0$. 证明以下三个命题等价:

1. u为Ω上的调和函数.
2. 对任意$\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)$, 满足$\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r) \subset \Omega$, 有$\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{dvol} = 0$, 其中$\boldsymbol{n}$为$\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)$上的单位外法向量场.
3. (**平均值公式**)对任意$\boldsymbol{x} \in \Omega$, $\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r) \subset \Omega$, 有
$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} u \mathrm{dvol},$$
其中ω_n为n维单位球的体积（于是$n\omega_n$为$n-1$维单位球面的面积）.

Proof. “$1 \Rightarrow 2$”：利用Gauss-Green公式即得
$$\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{dvol} = \oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} (\nabla u, \boldsymbol{n}) \mathrm{dvol} = \int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r)} \Delta u \mathrm{dvol} = 0$$
对任意满足条件的$\boldsymbol{p} \in \Omega$, $r > 0$均成立.

“$2 \Rightarrow 3$”：对任意点$\boldsymbol{x} \in \Omega$, 构造
$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} u \mathrm{dvol} = \frac{1}{n\omega_n} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{n}) \mathrm{dvol},$$
令其对r求导数, 则有
$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{n}) \mathrm{dvol} = \frac{1}{n\omega_n} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}} ((\nabla u)(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{n}), \boldsymbol{n}) \mathrm{dvol} \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} \left(\nabla u(\boldsymbol{\xi}), \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}}{r}\right) \mathrm{dvol} \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{dvol} = 0 \end{aligned}$$
这表明$\varphi(r)$关于r是常数, 利用u的连续性, 即知$\varphi(r) \equiv \lim_{r \to 0+0} \varphi(r) = u(\boldsymbol{x})$.

“$3 \Rightarrow 1$”：同上构造$\varphi(r)$, 根据条件其关于r为常数, 与前文同理有
$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{dvol} = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r)} \Delta u \mathrm{dvol},$$
利用Δu的连续性, 令上式中$r \to 0+0$, 即得$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0$对任意$\boldsymbol{x} \in \Omega$成立, 也即$u$为调和函数. □

[Remark] 利用上述平均值不等式可以证明调和函数的极值原理, 进而得到Poisson方程边值问题的解的唯一性.

补充习题 2.9 (*平均值公式). 设区域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$为调和函数, 证明：对任意$\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r) \subset \Omega$, 均有
$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r)} u \mathrm{dvol}.$$

补充习题 2.10. [*] 设区域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$满足$\Delta u \geq 0$, 证明：对任意$\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r) \subset \Omega$, 均有
$$u(\boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r)} u \mathrm{dvol}.$$

补充习题 2.11. [∗] 给定常数$r>0$, 定义算子$\mathscr{R}: C(\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\mathscr{R}u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)} u\mathrm{d}vol,$$

证明：对$u\in C^2(\mathbb{R}^n)$, 有$\Delta(\mathscr{R}u)=\mathscr{R}(\Delta u)$.

习题 2.2.10. [∗] 设$u\in C^2(\mathbb{B}^n(R))\cap C(\mathbb{D}^n(R))(R>0)$为调和函数, 证明：

$$|u(\boldsymbol{x})|\le\sqrt{\frac{\int_{\mathbb{D}^n(R)}u^2\mathrm{d}vol}{\omega_n(R-\|\boldsymbol{x}\|)^n}},\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(R).$$

Proof. 考虑在$\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(R-\|\boldsymbol{x}\|)$上应用平均值公式（补充习题2.9）有

$$\begin{aligned}|u(\boldsymbol{x})|&=\left|\frac{1}{\omega_n(R-\|\boldsymbol{x}\|)^n}\int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(R-\|\boldsymbol{x}\|)}u\mathrm{d}vol\right|\le\frac{1}{\omega_n(R-\|\boldsymbol{x}\|)^n}\int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(R-\|\boldsymbol{x}\|)}|u|\mathrm{d}vol\\&\le\frac{1}{\omega_n(R-\|\boldsymbol{x}\|)^n}\sqrt{\int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(R-\|\boldsymbol{x}\|)}\mathrm{d}vol}\sqrt{\int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(R-\|\boldsymbol{x}\|)}u^2\mathrm{d}vol}\\&\le\sqrt{\frac{\int_{\mathbb{D}^n(R)}u^2\mathrm{d}vol}{\omega_n(R-\|\boldsymbol{x}\|)^n}},\end{aligned}$$

即得命题成立. □

习题 2.2.11. [∗] [∗] 设$u\in C^3(\mathbb{B}^n)\cap C(\mathbb{D}^n)$为有界调和函数[1], 证明：

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n}\left((1-\|\boldsymbol{x}\|)\|\nabla u\|\right)<+\infty.$$

Proof. 考虑u对第i个分量的导数, 记为u_i, 其也为调和函数, 由此对任意点$\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n$, 取$\mathbb{B}_{\boldsymbol{x}}^n(r)\subset\mathbb{B}^n$, 并对$0<s\le r$, 在$\mathbb{B}_{\boldsymbol{x}}^n(s)$上应用平均值公式与Gauss-Green公式可得

$$|u_i(\boldsymbol{x})|=\left|\frac{1}{\omega_n s^n}\int_{\mathbb{B}_{\boldsymbol{x}}^n(r)}u_i\mathrm{d}vol\right|=\frac{1}{\omega_n s^n}\left|\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(s)}un_i\mathrm{d}vol\right|,$$

其中n_i为$\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(r)$上单位外法向量场的第$i$个分量函数, 于是有

$$\omega_n s^n|u_i(\boldsymbol{x})|\le\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(s)}|u|\mathrm{d}vol,$$

令上式两端对s在$[0,r]$上积分有

$$\frac{\omega_n r^{n+1}}{n+1}|u_i(\boldsymbol{x})|=\int_0^r\omega_n s^n|u_i(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}s\le\int_0^r\mathrm{d}s\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(s)}|u|\mathrm{d}vol=\int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r)}|u|\mathrm{d}vol,$$

于是就有

$$|u_i(\boldsymbol{x})|\le\frac{n+1}{\omega_n r^{n+1}}\int_{\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(r)}|u|\mathrm{d}vol\le\frac{n+1}{r}\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}_{\boldsymbol{x}}^n(r)}|u|\le\frac{n+1}{r}\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n}|u|,$$

特别令$r=1-\|\boldsymbol{x}\|$, 就有$(1-\|\boldsymbol{x}\|)|u_i(\boldsymbol{x})|\le(n+1)\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n}|u|<+\infty(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n)$（注意$u$有界）, 命题成立. □

[1] 事实上可以证明调和函数总是解析的.

习题 2.2.12 (基本解). [*] [*] 对空间维数$n(n \geq 2)$, 构造函数$\Gamma(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln r, & n=2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n r^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$ 证明:

1. $u(\boldsymbol{x}) = \Gamma(\|\boldsymbol{x}\|)$为$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上径向对称的调和函数.

2. [*] 设u为Dirichlet边值问题
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(R), \\ u|_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} = g, \end{cases}$$
在$C^2(\mathbb{B}^n(R)) \cap C^1(\mathbb{D}^n(R))$中的解, 其中$R > 0$为常数, 则有
$$u(0) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} g\,\mathrm{d}vol + \int_{\mathbb{D}^n(R)} (\Gamma(\|\boldsymbol{x}\|) - \Gamma(R)) f\,\mathrm{d}vol.$$

3. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 取定点$\boldsymbol{x} \in \Omega$, 则
$$u(\boldsymbol{x}) = \oint_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}\|) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u \frac{\partial \Gamma(\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}\|)}{\partial \boldsymbol{n}} \right) \mathrm{d}vol - \int_{\Omega} \Gamma(\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}\|) \Delta u(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}vol,$$
其中$\boldsymbol{n}$为$\partial\Omega$上的单位外法向量场.

Proof. 1. 直接计算验证即可, 此处略.

2. 任取$0 < \varepsilon < R$, 令$\Omega = \mathbb{B}^n(R) \setminus \mathbb{D}^n(\varepsilon)$, 并取$v \in C^2(\overline{\Omega})$, 由Green恒等式有
$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \mathrm{d}vol = \oint_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) \mathrm{d}vol$$
现在希望v为调和函数, 且$v|_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} \equiv 0$, 代入上式有
$$\int_{\Omega} vf\,\mathrm{d}vol = \frac{1}{R} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} g(\nabla v, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}vol - \frac{1}{\varepsilon} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} u(\nabla v, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}vol + \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}vol,$$
由此整理得到
$$\frac{1}{\varepsilon} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} u(\nabla v, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}vol - \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}vol = \frac{1}{R} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} g(\nabla v, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}vol - \int_{\Omega} vf\,\mathrm{d}vol,$$
在等式两端除以$n\omega_n \varepsilon^{n-2}$, 并令$v(\boldsymbol{x}) = n\omega_n \varepsilon^{n-2}(\Gamma(R) - \Gamma(\|\boldsymbol{x}\|))$满足前述条件, 代入得到
$$\begin{aligned} &\frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} u\,\mathrm{d}vol - (\Gamma(R) - \Gamma(\varepsilon)) \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}vol \\ = &\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} g\,\mathrm{d}vol - \int_{\Omega} (\Gamma(R) - \Gamma(\|\boldsymbol{x}\|)) f\,\mathrm{d}vol, \end{aligned}$$
其中注意$(\nabla v, \boldsymbol{x}) = -\dfrac{\varepsilon^{n-2}}{\|\boldsymbol{x}\|^{n-1}}$, 接着令$\varepsilon \to 0$, 由$u$的连续性可知上式左端第一项趋于$u(0)$, 第二项
$$\left| (\Gamma(R) - \Gamma(\varepsilon)) \oint_{\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}vol \right| \leq |\Gamma(R) - \Gamma(\varepsilon)| n\omega_n \varepsilon^{n-1} \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)} \|\nabla u\| \to 0,$$
而右端区域$\Omega \to \mathbb{B}^n(R)$, 即命题成立.

3. 取充分小的$\varepsilon > 0$, 在区域$\Omega \setminus \mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(\varepsilon)$上对$u(\boldsymbol{\xi})$与$\Gamma(\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}\|)$应用Green恒等式得到

$$\int_{\Omega\setminus\mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(\varepsilon)} \Gamma(\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}\|)\Delta u(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}vol = \oint_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}\|)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial \Gamma(\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}\|)}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}vol + \Gamma(\varepsilon)\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}vol - \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\oint_{\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(\varepsilon)} u\mathrm{d}vol,$$

其中在$\Omega \setminus \mathbb{D}_{\boldsymbol{x}}^n(\varepsilon)$上$\Delta\Gamma(\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}\|)=0$, 且在$\mathbb{S}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}(\varepsilon)$上$\dfrac{\partial \Gamma(\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}\|)}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-2}}$（注意$\boldsymbol{n}$取单位内法向量场）, 现令$\varepsilon \to 0$, 与第2小题类似讨论极限即得命题成立. □

补充习题 2.12 (Poisson公式). [∗] [∗] 设$g \in C(\mathbb{S}^{n-1}(R))(R>0)$, 定义$\mathbb{B}^n(R)$上的函数

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{R^2-\|\boldsymbol{x}\|^2}{n\omega_n R}\oint_{\mathbb{S}^{n-1}(R)}\frac{g(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\|^n}\mathrm{d}vol,$$

其中函数$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{R^2-\|\boldsymbol{x}\|^2}{n\omega_n R\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\|^n}$称为Poisson核, 证明:

1. u为$\mathbb{B}^n(R)$上的调和函数, 且可取极限连续延拓到边界, 使得$u|_{\mathbb{S}^{n-1}(R)} = g$.
2. (**Harnack不等式**)设u为$\mathbb{B}^n(R)$上的非负调和函数, 则对任意$0<r<R$, 有

$$\sup_{x\in\mathbb{B}^n(r)} u \le \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n \inf_{\mathbb{B}^n(r)} u.$$

3. (***Liouville定理**)在$\mathbb{R}^n$上有上界或下界的调和函数一定为常值函数.

[Hint] 第2小题, 先证对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(R)$, 均有

$$\frac{R^{n-2}(R-\|\boldsymbol{x}\|)u(0)}{(R+\|\boldsymbol{x}\|)^{n-1}} \le u(\boldsymbol{x}) \le \frac{R^{n-2}(R+\|\boldsymbol{x}\|)u(0)}{(R-\|\boldsymbol{x}\|)^{n-1}},$$

其中用平均值公式表示$u(0)$, 用Poisson公式表示$u(\boldsymbol{x})$, 在$\mathbb{B}^n(R)$上, 令上式左, 右侧不等关系两端分别取下确界和上确界, 整理即证. 第3小题, 不妨设调和函数u有上界M, 对$M-u$应用Harnack不等式.

[Remark] 原始版本的Liouville定理要求调和函数既有上界也有下界.

补充习题 2.13. [∗] [∗] [∗] 设$g\in C[0,2\pi]$, $g(0)=g(2\pi)$, 且$\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$, 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & (x,y)\in\mathbb{B}^2(R), \\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = g(\theta), & \theta\in[0,2\pi], \end{cases}$$

其中第二式取极坐标, $R>0$为常数, 证明: 在相差一个常数的意义下, 问题的解为

$$u(r,\theta) = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\ln\left[R^2+r^2-2Rr\cos(\alpha-\theta)\right]\mathrm{d}\alpha.$$

[Hint] 令$v(r,\theta) = r\dfrac{\partial u}{\partial r}$, 可证其为$\mathbb{B}^2(R)$上的调和函数, 且$v(R,\theta)=Rg(\theta)(\theta\in[0,2\pi])$, 应用Poisson公式（补充习题2.12）得到其表达式, 再积分计算u即可.

2.3 微分形式与Stokes公式

习题 2.3.1. 设γ为平面$\pi: x+y+z=\dfrac{3}{2}a$截立方体$[0,a]^3$表面所得曲线, 定向取为从x轴正向看回的逆时针方向, $a>0$为常数, 计算曲线积分

$$\oint_\gamma\Big[(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z\Big].$$

Solution. 注意到γ为正六边形边界, 记该正六边形为S, 其法向取$(1,1,1)$, 则由Stokes公式可得

$$\oint_\gamma\Big[(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z\Big]=\iint_S\frac{-4(x+y+z)}{\sqrt{3}}\mathrm{d}A=-\frac{9a^3}{2},$$

即原式$=-\dfrac{9a^3}{2}$. □

补充习题 2.14. 设γ为球面$S_1: x^2+y^2+z^2=2Rx$与上半柱面$S_2: x^2+y^2=2rx, z\geq 0$的交线, 其上取定向, 使得$\gamma$在$S_1$上所围较小区域总是保持在曲线左侧, $0<r<R$为常数, 计算曲线积分

$$\oint_\gamma\Big[(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z\Big].$$

[Hint] 答案为$2\pi r^2R$.

习题 2.3.2. 设$\gamma:\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=a\sin\varphi,\\ z=\frac{h}{2\pi}\varphi\end{cases}$ $\varphi\in[0,2\pi]$, 定向取点$(a,0,0)$至点$(a,0,h)$, $a,h>0$为常数, 计算曲线积分

$$\int_\gamma\Big[(y-z)^2\mathrm{d}x+(z-x)^2\mathrm{d}y+(x-y)^2\mathrm{d}z\Big].$$

Solution. 考虑记螺旋面片$S:\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=\frac{h}{2\pi}\varphi,\end{cases}\begin{cases}r\in[0,a],\\ \varphi\in[0,2\pi],\end{cases}$ 作点$(a,0,0)$至点$(a,0,h)$的直线段l, 并作平面片$S_0: y=0, x\in[0,a], z\in[0,h]$, 应用Stokes公式得到

$$\int_{\gamma\cup l}\Big[(y-z)^2\mathrm{d}x+(z-x)^2\mathrm{d}y+(x-y)^2\mathrm{d}z\Big]=\iint_{S\cup S_0}2\left[(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right],$$

其中计算可得

$$\int_l\Big[(y-z)^2\mathrm{d}x+(z-x)^2\mathrm{d}y+(x-y)^2\mathrm{d}z\Big]=-a^2h,$$

$$\iint_S 2\left[(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=a^2h+\frac{ah^2}{\pi},$$

$$\iint_{S_0} 2\left[(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=ah^2-a^2h,$$

于是原式$=\left(a^2h+\dfrac{ah^2}{\pi}\right)+(ah^2-a^2h)-(-a^2h)=\dfrac{(\pi+1)ah^2+\pi a^2h}{\pi}$. □

习题 2.3.3. 设S为$\mathbb{R}^3$中的（分片）光滑闭曲面, 记

$$I = \oiint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right],$$

在以下两种情形证明$I = 0$：*1.* $P, Q, R \in C^2(\overline{\Omega})$, 其中$\Omega$为$S$所围区域. *2.* $P, Q, R \in C^1(S)$.

Proof. 第1小题应用Gauss-Green公式即得. 对第2小题, 在S上取（分段）光滑简单闭曲线γ将S分为两片S_1, S_2, 利用Stokes公式将S_1, S_2的积分转化到γ上定向相反的积分, 由此即知$I = 0$. □

习题 2.3.4. 证明在$\mathbb{R}^2$上, $\omega = (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y$为全微分, 并求其原函数.

Solution. 考虑$\dfrac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2xy)}{\partial x}$, 即知$\omega$为全微分.

现设$\omega = \mathrm{d}u$, 从$\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y^2$可得$u = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 + \varphi(y)$, 其中$\varphi(y)$为待定函数, 接着由$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy$, 代入前式可见$\varphi'(y) = 0$, 于是$\varphi(y) \equiv \mathrm{const}$, $u(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 + \mathrm{const}$. □

[Remark] 在一般区域上, 判断一个微分形式是否有原函数即是判断其是否为恰当形式, 对于单连通区域, 问题则可简化为判断该微分形式是否为闭形式.

补充习题 2.15. 证明在$\mathbb{R}^3$上,

$$\omega = z\left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2}\right)\mathrm{d}x + \frac{z}{xy^2}\mathrm{d}y + \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy}\right)\mathrm{d}z$$

为全微分, 并求其原函数.

[Hint] 原函数为$\arctan\dfrac{z}{x} - \dfrac{z}{xy} + \mathrm{const}$.

习题 2.3.5. 讨论曲线积分$\displaystyle\int_\gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$在区域$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$上是否与路径无关.

Solution. 任取常数$r > 0$, 容易计算得到

$$\oint_{\mathbb{S}^1(r)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

由此可知所讨论的积分与积分路径有关. □

习题 2.3.6. [*] 设ω为区域$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$上的闭形式, 讨论曲线积分$\displaystyle\int_\gamma \omega$是否与积分路径有关.

Solution. 任取Ω中的简单闭曲线γ, 可作Ω中曲面S使得$\partial S = \gamma$, 则由Stokes公式有

$$\oint_\gamma \omega = \iint_S \mathrm{d}\omega = 0,$$

由此可知所讨论的积分与路径无关. □

补充习题

补充习题 2.16. 设γ为曲线$\gamma_0:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2z^2}{a^2+b^2}=1,\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\end{cases}$在第一卦限的部分, $a,b,c>0$为常数, 计算曲线积分

$$\int_\gamma\left(\frac{16xy}{ab}+\frac{2yz}{b\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{2xz}{a\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathrm{d}s.$$

[Hint] 答案为$\sqrt{a^2+b^2}(\pi+1)$.

补充习题 2.17. 计算曲线$\gamma:\begin{cases}x=e^{-t}\cos t,\\ y=e^{-t}\sin t,\quad t\in[0,+\infty)\\ z=e^{-t},\end{cases}$的弧长.

[Hint] 答案为$\sqrt{3}$.

补充习题 2.18. 设Ω为柱面$S:x^2+y^2=ax$与球面$\mathbb{S}^2(a)(a>0)$所围有界区域, 计算曲面积分$\iint_{\partial\Omega}|z|\mathrm{d}A$.

[Hint] 注意分柱面部分和球面部分进行计算. 答案为πa^3.

补充习题 2.19. 对$t\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, 记S_t为平面$\pi:x+y+z=t$被单位球面$\mathbb{S}^1$所截平面片, 计算曲面积分

$$\iint_{S_t}(1-x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}A.$$

[Hint] 可作正交变换$(x,y,z)\to(u,v,w)$, 使得$w=\dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$. 答案为$\dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2$.

补充习题 2.20. 设γ为$\mathbb{R}^2$中的有限长连续曲线, 弧长为l, $\boldsymbol{X}$为γ上的连续向量场, 证明:

$$\left|\int_\gamma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}s\right|\le l\max_{x\in\gamma}\|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\|.$$

补充习题 2.21. [*] 设$u,v\in C^1(D)$, 曲线$\gamma_u:u(x,y)=0$与$\gamma_v:v(x,y)=0$在闭区域$D\subset\mathbb{R}^2$中仅在其内部有有限个交点, 且∂D为简单闭曲线, 计算曲线积分

$$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}.$$

[Hint] 答案为$\sum_i\operatorname{sgn}\left.\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_i,y_i)}$, 其中$(x_i,y_i)$为曲线$\gamma_u,\gamma_v$在$D$内的交点.

补充习题 2.22. 计算环面$S:\begin{cases}x=(b+a\cos\varphi)\cos\theta,\\ y=(b+a\cos\varphi)\sin\theta,\\ z=a\sin\varphi,\end{cases}\begin{cases}\varphi\in[0,2\pi],\\ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}$所围区域的体积, 其中$b\ge a>0$为常数.

[Hint] 答案为$2\pi^2a^2b$.

补充习题 2.23. 设S为$\mathbb{R}^3$上的光滑简单闭曲面, $\boldsymbol{n}$为其上单位外法向量场, 计算曲面积分

$$\oiint_S \frac{\cos\measuredangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\mathrm{d}A.$$

[Hint] 仿照习题2.2.4. 当原点在S所围区域外部时, 答案为0；当原点在S所围区域内部时, 答案为4π；当原点在S上时, 答案为S在原点处的球面角.

补充习题 2.24. [*] 设$D\subset\mathbb{R}^n$为单连通区域, ∂D光滑, $f\in C^1(D)$, $f|_{\partial D}\equiv 0$, 证明:

$$\int_D f^2\mathrm{d}vol \le \frac{2}{n}\max_{x\in D}\|\boldsymbol{x}\|^2\int_D \left\|\nabla f\right\|^2\mathrm{d}vol.$$

[Hint] 对第i个分量x^i, 令$\boldsymbol{X}=(0,\cdots,x^if^2,\cdots,0)$, 在$D$上应用Gauss-Green公式得到

$$\int_D f^2\mathrm{d}vol = -2\int_D fx^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}vol = -\frac{2}{n}\int_D f(\nabla f,\boldsymbol{x})\mathrm{d}vol,$$

对该式应用Cauchy-Schwarz不等式进行估计即可.

补充习题 2.25. 设$D\subset\mathbb{R}^2$为单连通区域, u为其上调和函数, 证明：$-u'_y\mathrm{d}x+u'_x\mathrm{d}y$是全微分, 且其原函数也为调和函数, 称为$u$的共轭调和函数.

[Remark] 此处u,v满足Cauchy-Riemann方程（在补充习题1.5中已经提及）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

其出现的场合之一在复分析中：复函数$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$使得$x+\mathrm{i}y\mapsto u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是全纯的（或解析的）, 当且仅当$u,v$满足Cauchy-Riemann方程, 且此时$u,v$为一对共轭的调和函数.

补充习题 2.26 (椭圆型偏微分方程的**能量模估计**). [*] 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n(n\ge 3)$有界, 考虑定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}),\nabla u) + c(\boldsymbol{x})u = f, & \boldsymbol{x}\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

其中$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}),c(\boldsymbol{x})$均连续有界, 且$4c(\boldsymbol{x})-\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\|^2>0(\forall\boldsymbol{x}\in\Omega)$, 证明：上述定解问题若在$C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$中有解, 则解是唯一的.

[Hint] 只需证明$f,g\equiv 0$的齐次情形下定解问题只能有零解, 为此在第一个方程两端乘上u并在Ω上积分, 结合Gauss-Green公式与题设条件可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \|\nabla u\|^2\mathrm{d}vol + \int_\Omega (u\boldsymbol{A},\nabla u)\mathrm{d}vol + \int_\Omega cu^2\mathrm{d}vol \\ &\le \int_\Omega\left(\|\nabla u\|^2 + (\nabla u,u\boldsymbol{A}) + \frac{1}{4}\|u\boldsymbol{A}\|^2\right)\mathrm{d}vol \\ &= \int_\Omega\left\|\nabla u - \frac{1}{2}u\boldsymbol{A}\right\|^2\mathrm{d}vol, \end{aligned}$$

于是$u\boldsymbol{A}\equiv 2\nabla u$, 注意在$u$取的最值处$\nabla u=0$, 由此即证$u\equiv 0$.

补充习题 2.27. [*] 设$f\in C^2(\mathbb{R}^3)$, 令$H(x,y,z,r)=\dfrac{1}{4\pi r^2}\displaystyle\oiint_{\mathbb{S}^2_{(x,y,z)}(r)} f\mathrm{d}A$, 证明：

1. H为关于各变量x,y,z,r的二次连续可微函数.
2. $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial H}{\partial r}$.
3. $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\partial H}{\partial r}=0$.

[Hint] 第1小题, 利用代换和球面的几何性质, 可以得到

$$H(x,y,z,r)=\frac{1}{4\pi}\oiint_{\mathbb{S}^2} f(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{n})\mathrm{d}A,$$

其中$\boldsymbol{x}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{n}$为$\mathbb{S}^2$的单位外法向量, 由此容易证明H的C^2可微性. 第2小题, 利用上式可得

$$\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\mathbb{S}^2(r)}(\nabla f,\boldsymbol{n})\mathrm{d}A=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{\mathbb{D}^3(r)}\Delta f\mathrm{d}v.$$

接着再次对r计算偏导数, 其中对重积分求导需要将其先化为累次积分进行, 得到

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}=-\frac{1}{2\pi r^3}\iiint_{\mathbb{D}^3(r)}\Delta f\mathrm{d}v+\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\mathbb{S}^2(r)}\Delta f\mathrm{d}A,$$

由此即可证得命题. 第3小题, 利用第2小题的结果和积分中值定理讨论极限.

补充习题 2.28 (波动方程的**Kirchhoff公式**). [*] 设$h\in C^2(\mathbb{R}^3)$, 令

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\oiint_{\mathbb{S}^2_{(x,y,z)}(t)}\frac{f}{t}\mathrm{d}A,$$

证明：u满足波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u''_{tt}-\Delta u=0, & (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\\ u|_{t=0}=0,\ u'_t|_{t=0}=f, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\end{cases}$$

其中$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, 初值条件在极限的意义下验证.

[Hint] 仿照补充习题2.27计算即可.

3 常微分方程理论

3.1 常微分方程初等解法

习题 3.1.1. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\sqrt{1-y^2}$.

Solution. $y = \pm 1$为方程的特解, 当$y \neq \pm 1$时, 变量分离得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = 2x\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \arcsin y = x^2 + C,$$

即得通解$y = \sin(x^2 + C)$, 其中C为任意常数. □

补充习题 3.1. 解方程$(x^2+1)(y^2-1)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$.

[Hint] 通解为$y^2 = 1 + \dfrac{Ce^{-x^2}}{x^2}$（$C$为任意常数）, 特解为$x = 0$.

补充习题 3.2. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$.

[Hint] 通解为$y^2 = (x+C)^3$（C为任意常数）, 特解为$y = 0$.

习题 3.1.2. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

Solution. 令$\dfrac{y}{x} = u$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\operatorname{sgn} x\sqrt{1+u^2}}{x},$$

分离变量解得

$$u + \sqrt{1+u^2} = C|x|^{\operatorname{sgn} x},$$

即$u = \dfrac{Cx}{2} - \dfrac{1}{2Cx}$, 代回$u$即得通解为$y = \dfrac{Cx^2}{2} - \dfrac{1}{2C}$, 其中$C$为任意不为0的常数. □

习题 3.1.3. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-2x^3+4xy^2}{x^2y+y^3+3y}$.

Solution. 考虑令$u = x^2+\xi, v = y^2+\eta$, 满足$\begin{cases} -2\xi + 4\eta = 0, \\ \xi + \eta = 3, \end{cases}$ 则$\xi = 2, \eta = 1$, 此时方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{-2u+4v}{u+v},$$

按齐次方程解得$|v-u|^2 = e^C|v-2u|^3$, 代回u, v得通解为

$$C_1(y^2-x^2-1)^2 = C_2(y^2-2x^2-3)^3,$$

其中C_1, C_2为任意常数（其中添加漏掉的解）. □

补充习题 3.3. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-x+2y+5}{2x-y-4}$.

[Hint] 通解为$C_1(x-y-3)=C_2(x+y+1)^3$（C_1,C_2为任意常数）.

习题 3.1.4. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\tan x=\sin(2x)$.

Solution. 积分因子$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{|\cos x|}$, 则有

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{\cos x}\right)=\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}y+y\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\sin x\mathrm{d}x,$$

即得通解为$y=C\cos x-2\cos^2 x$, 其中C为任意常数. □

补充习题 3.4. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y+y^2\mathrm{e}^y}$.

[Hint] 通解为$x=y(C+\mathrm{e}^y+\ln|y|)$（$C$为任意常数）, 特解为$y=0$.

习题 3.1.5. 设$y=\varphi(x)$满足微分不等式$y'+a(x)y\le 0(x\ge 0)$, 证明:

$$\varphi(x)\le\varphi(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t},\ x\ge 0.$$

Proof. 考虑积分因子$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$, 则题述不等式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\mathrm{e}^{\int_0^x a(t)\mathrm{d}t}\right)\le 0,\ x\ge 0,$$

这给出单调性, 进而就有

$$\varphi(x)\mathrm{e}^{\int_0^x a(t)\mathrm{d}t}\le\varphi(0)\mathrm{e}^{\int_0^0 a(t)\mathrm{d}t}=\varphi(0),$$

整理即得命题成立. □

习题 3.1.6. 设f为连续可微函数, 解方程$xf(x^2+y^2)\mathrm{d}x+yf(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$.

Solution. 计算略, 通解为$\displaystyle\int_0^{x^2+y^2}f(t)\mathrm{d}t=C$, 其中$C$为任意常数. □

习题 3.1.7. 设P,Q为二元齐次函数, 且次数相同, 证明：方程$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$有积分因子$\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$.

Proof. 只需注意

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{P}{xP+yQ}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{Q}{xP+yQ}\Leftrightarrow\frac{xP'_x+yP'_y}{P}=\frac{xQ'_x+yQ'_y}{Q},$$

上式成立当且仅当$\deg P=\deg Q$, 由此命题成立. □

[Remark] 注意对齐次函数$f:C^k(\Omega)(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$, $\deg f=d\ge k$, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^n x^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^k f(\boldsymbol{x})=\frac{d!}{(d-k)!}f(\boldsymbol{x}).$$

习题 3.1.8. 考虑方程$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$, 设$\varphi$为连续函数, 证明：方程有形如$\mu(\varphi(x,y))$的积分因子, 当且仅当

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\varphi'_x - P\varphi'_y}$$

仅为φ的函数, 特别若该函数为$M(\varphi)$, 则积分因子为$\mathrm{e}^{\int M(t)\mathrm{d}t}|_{t=\varphi(x,y)}$.

Proof. μ为方程$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$的积分因子当且仅当

$$P\mu'_y - Q\mu'_x = (Q'_x - P'_y)\mu,$$

代入$\mu = \mu(\varphi)$得到

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\varphi'_x - P\varphi'_y} = \frac{\mu'(\varphi)}{\mu(\varphi)},$$

由此令$M(\varphi) = \dfrac{\mu'(\varphi)}{\mu(\varphi)}$即有命题成立, 此时解得积分因子$\mu = \mathrm{e}^{\int M(t)\mathrm{d}t}|_{t=\varphi(x,y)}$. □

补充习题 3.5. 解方程$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cot y + 2y\cos y)\mathrm{d}y = 0$.

[Hint] 积分因子为$\sin y$. 通解为$4\mathrm{e}^x \cos y + \sin 2y - 2y\cos 2y = C$（$C$为任意常数）.

补充习题 3.6. 解方程$(y^2 + 2x^2y)\mathrm{d}x + (xy + x^3)\mathrm{d}y = 0$.

[Hint] 积分因子为$\mathrm{e}^{\frac{x^6y^4}{2}}$. 通解为$\dfrac{x^4y^4}{4} + \dfrac{x^6y^3}{6} = C$（$C$为任意常数）.

习题 3.1.9. [*] 考虑方程$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$, 设$\mu$为其积分因子, 使得$\mu P\mathrm{d}x + \mu Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi$, 证明：方程的积分因子全体为

$$\{\mu f(\Phi) : f\text{可微, 且}f \not\equiv 0\}.$$

Proof. 对任意非零可微函数f, 考虑

$$\mathrm{d}\left(\int f(t)\mathrm{d}t\bigg|_{t=\Phi}\right) = f(\Phi)\mathrm{d}\Phi = \mu f(\Phi)P\mathrm{d}x + \mu f(\Phi)Q\mathrm{d}y,$$

即知$\mu f(\Phi)$也为原方程的积分因子.

反过来, 设μ_1也为方程的积分因子, 记$\mu_1 P\mathrm{d}x + \mu_1 Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi_1$, 这表明$(\Phi_1)'_x = \mu_1 P$, $(\Phi_1)'_y = \mu_1 Q$, 而由条件已有$\Phi'_x = \mu P$, $\Phi'_y = \mu Q$, 因此

$$\frac{\partial(\Phi, \Phi_1)}{\partial(x,y)} = \Phi'_x(\Phi_1)'_y - \Phi'_y(\Phi_1)'_x \equiv 0,$$

这就表明$\dfrac{\mu_1}{\mu} = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}\Phi}$为$\Phi$的可微函数, 记为$f(\Phi)$, 于是$\mu_1 = \mu f(\Phi)$成立. □

补充习题 3.7. [*] 考虑方程$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$, 其中$P, Q$连续可微, 设$\mu_1, \mu_2$为方程的连续可微的积分因子, 且有$\dfrac{\mu_1}{\mu_2} \not\equiv \mathrm{const}$, 证明：方程的通解可表示为$\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C$, 其中$C$为任意常数.

习题 3.1.10. 解方程$x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+9x=0$.

Solution. 记$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则$y=\frac{9x}{2p}+\frac{xp}{2}(p\neq 0)$, 两边求导得到

$$\left(1-\frac{9}{p^2}\right)\left(p-x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

即$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{p}{x}$或$p^2=9$, 这给出通解$p=Cx$与特解$p=\pm 3$, 其中$C$为任意常数, 于是原方程的通解为

$$y=\frac{9}{2C}+\frac{Cx^2}{2},$$

特解为$y=\pm 3x$. □

习题 3.1.11. 解方程$y^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=1$.

Solution. 记$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 题述方程有参数表达$\begin{cases} y=\cos t, \\ p=\sin t, \end{cases}$ 在$p\neq 0$时则有

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{p}=\frac{\mathrm{d}\cos t}{\sin t}=-\mathrm{d}t,$$

解得$x=-t+C$, 其中C为任意常数, 则通解为$\begin{cases} x=-t+C, \\ y=cost, \end{cases}$ 也即$y=\cos(C-x)$.

在$p=0$时, $y=\pm 1$为方程的特解. □

补充习题 3.8. 解方程$x^3+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3-4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$.

[Hint] 通解为$\begin{cases} x=\frac{4t}{t^3+1}, \\ y=-\frac{8}{(t^3+1)^2}+\frac{32}{3(t^3+1)}+C \end{cases}$ （C为任意常数）.

3.2 线性常微分方程

习题 3.2.1 (Liouville公式). 考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2, \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2, \end{cases}$$

其中a_{ij}在(a,b)上连续, 设$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}_1(x)$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}_2(x)$为方程二解, 相应Wronsky行列式$W(x)$, 证明:

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}(a_{11}(t)+a_{22}(t))\mathrm{d}t\right),$$

其中任取$x_0\in(a,b)$.

Proof. 记$\boldsymbol{\varphi}_j(x)=(\varphi_{1j}(x),\varphi_{2j}(x))^{\mathrm{T}}$, $j=1,2$, 对$W(x)$求导可得

$$\begin{aligned}W'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi_{11}(x)\varphi_{22}(x)-\varphi_{12}(x)\varphi_{21}(x)\right)\\&=(a_{11}(x)+a_{22}(x))\left(\varphi_{11}(x)\varphi_{22}(x)-\varphi_{12}(x)\varphi_{21}(x)\right)\\&=(a_{11}(x)+a_{22}(x))W(x),\end{aligned}$$

其中利用$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}_1(x)$与$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}_2(x)$为方程的解即知命题成立. □

补充习题 3.9. 考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2,\\\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2,\end{cases}$$

其中a_{ij}在$\mathbb{R}$上连续, 且以$\omega>0$为周期, 证明：若

$$\int_0^{\omega}(a_{11}(t)+a_{22}(t))\mathrm{d}t\neq 0$$

则方程没有以ω为周期的基本解组.

[Hint] 否则, 该解组的Wronsky行列式也应以ω为周期.

[Remark] 上述结果可以自然地推广到n元方程组的一般情形.

习题 3.2.2. [$*$] 考虑齐次线性方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}$, 其中$A$为连续的矩阵函数, 设$\Phi(x)$为其基本解矩阵, 接着令$\boldsymbol{f}:(a,b)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$连续, 证明：初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}),\\\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0,\end{cases}$$

等价于积分方程

$$\boldsymbol{y}(x)=\Phi(x)\left(\Phi(x_0)^{-1}\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\Phi(t)^{-1}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t))\mathrm{d}t\right).$$

Proof. “$\Leftarrow$”直接验证即可, 下证“$\Rightarrow$”：设$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(x)$为初值问题的解, 令$\boldsymbol{\psi}(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)$, 代回有

$$\Phi'(x)\boldsymbol{c}(x)+\Phi(x)\boldsymbol{c}'(x)=A(x)\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{f}(x,\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)),$$

由$\Phi'(x)=A(x)\Phi(x)$, 可见$\boldsymbol{c}'(x)=\Phi(x)^{-1}\boldsymbol{f}(x,\Phi(x)\boldsymbol{c}(x))$, 结合$x_0$处取值可见$\boldsymbol{c}$满足初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}x}=\Phi(x)^{-1}\boldsymbol{f}(x,\Phi(x)\boldsymbol{c}),\\\boldsymbol{c}(x_0)=\Phi(x_0)^{-1}\boldsymbol{y}_0,\end{cases}$$

这等价于积分方程

$$\boldsymbol{c}(x)=\Phi(x_0)^{-1}\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\Phi(t)^{-1}\boldsymbol{f}(t,\Phi(t)\boldsymbol{c}(t))\mathrm{d}t,$$

代回$\boldsymbol{\psi}(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}(x)$即知命题成立. □

习题 3.2.3. [∗] 考虑线性方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}(x)$, 其中$A, \boldsymbol{\beta}$均为以$\omega > 0$为周期的连续函数, 证明：方程组有唯一$\omega$-周期解, 当且仅当其相应齐次方程组仅有平凡$\omega$-周期解$\boldsymbol{y} = 0$.

Proof. 先证明对方程组的一解$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(x)$, 只要$\boldsymbol{\psi}(\omega) = \boldsymbol{\psi}(0)$, 就有$\boldsymbol{\psi}(x+\omega) = \boldsymbol{\psi}(x)(\forall x \in \mathbb{R})$：事实上, 考虑$\boldsymbol{\psi}(x+\omega)$是方程组满足初值$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{\psi}(\omega)$的解, 即有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(x+\omega) &= \Phi(x)\left(\Phi(0)^{-1}\boldsymbol{\psi}(\omega) + \int_0^x \Phi(t)^{-1}\boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{d}t\right)\\ &= \Phi(x)\left(\Phi(0)^{-1}\boldsymbol{\psi}(0) + \int_0^x \Phi(t)^{-1}\boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{d}t\right)\\ &= \boldsymbol{\psi}(x),\end{aligned}$$

其中$\Phi(x)$为齐次方程组的基本解矩阵, 并利用解的唯一性.

现在, 特别选取$x = 0$处适当的初值取基本解矩阵$\Phi(x)$, 使得$\Phi(0) = I_n$, 考虑方程组有通解

$$\boldsymbol{y} = \Phi(x)\left(\boldsymbol{c} + \int_0^x \Phi(t)^{-1}\boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{d}t\right),$$

欲使方程组有ω-周期解, 只需$\boldsymbol{y}(\omega) = \boldsymbol{y}(0)$关于$\boldsymbol{c}$有解（由上述讨论）, 整理得到

$$(\Phi(\omega) - I_n)\boldsymbol{c} = -\Phi(\omega)\int_0^\omega \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{d}t,$$

上式右端为常向量, 当$\boldsymbol{\beta}(x) \equiv 0$时对应齐次方程组情形. 于是, 上述线性方程组有唯一解（即原方程组有唯一ω-周期解）, 当且仅当$\Phi(\omega) - I_n$可逆, 当且仅当相应导出组仅有零解（即原方程组相应齐次方程组仅有平凡ω-周期解）. □

习题 3.2.4 (Massera准则). [∗] [∗] 考虑线性方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}(x)$, 其中$A, \boldsymbol{\beta}$均为以$\omega > 0$为周期的连续函数, 证明：方程组有$\omega$-周期解, 当且仅当方程组有在$\mathbb{R}$上有界的解.

Proof. “⇒”是显然的（周期解自然有界）, 下证“⇐”：设$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(x)$为方程组的有界解, 则对任意正整数$k$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(x + (k-1)\omega)$是满足初值$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{\psi}((k-1)\omega)$的解, 也即有

$$\boldsymbol{\psi}(x + (k-1)\omega) = \Phi(x)\left(\boldsymbol{\psi}((k-1)\omega) + \int_0^x \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{d}t\right),$$

其中取相应齐次方程基本解矩阵$\Phi(x)$满足$\Phi(0) = I_n$, 令$x = \omega$就有

$$\boldsymbol{\psi}(k\omega) = \Phi(\omega)\boldsymbol{\psi}((k-1)\omega) + \boldsymbol{v},$$

其中$\boldsymbol{v} = \Phi(\omega)\displaystyle\int_0^\omega \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\beta}(t)\mathrm{d}t$.

现在, 同习题3.2.3可知, 方程组的ω-周期解的存在性等价于方程组$(\Phi(\omega) - I_n)\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{v}$的解的存在性. 若原方程没有$\omega$周期解, 则应存在$\boldsymbol{u}$, 使得$(\Phi(\omega) - I_n)\boldsymbol{u} = 0$, 但$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \neq 0$, 由归纳法可证

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}(k\omega) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}(0) + k\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(k \in \mathbb{N}_+),$$

令$k \to +\infty$便与$\boldsymbol{\psi}$的有界性矛盾, 因此原方程必有ω周期解. □

习题 3.2.5. 考虑二阶齐次线性方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0$, 其中$p,q$均在$(a,b)$上连续, 证明：对方程的任意非零解$y=\varphi(x)$, 若其有零点$x_0\in(a,b)$, 则必定$\varphi'(x_0)\neq 0$.

Proof. 否则, $y=\varphi(x)$为初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0, \\ y(0)=y'(0)=0, \end{cases}$$

的解, 但$y=0$也为上述初值问题的解, 由解的唯一性, 这给出$\varphi(x)\equiv 0$, 矛盾. □

习题 3.2.6. 考虑二阶齐次线性方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0$, 其中$p,q$均在$(a,b)$上连续, 证明：方程任意两个线性无关的解没有公共零点.

Proof. 否则, 设$y=\varphi_1(x)$与$y=\varphi_2(x)$为方程的线性无关的二解, 且存在$x_0\in(a,b)$为其公共零点, 注意相应Wronsky行列式满足

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t\right)=0,$$

这给出φ_1,φ_2线性相关, 矛盾. □

补充习题 3.10. [*] [*] 考虑二阶齐次线性方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0$, 其中$p,q$均连续, 证明:

1. 方程二解$y=\varphi_1(x)$与$y=\varphi_2(x)$线性相关, 当且仅当二者有相同零点.
2. 方程二解$y=\varphi_1(x)$与$y=\varphi_2(x)$线性无关, 当且仅当二者零点交错分布, 即φ_1（*resp.* φ_2）的任意两个零点间均有φ_2（*resp.* φ_1）的零点.

[Hint] 分析Wronsky行列式.

习题 3.2.7. [*] 考虑二阶齐次线性方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0$, 其中$p,q$均在$(a,b)$上连续, 设$y=\varphi(x)$为其一非零解, 证明：方程通解可表达为

$$y=\varphi(x)\left[C_1+C_2\int_{x_0}^x\frac{\exp\left(-\int_{x_0}^t p(s)\mathrm{d}s\right)}{\varphi(t)^2}\mathrm{d}t\right].$$

Proof. 首先考虑$\varphi(x)\neq 0, x\in(a,b)$的情形, 此时由Liouville公式, 方程的任意一解$y=y(x)$满足

$$W(x)=\det\begin{pmatrix}\varphi(x) & y(x)\\ \varphi'(x) & y'(x)\end{pmatrix}=C\exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t\right),$$

其中$C=W(x_0)$为常数, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y(x)}{\varphi(x)}\right)=\frac{\varphi(x)y'(x)-y(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}=\frac{C\exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)\mathrm{d}t\right)}{\varphi(x)^2},$$

求解即得命题成立.

对一般情形, 只需证明题目所给式在φ的零点处也成立. 此时与上文同理有

$$\varphi(x)y'(x)-y(x)\varphi'(x)=C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right),$$

当$\varphi(x)=0$时, 就有$y(x)=-\dfrac{C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)}{\varphi'(x)}$, 其中注意由习题3.2.5的结果, $\varphi'(x)\neq 0$. 下面验证在极限意义下, 题目所给通解满足上式:

为此, 设$\tilde{x}_0\in(a,b)$为φ的零点, 则$\varphi'(\tilde{x}_0)\neq 0$, 于是在$\tilde{x}_0$的一个去心邻域内$\varphi(x)\neq 0$, 此时

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\tilde{x}_0}\varphi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp\left(-\int_{x_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s\right)}{\varphi(t)^2}\mathrm{d}t\\
=&\lim_{x\to\tilde{x}_0}\left[\frac{\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)}{\varphi(x)^2}\right]\Bigg/\left(-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right)\\
=&-\frac{\exp\left(-\int_{x_0}^{\tilde{x}_0}p(t)\mathrm{d}t\right)}{\varphi'(\tilde{x}_0)},
\end{aligned}$$

由此代回即知命题成立. □

习题 3.2.8. 解方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x^2\\2x\\x\end{pmatrix}.$$

Solution. 方程组即$y_1'=-y_1-y_2+x^2$, $y_2'=-y_2-y_3+2x$, $y_3'=-y_3+x$.

首先解$y_3'=-y_3+x$可得$y_3=x-1+C_3\mathrm{e}^{-x}$.

将y_3代入$y_2'=-y_2-y_3+2x$, 可得$y_2=x+C_2\mathrm{e}^{-x}-C_3x\mathrm{e}^{-x}$.

最后将y_2代入$y_1'=-y_1-y_2+x^2$, 可得$y_1=x^2-3x+3+C_1\mathrm{e}^{-x}-C_2x\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{C_3}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$. □

补充习题 3.11. 解方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

[Hint] 通解为$y_1=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2x\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}$, $y_2=C_2\mathrm{e}^{2x}$.

补充习题 3.12. 解方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-n^2\\-n^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos nx\\\sin nx\end{pmatrix},$$

其中$n\in\mathbb{N}_+$.

[Hint] 通解为$y_1=C_1\mathrm{e}^{n^2x}+C_2\mathrm{e}^{-n^2x}+\dfrac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nx$, $y_2=-C_1\mathrm{e}^{n^2x}+C_2\mathrm{e}^{-n^2x}+\dfrac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nx$.

习题 3.2.9. 计算方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

的一个基本解矩阵.

Solution. 方程组即$y_1' = -y_1 + y_2$, $y_2' = -y_2$, $y_3' = y_1 - 4y_3$.

首先解$y_2' = -y_2$, 可得$y_2 = C_2\mathrm{e}^{-x}$.

将y_2代入$y_1' = -y_1 + y_2$, 可得$y_1 = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x}$.

将y_1代入$y_3' = y_1 - 4y_3$, 可得$y_3 = \frac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-x} + C_2\left(\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-x}\right) + C_3\mathrm{e}^{-4x}$.

最后, 适当选取常数得到

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 3\mathrm{e}^{-x} & 9x\mathrm{e}^{-x} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-4x} & \mathrm{e}^{-x} & (3x-1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix},$$

计算其行列式（Wronsky行列式）即知其为基本解矩阵. □

补充习题 3.13. 计算方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

的一个基本解矩阵.

[Hint] 可取$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$.

习题 3.2.10. [*] 解方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Solution. 考虑$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + N$, 则计算矩阵指数有

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{xA} &= \mathrm{e}^{x(I_2+N)} = \mathrm{e}^{xI_2}\mathrm{e}^{xN} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xI_2)^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xN)^k}{k!}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x} & x\mathrm{e}^{x} \\ 0 & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

此即所求基本解矩阵$\Phi(x)$, 于是通解为$\Phi(x)c$. □

习题 3.2.11. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-4y=0.$

Solution. 考虑特征方程$\lambda^3+3\lambda-4=0$, 其解为$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{15}}{2}$, $\lambda_3=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{15}}{2}$, 由此方程有基本解组

$$\varphi_1(x)=\mathrm{e}^x,\ \varphi_2(x)=\mathrm{e}^{\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{15}}{2}x},\ \varphi_3(x)=\mathrm{e}^{\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{15}}{2}x},$$

也即有实基本解组

$$\varphi_1(x)=\mathrm{e}^x,\ \tilde{\varphi}_2(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x,\ \tilde{\varphi}_3(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x,$$

从而方程通解为$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+C_3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x.$ □

补充习题 3.14. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=2x.$

[Hint] 通解为$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}-x-\dfrac{1}{2}$. 特解的计算可利用后文补充习题3.26的结果.

习题 3.2.12. 解方程$x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+5x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+13y=0.$

Solution. $x>0$时, 令$x=\mathrm{e}^t$, 则方程化为$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+13y=0.$

考虑特征方程$\lambda^2+5\lambda+13=0$, 其解为$\lambda_1=-2+3\mathrm{i}$, $\lambda_2=-2-3\mathrm{i}$, 则方程有实基本解组

$$\varphi_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos 3t,\ \varphi_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t,$$

从而方程通解为$y=C_1\dfrac{\cos(3\ln|x|)}{x^2}+C_2\dfrac{\sin(3\ln|x|)}{x^2}$. $x<0$时令$x=-\mathrm{e}^t$类似讨论即可. □

[Remark] 上述方程为Euler方程.

习题 3.2.13. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}+2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=\sin x.$

Solution. 特征方程$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$解为$\lambda_1=\lambda_2=\mathrm{i}$, $\lambda_3=\lambda_4=-\mathrm{i}$, 则其相应齐次方程有实基本解组

$$\varphi_1(x)=\cos x,\ \varphi_2(x)=\sin x,\ \varphi_3(x)=x\cos x,\ \varphi_4(x)=x\sin x,$$

接着由i为特征多项式的2重根, 考虑设方程由形如$Kx^2\sin x$的特解, 代回可得$K=-\dfrac{1}{8}$.

由此, 方程通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x-\dfrac{1}{8}x^2\sin x.$ □

补充习题 3.15. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=4\mathrm{e}^x\cos x.$

[Hint] 通解为$y=C_1\mathrm{e}^x\cos x+C_2\mathrm{e}^x\sin x+2x\mathrm{e}^x\sin x$. 特解的计算既可以利用补充习题3.26的结果, 也可以注意到$1+\mathrm{i}$为特征多项式的1重根, 于是待定方程有形如$K_1x\mathrm{e}^x\sin x+K_2x\mathrm{e}^x\cos x$的特解代回计算.

3.3 常微分方程一般理论

习题 3.3.1. [*] 考虑初值问题$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ 其中f连续，且对变量y单调递减，证明：初值问题在右侧的解（即$x \geq x_0$上的解）是唯一的.

Proof. 设$y = y_1(x)$, $y = y_2(x)(x \geq x_0)$均为题述初值问题的解，假设存在$x_1 > x_0$，使得$y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$（不妨设$y_1(x_1) < y_2(x_1)$），令

$$\tilde{x} = \sup\{x \in [x_0, x_1] : y_1(x) = y_2(x)\},$$

则$r(x) = y_2(x) - y_1(x) > 0(x \in (\tilde{x}, x_1])$，但此时由$f$的单调性，可见

$$r'(x) = y_2'(x) - y_1'(x) = f(x, y_2(x)) - f(x, y_2(x)) \leq 0,$$

由此矛盾，这表明初值问题必定在右侧有唯一解. □

[Remark] 但需注意，上述条件不足以保证左侧解的唯一性.

习题 3.3.2. [*] 考虑初值问题$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2 - y^2)f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ 其中f在$\mathbb{R}^2$上连续，且$yf(x,y) > 0(y \neq 0)$，证明：对任意点(x_0, y_0)，当$x_0 < 0$且$|y_0|$适当小时，初值问题的解可延伸到$x \in (-\infty, \infty)$.

Proof. 易见$f(x, 0) = 0(\forall x \in \mathbb{R})$. 注意到$y = \pm x, 0$为方程的水平等斜线，利用单调性讨论即知命题成立（具体过程略）. □

补充习题 3.16. [*] 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y^2 - 2y - 3)\mathrm{e}^{(x+y)^2}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

证明：初值问题的解至少可延伸到$x = -\infty$或$x = \infty$的某一侧.

[Hint] 注意$y = -1$和$y = 3$是方程的水平等斜线.

习题 3.3.3. [*] 考虑带参数的初值问题$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(\lambda xy), \\ y(\xi) = \eta, \end{cases}$ 记其解为$y = \varphi(x; \xi, \eta, \lambda)$，计算

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right|_{\xi=\eta=0}, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right|_{\xi=\eta=0}, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right|_{\xi=\eta=0}$$

Solution. 考虑原问题等价的积分方程

$$\varphi(x; \xi, \eta, \lambda) = \eta + \int_\xi^x \sin(\lambda x \varphi(x; \xi, \eta, \lambda))\mathrm{d}x,$$

求导计算，可见$u = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$满足初值问题$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \lambda x \cos(\lambda x \varphi)u, \\ u(\xi) = -\sin(\lambda \xi \eta), \end{cases}$ 从中解得

$$u = -\sin(\lambda \xi \eta)\mathrm{e}^{\int_\xi^x \lambda x \cos(\lambda x \varphi)\mathrm{d}x}$$

代入$\xi = \eta = 0$即得$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right|_{\xi=\eta=0} = 0$，类似地可以得到$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right|_{\xi=\eta=0} = e^{\frac{\lambda x^2}{2}}$，$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right|_{\xi=\eta=0} = 0$. □

补充习题

补充习题 3.17. 解方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3y^3 - xy$.

[Hint] 令$\dfrac{1}{y^2} = u$换元. 通解为$(Ce^{x^2} + x^2 + 1)y^2 = 1$（$C$为任意常数）, 特解为$y = 0$.

补充习题 3.18. 解方程$3xy^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^3 + x^3 = 0$.

[Hint] 令$y^3 = u$换元化为一阶线性常微分方程. 通解为$y^3 = -\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{C}{x}$（$C$为任意常数）.

补充习题 3.19. [*] 考虑线性方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$, 其中$p, q$均为以$\omega > 0$为周期的连续函数, 证明:

1. 若$q(x) \equiv 0$, 则方程的解以ω为周期, 当且仅当p的平均值$P = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega p(x)\mathrm{d}x = 0$.
2. 若$q(x) \not\equiv 0$, 则方程有唯一ω周期解, 当且仅当p的平均值（同上定义）$P \neq 0$.

[Hint] 第2小题, 方程的ω周期解为

$$y = \frac{\int_x^{x+\omega} q(s)\exp\left(\int_x^s p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{\omega P} - 1}.$$

补充习题 3.20. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

的方程称为*Riccati方程*, 其中p, q连续, $p(x) \not\equiv 0$, 考虑以下问题:

1. 若已知Riccati方程的一个特解$y = \varphi_0(x)$, 证明：方程可转化为Bernoulli方程
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (2p(x)\varphi_0(x) + q(x))u + p(x)u^2.$$
2. 将二阶常微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0$化为Riccati方程.
3. 求解特殊的Riccati方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 + \dfrac{1}{4x^2} = 0$.

[Hint] 第1小题, 令$y = u + \varphi_0(x)$换元. 第2小题, 令$y = \mathrm{e}^{\int u\mathrm{d}x}$换元, 即有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = uy$. 第3小题, 令$xy = u$换元, 通解为$(\ln|x| + C)(2xy - 1) = 2$（$C$为任意常数）, 特解为$2xy = 1$.

补充习题 3.21. 应用习题3.1.8的结果, 给出方程$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$有积分因子$\mu(x^2 + y^2)$的条件.

[Hint] 条件为

$$\frac{P'_y - Q'_x}{2xQ - 2yP} = M(x^2 + y^2),$$

其中M为待定的函数.

补充习题 3.22 (Clairaut方程). [*] 设f为二次连续可微函数，且$f'' \neq 0$，解方程

$$y = x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

并分析其通解积分曲线族与特解积分曲线的关系.

[Hint] 通解为$y = Cx + f(C)$（C为任意常数），特解为$y = xq(x) + f(q(x))$, $q(x)$为$-f'(x)$的反函数.

补充习题 3.23. [*] 解方程$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y - x = 0$.

[Hint] 通解为$\begin{cases} x = C - 2v - 2\ln|v-1|, \\ y = C - 2v - 2\ln|v-1| - v^2, \end{cases}$ 特解为$y = x - 1$.

补充习题 3.24. [*] 考虑线性方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}(x)$，其中$A, \boldsymbol{\beta}$均为以$\omega > 0$为周期的连续函数，证明：若相应齐次方程组的任意解$\boldsymbol{y}(x)$均满足$\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{y}(x) = 0$，则上述方程组有唯一的$\omega$-周期解$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}_0(x)$，且对其任意解$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(x)$，均有

$$\lim_{x\to\infty}(\boldsymbol{\psi}(x) - \boldsymbol{\psi}_0(x)) = 0,$$

即任意解均渐近于ω-周期解.

[Hint] 利用Massera准则（习题3.2.4）可得ω-周期解的存在性，习题3.2.3的结果则给出唯一性.

补充习题 3.25. [*] 考虑边值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}(x), \\ \boldsymbol{y}(x_1) = \boldsymbol{y}(x_2) = 0, \end{cases}$$

其中$A, \boldsymbol{\beta}$均在(a,b)上连续，$x_1, x_2 \in (a,b)$，证明：若相应齐次方程组的边值问题仅有平凡解$\boldsymbol{y} = 0$，则上述边值问题必有解.

[Hint] 将解表示出来，然后转化为线性方程组的问题.

补充习题 3.26. 考虑二阶非齐次线性方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = f(x)$，其中$p, q, f$均在$(a,b)$上连续，现设$y = \varphi_1(x)$与$y = \varphi_2(x)$为其相应齐次方程的特解，证明：方程通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)} f(t)\mathrm{d}t.$$

[Hint] 利用常数变易法，或直接转化为一阶线性方程组利用通解表达式的结果.

补充习题 3.27 (第一比较定理). [*] 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$为区域，$f, g$在$\Omega$上连续，满足$f(x,y) < g(x,y)$ $((x,y) \in \Omega)$，设函数$y = \varphi(x)$与$y = \psi(x)$分别为初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

在$x \in (a,b)$上的解，证明：$\begin{cases} \varphi(x) > \psi(x), & a < x < x_0, \\ \varphi(x) < \psi(x), & x_0 < x < b. \end{cases}$

4 数项级数与函数项级数

4.1 数项级数及其审敛

习题 4.1.1. 讨论级数$\sum_{n}^{\infty}\sin(na)$的敛散性, 其中$a\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 当$a=k\pi,k\in\mathbb{Z}$时, $\sin(na)\equiv 0$, 自然级数收敛.

下设$a\neq k\pi(\forall k\in\mathbb{Z})$, 断言$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(na)\neq 0$：否则, 也有$\lim\limits_{n\to\infty}\sin[(n+1)a]=0$, 于是

$$\sin a=\sin[(n+1)a-na]=\sin[(n+1)a]\cos(na)-\cos[(n+1)a]\sin(na)\to 0, n\to\infty,$$

这与$a\neq k\pi$矛盾. 于是原级数必定发散. □

习题 4.1.2. 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\delta_n}{n}$发散, 其中$\delta_n=\begin{cases}-1, & 3|n\\ 1, & otherwise.\end{cases}$

Proof. 记级数部分和序列为$\{S_n\}$, 考虑

$$\begin{aligned}S_{6n}-S_{3n}&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3(n+k)-2}+\left(\frac{1}{3(n+k)-1}-\frac{1}{3(n+k)}\right)\right]\\&>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3(n+k)-2}\\&>n\cdot\frac{1}{6n}=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

由Cauchy收敛准则即知级数发散. □

习题 4.1.3. 设正项级数$\sum_{n}^{\infty}a_n$收敛, 且$\{a_n\}$单调递减, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

Proof. 由Cauchy收敛准则, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}_+$, 使得当$n>N$时有

$$(n-N)a_n<a_{N+1}+\cdots+a_n<\varepsilon,$$

其中利用$\{a_n\}$单调递减. 特别取$n=2N$就有$(0<)\dfrac{n}{2}a_n<\varepsilon$, 这即给出命题成立. □

习题 4.1.4. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性, 其中$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \exists k\in\mathbb{N}_+, n=k^2\\ \frac{1}{n^2}, & otherwise.\end{cases}$

Solution. 记级数部分和序列为$\{S_n\}$, 考虑

$$S_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k^2\le n}\frac{1}{k^2}\le 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

其中注意$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}<+\infty$, 即知原级数收敛. □

[Remark] 此题给出一例, 说明习题4.1.3中的结论在去掉数列单调性条件后不成立.

习题 4.1.5 (Sapagov). 设正项数列$\{a_n\}$单调递减, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$当且仅当级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散.

Proof. 记$b_n = 1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. 由正项数列$\{a_n\}$单调递减, 必存在$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n (a \geq 0)$.

若$a > 0$, 则有$b_n \leq \dfrac{1}{a}(a_n - a_{n+1})$, 而

$$\sum_{n}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_1 - a_{n+1}) = a_1 - a$$

收敛, 由比较判别法即知$\sum\limits_{n}^{\infty} b_n$收敛.

若$a = 0$, 则

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \geq \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k - a_{k+1}}{a_{n+1}} = 1 - \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}},$$

对任意给定的$n \in \mathbb{N}_+$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 总是可取充分大的$p \in \mathbb{N}_+$, 使得上式大于$\dfrac{1}{2}$, 故由Cauchy收敛准则可知必有$\sum\limits_{n}^{\infty} b_n$发散. □

习题 4.1.6 (Kummer判别法). 考虑正项级数$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$, 证明：

1. $\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$收敛, 当且仅当存在正项数列$\{b_n\}$与$\alpha > 0$, 使得当$n$充分大时有$b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \alpha$.
2. $\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$发散, 当且仅当存在发散的正项级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$, 使得当$n$充分大时有$b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0$.

Proof. 1. “⇒”：由条件可得$a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1} \geq \alpha a_{n+1} > 0$, 这表明$\{a_n b_n\}$为单调递减的正项数列, 相应有极限, 进而$\sum\limits_{n}^{\infty}(a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1})$收敛, 由比较判别法即知$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$收敛.

“⇐”：记$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$的余项序列为$\{R_n\}$, 令$b_n = \dfrac{R_n}{a_n}$, 则有$b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \dfrac{R_n - R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1$, 取$\alpha = 1$即可.

2. “⇒”：只需注意$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}$, 由比较判别法的比值形式即知$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$发散.

“⇐”：记$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$的部分和序列为$\{S_n\}$, 令$b_n = \dfrac{S_n}{a_n}$, 则有$b_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \dfrac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 < 0$, 同时

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{b_k} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k} \geq \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}},$$

对任意给定的$n \in \mathbb{N}_+$, 由于$\{S_n\}$发散, 总是可取充分大的$p \in \mathbb{N}_+$, 使得上式大于$\dfrac{1}{2}$, 故由Cauchy收敛准则可知必有$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$发散. □

[Remark] 通过选取恰当的$\{b_n\}$, 可由Kummer判别法导出各种正项级数的比值判别法.

习题 4.1.7 (Cauchy凝聚判别法). 设正项数列$\{a_n\}$单调递减，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛当且仅当$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$收敛，后者称为凝聚项级数.

Proof. 由单调性，考虑$2^{k-1}a_{2^k} \le a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k} \le 2^{k-1}a_{2^{k-1}}$，对$k$从1到$n$求和有

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \le \sum_{l=2}^{2^n} a_l \le \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k},$$

即知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$敛散性相同. □

习题 4.1.8 (Ermakov判别法). [*] 设f为$\mathbb{R}$上单调递减的正值函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \delta$，证明：若$\delta < 1$，则级数$\sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$收敛，否则该级数发散.

Proof. 由Cauchy积分判别法，级数$\sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$与广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$同敛散.

现取$x_1 = 1, x_2 = \mathrm{e}, \cdots, x_n = \mathrm{e}^{x_{n-1}}, \cdots$，自然$\{x_n\}$单调递增趋于正无穷大，此时考虑

$$I_n := \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}^{x_{n-1}}}^{\mathrm{e}^{x_n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x,$$

注意$\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$与$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$亦同敛散.

若$\delta < 1$，则存在$X > 1$，使得$x > X$时有$\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x) < \dfrac{1+\delta}{2} f(x)$（注意$\delta < \dfrac{1+\delta}{2} < 1$），也即有

$$I_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x \le \frac{1+\delta}{2} I_{n-1},$$

这表明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$收敛（d'Alembert判别法），于是原级数亦收敛.

若$\delta > 1$，则存在$X > 1$，使得$x > X$时有$\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x) > f(x)$，也即有

$$I_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x > I_{n-1},$$

自然$\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$发散，于是原级数亦发散. □

补充习题 4.1. 分别利用*Cauchy*凝聚判别法与*Ermakov*判别法，讨论级数

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n^{p_0}(\ln n)^{p_1}\cdots(\underbrace{\ln\cdots\ln}_{k} n)^{p_k}}$$

的敛散性，其中$p_0, p_1, \cdots, p_k > 0$为参数.

[Hint] $p_0 > 1$与< 1分别对应级数收敛与发散，而$p_0 = 1$时$p_1 > 1$与< 1分别对应级数收敛与发散，……以此类推，当$p_0 = p_1 = \cdots = p_k = 1$时级数发散.

习题 4.1.9. 讨论以下级数的敛散性：

1. $\sum\limits_{n}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$.
2. $\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$.
3. $\sum\limits_{n}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$, 其中$a>0$为参数.

Solution. 1. 由$\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\mathrm{e}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty)$, 即知级数发散.

2. 由$\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}=O^*\left(\frac{1}{n\ln n}\right)(n\to\infty)$, 即知级数发散.

3. 考虑

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\ln a-1}{2n}+\frac{4(\ln a)^2+1}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

由此即知$a=\sqrt{\mathrm{e}}$时级数收敛, 否则级数发散. □

补充习题 4.2. [*] 考虑正项级数$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$, 记$K_n=\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln n}$, 证明：

1. 若存在$p>1$, 使得当n充分大时有$K_n\geq p$, 则级数收敛.
2. 若当n充分大时有$K_n\leq 1$, 则级数发散.

[Hint] 估计可得$\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)(n\to\infty)$.

习题 4.1.10. [*] 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}$的敛散性, 其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数, 不取非正整数.

Solution. $\alpha=1$时$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\equiv 1$, 级数发散.

下设$\alpha\neq 1$, 取$K\in\mathbb{N}_+$充分大, 使得$k>K$时$\left|\frac{1-\alpha}{k}\right|<1$, 则$n>K$时就有

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}&=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1-\alpha}{k}\right)=C\prod_{k=K}^{n}\left(1-\frac{1-\alpha}{k}\right)\\&=C\exp\left(\sum_{k=K}^{n}\ln\left(1-\frac{1-\alpha}{k}\right)\right)\\&=C\exp\left(-(1-\alpha)\sum_{k=K}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=K}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\\&=O^*\left(\exp[-(1-\alpha)\ln n]\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right),n\to\infty,\end{aligned}$$

其中利用$\sum\limits_{k}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=O^*(1)$以及$\sum\limits_{k}^{\infty}\frac{1}{k^2}=O^*(1)(n\to\infty)$, 于是$\alpha<0$时原级数收敛, 否则级数发散. □

习题 4.1.11. 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}$的敛散性, 其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 利用Wallis公式可得$\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=O^{*}(\sqrt{\pi n})(n\to\infty)$, 故

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}=O^{*}\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\right),n\to\infty,$$

由此即知$\alpha>2$时级数收敛, 否则级数发散. □

习题 4.1.12. 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}n!\left(\dfrac{a}{n}\right)^{n}$的敛散性, 其中$a>0$为参数.

Solution. 利用Stirling公式可得$n!=O^{*}\left[\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}\right](n\to\infty)$, 故

$$n!\left(\frac{a}{n}\right)^{n}=O^{*}\left[n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\mathrm{e}}\right)^{n}\right],n\to\infty,$$

由此即知$a<\mathrm{e}$时级数收敛, 否则级数发散. □

习题 4.1.13. 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a^{n}}{1+a^{2n}}$的敛散性, 其中$a>0$为参数.

Solution. $a=1$时易见级数发散.

若$a<1$, 由$\dfrac{a^{n}}{2}<\dfrac{a^{n}}{1+a^{2n}}<a^{n}$可见$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^{n}}{1+a^{2n}}}=a<1$, 由Cauchy根值判别法知级数收敛.

若$a>1$, 考虑$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^{n}}{1+a^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^{-n}}{1+a^{-2n}}}=\dfrac{1}{a}<1$, 由Cauchy根值判别法知级数亦收敛. □

习题 4.1.14. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-1}}=\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots$的敛散性.

Solution. 注意$\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$, 立即得到级数通项为$2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, 再由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}=2,$$

利用d'Alembert判别法即知级数收敛. □

习题 4.1.15. 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a(a+c)\cdots[a+(n-1)c]}{b(b+c)\cdots[b+(n-1)c]}$的敛散性, 其中$a,b,c>0$为参数.

Solution. 记级数各项为a_n, 考虑

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nc}{a+nc}=1+\frac{b-a}{cn}+O\left(\frac{1}{n^{2}}\right),$$

于是由Gauss判别法可知当$b-a>c$时级数收敛, 否则级数发散. □

补充习题 4.3. *利用Gauss判别法（或Raabe判别法）重新讨论习题4.1.11与习题4.1.12.*

习题 4.1.16. 设不定项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$（条件）收敛，证明：可以通过适当结合其各项得到绝对收敛级数.

Proof. 记$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和序列为$\{S_n\}$，由其收敛，反复利用Cauchy收敛准则，可取递增指标子列$\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$，其中$p_0=0$，且使得

$$|S_{p_2}-S_{p_1}|<\frac{1}{2},\cdots,|S_{p_{k+1}}-S_{p_k}|<\frac{1}{2^k},$$

现作级数的结合$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_{p_k+1}+\cdots+a_{p_{k+1}})$，相应绝对值级数为

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_{p_k+1}+\cdots+a_{p_{k+1}}|=\sum_{k=0}^{\infty}|S_{p_{k+1}}-S_{p_k}|<|S_{p_1}|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<+\infty,$$

这即表明$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_{p_k+1}+\cdots+a_{p_{k+1}})$绝对收敛. □

习题 4.1.17. 设不定项级数$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$（条件）收敛，证明：若对该级数作重排，但每项在重排前后的位置指标相差不超过m（$m>0$为给定的常数），则重排级数的和不变.

Proof. 记$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$的部分和序列为$\{S_n\}$，并记重排后级数的部分和序列为$\{\tilde{S}_n\}$. 由条件可知，当$n>m$时，$S_n$中前$n-m$项未被替换，设后$m$项中$a_{p_1},\cdots,a_{p_k}(k\le m)$分别被$a_{\tilde{p}_1},\cdots,a_{\tilde{p}_k}$所替换，则

$$|\tilde{S}_n-S_n|\le|a_{p_1}|+\cdots+|a_{p_k}|+|a_{\tilde{p}_1}|+\cdots+|a_{\tilde{p}_k}|,$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则对任意$\varepsilon>0$，可取$N\in\mathbb{N}_+$，使得$p>N$时$|a_p|<\varepsilon$，由此令$n>N+m$，就有

$$\text{上式}<2k\varepsilon<2m\varepsilon,$$

这即表明$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_n$，级数和不变. □

习题 4.1.18. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$的重排，其中$\{a_n\}$的正项与负项的顺序在重排前后相同，记其前$n$项中有$p_n$个正项，证明：若有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{n}=p\in(0,1)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{1-p}$.

Proof. 记$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和序列为$\{S_n\}$，则有

$$\begin{aligned}S_n&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p_n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-2p_n}\right)\\&=\sum_{k=1}^{2p_n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-p_n}\frac{1}{k}\\&=\ln(2p_n)-\frac{1}{2}\ln p_n-\frac{1}{2}\ln(n-p_n)+o(1)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p_n}{n-p_n}+o(1),\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，由条件即知命题成立. □

[Remark] 此题给出了Riemann重排定理的一个具体例子.

补充习题 4.4. 计算级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$的重排和$1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{4}+\cdots$.

[Hint] 使用习题4.1.18的解题方法, 但不要硬套结论. 答案为$\dfrac{3}{2}\ln 2$.

习题 4.1.19. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$的敛散性, 其中$[\sqrt{n}]$表示$[\sqrt{n}]$的整数部分.

Solution. 考虑将级数中相邻的同号项合并得到交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 其中

$$a_n=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left[1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right), n\to\infty,$$

由此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 且$n$充分大后$a_n$单调递减, 由Leibniz判别法即知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛, 于是原级数亦收敛.

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$的绝对值级数为调和级数, 自然发散, 因此其条件收敛. □

习题 4.1.20. 判断级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的敛散性.

Solution. 考虑级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛, 与原级数相减得到

$$\sum_{n}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right]=\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}[\sqrt{n}+(-1)^n]},$$

容易看到上述正项级数发散, 故原级数必发散. □

[Remark] 此题给出一例, 说明Leibniz判别法在级数各项绝对值非单调时不成立, 同时说明在判断不定号级数的收敛性时不能随意换为等价量来判断.

习题 4.1.21. [∗] 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$的敛散性, 其中$\alpha>0$为参数.

Solution. 记$a_n=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, $b_n=\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $c_n=b_n-a_n$, 作估计有

$$a_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\ \Rightarrow\ c_n=\frac{1}{2n^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right), n\to\infty,$$

当$0<\alpha\le\dfrac{1}{2}$时, $\sum\limits_{n}^{\infty}b_n$条件收敛, $\sum\limits_{n}^{\infty}c_n$发散, 故原级数$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$发散.

当$\dfrac{1}{2}<\alpha\le 1$时, $\sum\limits_{n}^{\infty}b_n$亦条件收敛, $\sum\limits_{n}^{\infty}c_n$绝对收敛, 故原级数$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$条件收敛.

当$\alpha>1$时, $\sum\limits_{n}^{\infty}b_n$与$\sum\limits_{n}^{\infty}c_n$均绝对收敛, 故原级数$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$绝对收敛. □

习题 4.1.22. [$*$] 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+p^2}\right)$的敛散性，其中$p>0$为参数.

Solution. 考虑

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+p^2}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+p^2}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\frac{\pi p^2}{\sqrt{n^2+p^2}+n},$$

故当n充分大后，原级数为通项单调递减的交错级数，由Leibniz判别法即知级数收敛.

接着考虑

$$\left|(-1)^n\sin\frac{\pi p^2}{\sqrt{n^2+p^2}+n}\right|=\sin\frac{\pi p^2}{\sqrt{n^2+p^2}+n}=O^*\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty,$$

即知原级数条件收敛. □

习题 4.1.23. 讨论级数$1-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\cdots$的敛散性，其中$p,q\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 首先易见$p,q>1$时级数绝对收敛，而$\min\{p,q\}\le 0$时级数发散.

当$0<p<1<q$或$0<q<1<p$时，考虑原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^q}$之差，其一收敛而另一发散，故原级数发散.

当$0<p=q\le 1$时，自然级数条件收敛.

当$0<p,q\le 1$而$p\ne q$时，记级数部分和序列为S_n，考虑

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^q},$$

利用积分估计有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^p}=O^*\left(\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)^p}\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right),n\to\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^q}=O^*\left(\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{(2x)^q}\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{q-1}}\right),n\to\infty,$$

可见S_{2n}在$n\to\infty$时为无穷大量，故级数发散. □

习题 4.1.24. 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$的敛散性，其中$x\in(0,\pi)$为参数.

Solution. 考虑

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\sin^{-1}\frac{x}{2}$$

有界，而$\frac{1}{n}$单调递减趋于0，由Dirichlet判别法即知原级数收敛.

接着考虑

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n}\right|\ge\frac{\sin^2(nx)}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos(2nx)}{2n},$$

与前类似地可由Dirichlet判别法证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{2n}$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，由此即知原级数条件收敛. □

4.2 函数列, 函数项级数及其审敛

习题 4.2.1. 考虑$E \subset \mathbb{R}$上的函数列$\{f_n\}_n^\infty$, 证明：在X上$f_n \rightrightarrows f(n \to \infty)$, 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Proof. 按照定义, $f_n \rightrightarrows f(n \to \infty)$即对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}_+$, 使得$n > N$时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in E,$$

此即$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$. □

习题 4.2.2. 判断函数列$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$在$\mathbb{R}$上的敛散性.

Solution. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x$, 下证其在$\mathbb{R}$上不一致收敛：

否则, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}_+$, 使得$n > N$时有

$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \mathrm{e}^n\right| < \varepsilon, x \in \mathbb{R},$$

但特别取$x = n$, 则$|2^n - \mathrm{e}^n| < \varepsilon$, 这在$n$充分大时不成立, 矛盾. □

补充习题 4.5. 判断下列函数列在相应区间上的敛散性：

1. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}$在$[0, 1]$或$[1, +\infty)$上.
2. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$在$[a, b] \subset \mathbb{R}$或$\mathbb{R}$上.

[Hint] 第1小题, 注意$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, 其在$[0, 1]$上不一致收敛, 在$[1, +\infty)$上一致收敛. 第2小题, 注意$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $f_n(n) = 1$, 其在$[a, b]$上一致收敛, 在$\mathbb{R}$上不一致收敛.

习题 4.2.3. 设$f \in C^1(a, b)$, 令$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$, 证明：$f_n$在$(a, b)$上内闭一致收敛于$f'$.

Proof. 易见$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$. 现取$[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (a, b)$, 往证$f_n$在其上一致收敛于$f'$：

对充分大的n, 由Lagrange微分中值定理可得存在$\theta_n \in (0, 1)$, 使得

$$|f_n(x) - f'(x)| = \left|f'\left(x + \frac{\theta_n}{n}\right) - f'(x)\right|,$$

由f'在$[\tilde{a}, \tilde{b}]$上连续, 进而一致连续, 于是对任意$\varepsilon > 0$, 可取充分大的N, 使得$n > N$时$\frac{\theta_n}{n} < \frac{1}{n}$充分小, 保证上式$< \varepsilon$对$x \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$一致成立. □

补充习题 4.6. 设$f \in C(\mathbb{R})$, 令$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$, 证明：$f_n$在$\mathbb{R}$上内闭一致收敛于$\int_0^1 f(x + t)\mathrm{d}t$.

[Hint] 利用f在任意闭区间上的一致收敛性进行估计.

习题 4.2.4. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上的敛散性.

Solution. 由绝对值部分和序列 $\tilde{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(-1)^k x^k(1-x)|=x-x^{n+1}$ 可见级数在 $[0,1]$ 上处处绝对收敛.

现估计原级数的余项 R_n 有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}(1-x)}{1+x}\right|\le x^{n+1}(1-x)\le\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}}<\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty),x\in[0,1],$$

故级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

下面考虑级数的绝对一致收敛性, 注意绝对值级数收敛于 $\tilde{S}(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 故有

$$\sup_{x\in[0,1]}|\tilde{S}_n(x)-\tilde{S}(x)|=1\not\to 0,n\to\infty,$$

这表明原级数不绝对一致收敛. □

习题 4.2.5. 判断级数 $\sum\limits_{n}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的敛散性, 其中 $u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}\le x<\frac{1}{n},\\ 0, & otherwise.\end{cases}$

Solution. 级数自然处处收敛, 考虑其余项序列 $\{R_n(x)\}$, 可见

$$|R_n(x)|=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\le\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty),x\in[0,1],$$

于是级数在 $[0,1]$ 上一致收敛. □

[Remark] 此题给出一例, 说明一致收敛的函数项级数不一定总可由Weierstrass判别法审敛. 事实上, 可用Weierstrass判别法判断级数 $\sum\limits_{n}^{\infty}u_n(x)$ 在 $E\subset\mathbb{R}$ 上一致收敛, 当且仅当级数 $\sum\limits_{n}^{\infty}\sup\limits_{x\in E}|u_n(x)|$ 收敛.

补充习题 4.7. 判断级数 $\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的敛散性.

[Hint] 利用Leibniz判别法可知级数在 $(0,+\infty)$ 上收敛, 同时可见其条件收敛. 估计余项可知级数一致收敛. 但上述级数也无法用Weierstrass判别法审敛.

习题 4.2.6. 判断级数 $\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的敛散性.

Solution. 考虑

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\left|\frac{2n^{\frac{5}{2}}x}{1+n^5x^2}\right|\le\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}},$$

以 $\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 为强级数即知原级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. □

补充习题 4.8. 判断级数 $\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{nx}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的敛散性.

[Hint] 考虑函数 $\frac{x^2}{\mathrm{e}^{nx}}$ 最大值为 $\frac{4}{\mathrm{e}^2n^2}$, 由此利用Weierstrass判别法. 级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

习题 4.2.7. 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n}$在$[\delta,\pi-\delta]$上一致收敛，但在$[0,\pi]$上不一致收敛.

Proof. 由习题4.1.24可知级数在$(0,\pi)$上条件收敛, 此外易见其在$x=0,\pi$处绝对收敛.

在$[\delta,\pi-\delta]$上, $\dfrac{1}{n}$关于n单调递减（一致）趋于0, 同时

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right|\le \sin^{-1}\frac{x}{2}\le \sin^{-1}\frac{\delta}{2},$$

即$\sum\limits_{n}^{\infty}\sin(nx)$的部分和序列一致有界, 由Dirichlet判别法即知原级数一致收敛.

而在$[0,\pi]$上, 取$x=\dfrac{\pi}{4n}$（或$\pi-\dfrac{\pi}{4n}$）, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin(kx)}{k}\right|>\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{2}}{2k}<\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

这即表明级数不一致收敛（Cauchy收敛准则）. □

习题 4.2.8. 判断级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\sin(nx)$在$(\delta,1)(0<\delta<1)$上的敛散性.

Solution. 分解

$$\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\sin(nx)=\frac{1}{1+x^n}\cdot\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\cdot\sin(nx),$$

其中$\sum\limits_{n}^{\infty}\sin(nx)$的部分和序列一致有界, 同时$\dfrac{(1-x)x^n}{1-x^n}$关于$n$单调递减, 且

$$\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}=\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}<\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty),x\in(\delta,1),$$

则$\dfrac{(1-x)x^n}{1-x^n}$一致收敛于0, 由Dirichlet判别法可知级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin(nx)$一致收敛, 再由$\dfrac{1}{1+x^n}$关于$n$单调且一致有界, 由Abel判别法即知原级数一致收敛. □

补充习题 4.9. 判断级数$\sum\limits_{n}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\arctan(nx)}{n+\frac{\cos(nx)}{n}}$在$\mathbb{R}$上的敛散性.

[Hint] 先应用Dirichlet判别法再应用Abel判别法. 级数一致收敛.

习题 4.2.9. 设$u_n(x)\in C[a,b]$, 级数$\sum\limits_{n}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛, 证明：$\sum\limits_{n}^{\infty}u_n(x)$亦在$[a,b]$上一致收敛.

Proof. 应用Cauchy收敛准则, 对任意$\varepsilon>0$, 由条件存在$N\in\mathbb{N}_+$, 当$n>N$时有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_n(x)\right|<\varepsilon(\forall p\in\mathbb{N}_+),x\in(a,b),$$

在上式中令$x\to a+0$及$x\to b-0$, 即得级数在$[a,b]$上一致收敛. □

[Remark] 反过来, 对级数$\sum\limits_{n}^{\infty}u_n(x)$, 若$u_n(x)$在$x=a$处右连续（或左连续）, 但$\sum\limits_{n}^{\infty}u_n(a)$发散, 则$\sum\limits_{n}^{\infty}u_n(x)$必定在$[a,a+\delta]$（或$[a-\delta,a]$）上不一致收敛, 其中$\delta>0$充分小.

习题 4.2.10 (Bendixon判别法). 设$u_n(x)$在$[a,b]$上可微，且级数$\sum\limits_{n}^{\infty} u_n'(x)$的部分和序列在$[a,b]$上一致有界，证明：若级数$\sum\limits_{n}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上收敛，则亦一致收敛.

Proof. 由条件存在$M>0$，使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\right| < M(\forall n\in\mathbb{N}_+), x\in[a,b].$$

现对任意$\varepsilon>0$，取等距的分划$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$，其中m充分大，使得$\dfrac{b-a}{m}<\dfrac{\varepsilon}{4M}$. 由Cauchy收敛准则，存在$N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, i=0,1,\cdots,m.$$

现在对任意$x\in[a,b]$，设$x\in[x_{i-1},x_i]$，估计有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| &\le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (u_k(x)-u_k(x_i))\right| \\ &\le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x_i)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(\xi_i)\right| |x-x_i| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M|x-x_i| \le \varepsilon,\end{aligned}$$

其中应用Lagrange微分中值定理得到$\xi_i\in(x,x_i)$，使得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (u_k(x)-u_k(x_i)) = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k'(\xi_i),$$

于是由Cauchy收敛准则即知$\sum\limits_{n}^{\infty} u_n(x)$一致收敛. □

习题 4.2.11 (Dini定理). 设$f_n(x)\in C[a,b]$，其在$[a,b]$上处处单调递增收敛于f，证明：$f_n\rightrightarrows f(n\to\infty)$，当且仅当$f(x)\in C[a,b]$.

Proof. “$\Rightarrow$”是自然的，下证“$\Leftarrow$”：任取$\varepsilon>0$，对任意$\tilde{x}\in[a,b]$，由$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\tilde{x})=f(\tilde{x})$，存在$N\in\mathbb{N}_+$，使得$\left|f_N(\tilde{x})-f(\tilde{x})\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，由$f_N$与$f$连续可取$\delta>0$，使得$|x-\tilde{x}|<\delta$时有

$$|f_N(x)-f_N(\tilde{x})|<\frac{\varepsilon}{3},\ |f(x)-f(\tilde{x})|<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是就有

$$|f_N(x)-f(x)| < |f_N(x)-f_N(\tilde{x})| + |f_N(\tilde{x})-f(\tilde{x})| + |f(\tilde{x})-f(x)| < \varepsilon,$$

且由$f_n(x)$关于n的单调性可知$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$在$n>N$时均成立.

现在，对每个点$\tilde{x}\in[a,b]$，取相应$N(\tilde{x})$及$\delta(\tilde{x})$，注意到$\{(\tilde{x}-\delta(\tilde{x}),\tilde{x}+\delta(\tilde{x}))\}_{x\in[a,b]}$构成$[a,b]$的开覆盖，取其有限子覆盖$\{(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\}_{i=1}^{k}$，其中$x_i$对应$N_i\in\mathbb{N}_+$，并令$N_0=\max\limits_{1\le i\le k}\{N_i\}$，则当$n>N_0$时，对任意$x\in[a,b]$，均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，这即表明$f_n\rightrightarrows f(n\to\infty)$. □

[Remark] 作为推论，Dini定理提供了一个判断正项函数项级数一致收敛的充要条件.

习题 4.2.12. 证明：*Riemann zeta*函数$\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上收敛但不一致收敛，且在$(1,+\infty)$上光滑.

Proof. 自然$\zeta(x)$在$(1,+\infty)$上收敛，但其不一致收敛，否则由习题4.2.9的结果可知其亦在$[1,+\infty)$上一致收敛，但$\zeta(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，矛盾.

现对任意$x>1$，可取$\delta>0$使得$[x-\delta,x+\delta]\subset(1,+\infty)$，易见级数在该区间上一致收敛，而其通项连续，即知$\zeta(x)$处处连续. 接着，对$\zeta(x)$逐项求导得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-\ln n}{n^x}$，对任意$x>1$，仍可取$[x-\delta,x+\delta]\subset(1,+\infty)$，而该级数在区间上一致收敛，于是$\zeta(x)$处处可微，同理即可归纳地证明$\zeta(x)$处处光滑. □

补充习题 4.10. 证明：函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^3}$在$\mathbb{R}$上连续可微.

习题 4.2.13. 设$f(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$，其导数序列$\{f^{(n)}(x)\}$在任意有限区间上一致收敛于$\varphi(x)$，证明：$\varphi(x)=Ce^x$，其中$C$为常数.

Proof. 只需注意在任意有限区间上，函数列$\{f^{(n)}(x)\}$及$\{f^{(n+1)}(x)\}$均一致收敛，于是有

$$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n)}(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x),$$

从而解微分方程即知$\varphi(x)=Ce^x$. □

习题 4.2.14. 考虑函数列$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$，其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数，讨论满足以下条件的$\alpha$的取值范围：

1. $f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$，即关于$n$的极限与关于$x$的积分可交换运算次序.

Solution. 1. 对任意$\alpha\in\mathbb{R}$均有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 求导可知$\max\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}e^{-1}$，故$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛当且仅当$\alpha<1$.

2. 直接计算有

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=n^{\alpha-2}-(n^{\alpha-2}+n^{\alpha-1})e^{-n},$$

由此即知极限与积分可交换当且仅当$\alpha<2$. □

[Remark] 此题给出一例，表明函数列的一致收敛性并不是极限与积分运算交换性的充要条件.

习题 4.2.15. 证明：$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln^2 x}{1-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}$.

Proof. 考虑函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln^2 x$，易见其在$[0,1]$上一致收敛，于是有

$$\int_0^1\frac{\ln^2 x}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\ln^2 x+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln^2 x\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n\ln^2 x\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3},$$

即命题成立. □

习题 4.2.16. [*] 证明：$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Proof. 考虑函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n\ln t$, 对任意$x\in(0,1)$, 可见该级数在$[0,x]$上一致收敛, 于是有

$$\int_0^x \frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^n\ln t\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t.$$

令$u_n(x) = \int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t = x^{n+1}\frac{(n+1)\ln x - 1}{(n+1)^2}$, 求导可知

$$\max_{x\in[0,1]}|u_n(x)| = |u_n(1)| = \frac{1}{(n+1)^2},$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛. 由此可见

$$\int_0^1 \frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to1-0}\int_0^x \frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2},$$

在上式两端加上$\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t$即得命题成立. □

[Remark] 注意此处$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\ln x$在$[0,1]$上不一致收敛（可通过其和函数在$x=1$处不连续看出）, 不能直接应用级数与积分交换进行计算.

补充习题 4.11. [*] 证明：$\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\mathrm{d}t$.

[Hint] 仿照习题4.2.16进行证明. 得到$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\sin(\pi t)}{1-t}\mathrm{d}t$之后作换元即可.

4.3 幂级数与Taylor级数

习题 4.3.1. [*] 设实数列a_n满足$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, 记其部分和序列为$S_n$, 证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|S_n|} = 1$.

Proof. 由条件可知幂级数$\sum\limits_{n}^{\infty} a_nx^n$的收敛半径为1, 现只需证明幂级数$\sum\limits_{n}^{\infty} S_nx^n$的收敛半径也为1, 为此, 先记其收敛半径为$r$. 首先注意到

$$\sum_{n}^{\infty} x^n\cdot\sum_{n}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n}^{\infty} S_nx^n$$

在$x\in(-1,1)$上收敛, 故$r\geq 1$. 接着注意在$\sum\limits_{n}^{\infty} S_nx^n$收敛处,

$$(1-x)\sum_{n}^{\infty} S_nx^n = \sum_{n}^{\infty} a_nx^n$$

亦收敛, 这表明$r\leq 1$. 综上即有$r=1$, 命题成立. □

习题 4.3.2. 计算幂级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$的收敛域, 其中$[\sqrt{n}]$表示$[\sqrt{n}]$的整数部分.

Solution. 易见幂级数收敛半径为1. 在$x=1$处, 由习题4.1.19的结果可知级数收敛. 在$x=-1$处, 考虑

$$\sum_{n}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}(-1)^n}{n}=\sum_{k}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{n\neq k^2}\frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n},$$

上式第一项自然收敛, 而第二项为交错项级数, 由Leibniz判别法即知其亦收敛. 于是, 综上就有幂级数的收敛域为$[-1,1]$. □

补充习题 4.12. 计算幂级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$的收敛域.

[Hint] 答案为$\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$.

习题 4.3.3. 计算幂级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$的收敛域.

Solution. 记级数为$\sum\limits_{k}^{\infty}a_kx^k$, 由

$$\varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}=1$$

即知幂级数收敛半径为1. 易见级数在$x=\pm1$时均收敛, 故收敛域为$[-1,1]$. □

习题 4.3.4. [*] 令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$, 证明: $S(x)$在$[-1,1]$上连续, 在$x=-1$处右可微, 但在$x=1$处左不可微.

Proof. 考虑

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2\ln(1+n)}}=1$$

可知幂级数收敛半径为1, 且易见级数在$x=\pm1$处收敛, 同时通项均为连续函数, 由此可知$S(x)$在$[-1,1]$上连续.

接着逐项求导得到$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$, $x\in(-1,1)$. 其在$x=-1$处收敛, 于是在$[-1,0]$上一致收敛, 从而$S(x)$在$x=-1$处右可微.

下证$S(x)$在$x=1$处左不可微. 否则,

$$S'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{S(x)-S(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}S'(\xi)$$

存在, 其中$\xi\in(x,1)$由Lagrange微分中值定理得到, 则有

$$S'_-(1)\geq\lim_{\xi\to1-0}\sum_{n=1}^{N}\frac{\xi^{n-1}}{n\ln(1+n)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\ln(1+n)}$$

对任意$N\in\mathbb{N}_+$成立, 但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(1+n)}$发散, 矛盾, 因此$S(x)$必定在$x=1$处左不可微. □

习题 4.3.5. 计算幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$的收敛域及和函数.

Solution. 考虑

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{2n+1}{2^{n+1}}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

可知幂级数收敛半径为$\sqrt{2}$, 易见级数收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 现在, 考虑代换$y=\dfrac{x^2}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}&=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}y^n\\&=\frac{y}{(1-y)^2}+\frac{y}{2(1-y)}=\frac{x^2(6-x^2)}{2(2-x^2)},\end{aligned}$$

即和函数为$S(x)=\dfrac{x^2(6-x^2)}{2(2-x^2)}$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. □

[Remark] 对此题, 也可注意到$(2n+1)x^{2n}=(x^{2n+1})'$, 于是逐项积分求和之后再求微分进行计算.

习题 4.3.6. 计算幂级数$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$的收敛域及和函数.

Solution. 考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\Big/\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=1$$

可知幂级数收敛半径为1. 在$x=1$处, 由习题4.1.11的结果可知级数发散, 而在$x=-1$处, 由Leibniz判别法即知级数收敛. 于是, 幂级数的收敛域为$[-1,1)$.

下面先在$(-1,1)$上计算和函数$S(x)$. 逐项求导可得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}nx^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(2n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x),$$

也即在$(-1,1)$上有$S'(x)+\dfrac{1}{2(x-1)}S(x)=0$, 此外有$S(0)=1$, 求解方程即得$S(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. 在$x=-1$处, 由级数在$[-1,0]$上一致收敛, 故$S(x)$连续延拓到$x=-1$处即所求和函数. □

补充习题 4.13. 计算幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛域及和函数.

[Hint] 收敛域为$\mathbb{R}$, 和函数为$\cosh x$. 注意和函数满足微分方程$S'(x)+S(x)=\mathrm{e}^x$.

补充习题 4.14. 计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$的值.

[Hint] 考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$, 其收敛域为$[-1,1]$. 利用逐项微分可知其和函数为

$$S(x)=\int_0^x t\arctan t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-x+\arctan x).$$

取$S(1)=\dfrac{\pi-2}{4}$即得所求值.

习题 4.3.7. 证明：若函数f在$x=0$附近展开为幂级数$1+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$，则函数$\dfrac{1}{f}$也可在$x=0$附近展开为幂级数.

Proof. 按收敛半径估计, 可知存在$r>0$, 使得$|a_n|<r^n(n\in\mathbb{N}_+)$. 待定数列$b_n$, 使得

$$(1+a_1x+\cdots)(1+b_1x+\cdots)=1,$$

展开乘积并按对应次幂项系数相同即得

$$b_1=-a_1,\ b_2=-a_1b_1-a_2,\cdots,b_n=-a_1b_{n-1}-\cdots-a_{n-1}b_1-a_n,\cdots$$

下面归纳地证明b_n有估计$|b_n|<2^{n-1}r^n(n\in\mathbb{N}_+)$.

$n=1$的情形自然成立. 现设命题对$n<k$的情形成立, 对$n=k$的情形有

$$|b_k|\le|a_1b_{k-1}|+\cdots+|a_{k-1}b_1|+|a_k|\le(2^{k-2}+\cdots+1)r^k+r^k=2^{k-1}r^k.$$

由数学归纳法即知估计成立.

现在, 在$|x|<\dfrac{1}{2r}$时幂级数$1+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots$收敛, 从而在$|x|<\min\left\{r,\dfrac{1}{2r}\right\}$时, 就有

$$\frac{1}{1+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}=1+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots,$$

这即表明$\dfrac{1}{f}$在$x=0$附近展开为幂级数$1+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots$. □

[Remark] 利用此题结果可定义幂级数的除法.

习题 4.3.8 (Bernstein定理). [*] 设$f(x)\in C^\infty[-1,1]$, 且当$x\in[-1,1]$时, 总是有$f^{(n)}(x)\ge0(\forall n\in\mathbb{N}_+)$. 证明：函数$f(x)$可在$x\in(-1,1)$上展开为幂级数.

Proof. 考虑f的Taylor展开$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$, 其中余项取积分形式

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(tx)(1-t)^n\mathrm{d}t.$$

按条件f的各阶导数均非负且单调递增, 于是有估计

$$\begin{aligned}0\le R_n(x)&\le\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(t)(1-t)^n\mathrm{d}t\\&=x^{n+1}R_n(1)\\&=x^{n+1}\left(f(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right)\\&\le x^{n+1}f(1),\end{aligned}$$

这表明对$x\in[0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 故$f$的Taylor级数在$[0,1)$上收敛. 利用幂级数收敛域的对称性, 即知该级数在$(-1,1)$上收敛, 也即f在其上可展开为幂级数. □

习题 4.3.9. 计算$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2^n x)}{n!}$在$x=0$处的*Taylor*级数展开以及收敛域.

Solution. 计算可见
$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{nk}\sin\left(2^n x+\frac{k\pi}{2}\right)}{n!}$$
对$x\in\mathbb{R}$均成立（注意一致收敛性），由此Taylor展开式中系数
$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^k)^n}{n!}=\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}\mathrm{e}^{2^k},$$
于是f的Taylor级数为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\mathrm{e}^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$. 此时考虑$\left|\dfrac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}\right|\to+\infty(k\to\infty)$, 即知幂级数收敛半径为0, 也即$f$的收敛域仅含$x=0$. □

习题 4.3.10. 计算$f(x)=\ln^2(1+x)$在$x=0$处的*Taylor*级数展开以及收敛域.

Solution. 利用幂级数乘法直接得到
$$\begin{aligned}\ln^2(1+x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}\right)x^n\\&=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)x^n,\end{aligned}$$
其在$(-1,1)$上收敛. 由$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}=\ln(n-1)+\gamma+o(1)(n\to\infty)$可知级数在$x=1$时收敛（Leibniz判别法），而在$x=-1$时发散, 故相应收敛域为$(-1,1]$. □

补充习题 4.15. 计算$f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$在$x=0$处的*Taylor*级数展开以及收敛域.

[Hint] 利用幂级数相乘的结果可知所得Taylor级数收敛域为$\mathbb{R}$, 级数本身通过直接计算导数可以方便地得到, 答案为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$.

习题 4.3.11. 计算$f(x)=\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$在$x=0$处的*Taylor*级数展开以及收敛域, 其中$\alpha$不为$\pi$的整数倍.

Solution. 考虑待定系数$\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 两端乘上$1-2x\cos\alpha+x^2$并按对应次幂项系数相同可得
$$a_0=0,\ a_1=\sin\alpha,\ \cdots,\ a_n=\sin(n\alpha),\ \cdots,$$
也即f的Taylor级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\sin(n\alpha)$, 相应收敛半径为1, 注意$\alpha$不为$\pi$的整数倍时$\sin(n\alpha)\not\to 0(n\to\infty)$, 即知所求收敛域为$(-1,1)$. □

习题 4.3.12. 计算$f(x)=\arcsin x$在$x=0$处的Taylor级数展开以及收敛域.

Solution. 考虑$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 利用习题4.3.6的结果有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

在$(-1,1)$上收敛, 再逐项积分即得

$$f(x)=\arcsin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{x^3}{6}+\cdots.$$

另外, 利用Wallis公式估计可知级数在$x=\pm1$处收敛, 故收敛域为$[-1,1]$. □

补充习题 4.16. 计算$f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$在$x=0$处的Taylor级数展开以及收敛域.

[Hint] 利用$f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$进行展开. Taylor级数为$2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$, 收敛域为$(-1,1)$.

习题 4.3.13. 计算$f(x)=x^x$在$x=1$处的Taylor级数展开的前三项.

Solution. 考虑

$$\begin{aligned}f(x)&=\exp(x\ln x)\\&=\exp\left((x-1)+\frac12(x-1)^2-\frac16(x-1)^3+\cdots\right)\\&=1+\left[(x-1)+\frac12(x-1)^2-\frac16(x-1)^3\right]+\frac12\left[(x-1)+\frac12(x-1)^2\right]+\frac16(x-1)^3+\cdots\\&=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac12(x-1)^3+\cdots.\end{aligned}$$

接着由$\ln x$的展开式可知上式在$x\in(0,2)$上成立. □

[Remark] 一般地, 若函数$\varphi(y)$在区间$\mathbb{R}$上可展开为Taylor级数（按$x=0$处）, 而函数$y=f(x)$在$(-r,r)$上也可展开为Taylor级数, 则复合函数$\varphi(f(x))$可在$(-r,r)$上展开为Taylor级数.

习题 4.3.14. [∗] 计算$f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$在$x=0$处的Taylor级数展开以及收敛域, 其中$\mu\in\mathbb{R}$为常数.

Solution. 计算有$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+\mu^2f(x)=0$, 应用Leibniz公式得到

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xy^{(n+1)}-(n^2-\mu^2)f^{(n)}(x)=0,$$

于是$f^{(n+2)}(0)=(n^2-\mu^2)f^{(n)}(0)(\forall n\in\mathbb{N})$, 特别$f(0)=0$, $f'(0)=\mu$, 由此即得

$$f(x)=\mu x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu(1-\mu^2)\cdots[(2n-3)^2-\mu^2]}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

按sin（在$\mathbb{R}$上可展开为Taylor级数）与arcsin（在$(-1,1)$上可展开为Taylor级数, 见习题4.3.12）的复合可见上式在$(-1,1)$上收敛, 而在$x=\pm1$处, 由Raabe判别法即知级数亦收敛, 于是所求收敛域为$[-1,1]$. □

习题 4.3.15. [*] 计算$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$在$x=0$处的Taylor级数展开，其中$0<t<1$为常数.

Solution. 利用习题4.3.6的结果，其中注意$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$，可得

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2tx-x^2)^n=1+\frac{1}{2}(2tx-x^2)+\frac{3}{8}(2tx-x^2)^2+\cdots,$$

上式在$|2tx-x^2|<1$时收敛. 现在，上式中能产生x^n的项为

$$\frac{(2n-2k)!}{2^{2(n-k)}[(n-k)!]^2}(2tx-x^2)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

进而其中x^n项的系数为

$$\frac{(2n-2k)!(-1)^k}{2^{2(n-k)}[(n-k)!]^2}\begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}(2t)^{n-2k}=\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n(n-k)!k!(n-2k)!}t^{n-2k},$$

由此f的Taylor级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n$，其中

$$P_n(t)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n(n-k)!k!(n-2k)!}t^{n-2k}$$

为t的多项式. □

[Remark] 此处的$P_n(t)$即Legendre多项式，其满足

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(t^2-1)^n](\forall n\in\mathbb{N}).$$

补充习题 4.17 (Bonnet递归公式). [*] [*] 同上设Legendre多项式，证明：

$$(n+1)P_{n+1}(t)=(2n+1)tP_n(t)-nP_{n-1}(t),\ \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

[Hint] 在习题4.3.15中对$f(x)$求微分，相应对级数逐项求导.

习题 4.3.16. 计算$f(x)=e^{x^2}$的各阶导数.

Solution. 任取（充分小的）$h>0$，考虑

$$\mathrm{e}^{(x+h)^2}-\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{2xh+h^2}-1)=e^{x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2xh+h^2)^n}{n!}\right).$$

上式中h^n的系数为

$$\mathrm{e}^{x^2}\left[\frac{(2x)^n}{n!}+\frac{n(n-1)}{n!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!2!}(2x)^{n-4}+\cdots\right],$$

其中$2x$的指数相继减2直到0或1，令上式乘$n!$即得$f^{(n)}(x)$的表达式. □

补充习题

补充习题 4.18. 证明若正项级数$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$收敛, 则$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n^2$亦收敛, 但反之不然.

补充习题 4.19. [*] [*] 考虑正项级数$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$, 记其部分和序列为$\{S_n\}$, 余项序列为$\{R_n\}$, 证明:

1. *(**Abel-Dini**)*若$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$发散, 则$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散, 但$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$收敛, 其中$\alpha>0$为常数.
2. *(**Dini**)*若$\sum\limits_{n}^{\infty}a_n$收敛, 则$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}}$发散, 但$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{1-\alpha}}$收敛, 其中$0<\alpha<1$为常数.

[Hint] 利用Cauchy收敛准则判断$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$与$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}}$的收敛性. 对$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$, 关键是作估计

$$\frac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{1+\alpha}}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{\xi_n^{1+\alpha}}\le\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{S_n^{\alpha}}\right),$$

其中ξ_n满足$\dfrac{S_n-S_{n-1}}{\xi_n^{1+\alpha}}=\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}}$来自积分中值定理, 而对$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{1-\alpha}}$, 类似估计

$$\frac{a_n}{R_{n-1}^{1-\alpha}}=\frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^{1-\alpha}}\le\frac{R_{n-1}-R_n}{\xi_n^{1-\alpha}}\le\frac{1}{\alpha}\left(R_{n-1}^{\alpha}-R_n^{\alpha}\right),$$

其中类似地, ξ_n满足$\dfrac{R_{n-1}-R_n}{\xi_n^{1+\alpha}}=\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}}$来自积分中值定理, 接着应用比较判别法即可.

补充习题 4.20. [*] 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$收敛, 证明: 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n}$亦收敛.

[Hint] 不妨设$\{a_n\}$单调递增（否则作适当重排）, 于是

$$a_1+\cdots+a_{2n-1}\ge a_n+\cdots+a_{2n-1}\ge na_n,$$

记$b_n=\dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n}$, 估计得到$b_{2n-1},b_{2n}<\dfrac{2}{a_n}$, 由比较判别法即知命题成立.

补充习题 4.21. 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$的敛散性, 其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

[Hint] 注意不等式$n-1\le\ln(n!)\le(n-1)\ln n$. $\alpha>2$时级数收敛, 否则级数发散.

补充习题 4.22. 设$\lambda_n, n=1,2,\cdots$依次为方程$\tan x=x$从小到大的各正数解, 判断级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n^2}$的敛散性.

[Hint] 注意对λ_n的取值范围作估计. 级数收敛.

补充习题 4.23. [*] 考虑改变调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$中各项的符号（但不改变各项顺序）, 使得$p$个正项和$q$个负项交替出现, 证明: 所得级数收敛, 当且仅当$p=q$.

[Hint] $p\ne q$时将级数每$p+q$项结合起来得到定号级数, $p=q$时结合相邻同号项并应用Leibniz判别法.

补充习题 4.24. [*] 判断下列级数敛散性：

1. $\sum\limits_{n}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n^n}{e^n n!}$.
2. $\sum\limits_{n}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

[Hint] 利用Sapagov定理（习题4.1.5）可判断两个级数通项绝对值均为无穷小量, 再应用Leibniz判别法即知两个级数均收敛. 对于通项绝对值, 利用Stirling公式进行估计, 可知两个级数均条件收敛.

补充习题 4.25. [*] [*] 讨论级数$\sum\limits_{n}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!n^q}$的敛散性, 其中$p, q \in \mathbb{R}$为参数, p不为负整数.

[Hint] 与习题4.1.10类似进行估计. 级数在$q > p+1$时绝对收敛, $p < q \le p+1$时条件收敛, $q \le p$时发散.

补充习题 4.26. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$的敛散性.

[Hint] 级数条件收敛.

补充习题 4.27. [*] 在以下条件下证明级数$\sum\limits_{n}^{\infty} a_n b_n$收敛：

1. *(Du Bois-Reymond)* $\sum\limits_{n}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛, 且$\sum\limits_{n}^{\infty} b_n$收敛.
2. *(Dedekind)* $\sum\limits_{n}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 且$\sum\limits_{n}^{\infty} b_n$的部分和序列有界.

[Hint] 利用Cauchy收敛准则证明, 其中需要用到Abel变换.

补充习题 4.28. 判断函数列$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$在$[0, +\infty)$上的敛散性.

[Hint] 分$0 \le x \le 1$及$x \ge 1$的情况讨论. 函数列一致收敛.

补充习题 4.29. [*] 证明：函数列$f_n(x) = n^2\left(e^{\frac{1}{nx}} - 1\right)\sin\dfrac{1}{nx}$在$[1, \infty)$上一致收敛, 在$(0, +\infty)$上不一致收敛.

[Hint] $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x^2}$. 注意$f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n^2(e-1)\sin 1$即可证明函数列在$(0, +\infty)$上不一致收敛. 关于函数列在$[1, +\infty)$上的一致收敛性, 利用Taylor展开的Lagrange余项形式来估计$|f_n(x) - f(x)|$.

补充习题 4.30. 判断级数$\sum\limits_{n}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{1}{3^n x}$在$(0, +\infty)$上的敛散性.

[Hint] 易见级数处处绝对收敛, 但级数通项并不一致趋于0, 故级数不一致收敛.

补充习题 4.31. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)\cdots(1+nx)}$在$[0, \delta]$及$[\delta, +\infty)(\delta > 0)$上的敛散性.

[Hint] 和函数$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ 级数在$[0, \delta]$上不一致收敛, 在$[\delta, +\infty)$上一致收敛.

补充习题 4.32. 设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上可微，$f(0)=0$，且有

$$f'(x)\geq 0,\ x\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

证明：级数$\sum\limits_{n}^{\infty}(-1)^n f(x^n)$在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上一致收敛.

[Hint] 利用Dirichlet判别法.

补充习题 4.33. 考虑级数$\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$，讨论其收敛域及和函数的可微性.

[Hint] 级数在$\mathbb{R}$上收敛，且在除了$x=0$处外均可微. 其中利用级数通项为偶函数可分左右区间讨论，逐项求导并逐项取极限可得和函数在$x=0$处的右导数$\dfrac{\pi^2}{6}$，左导数自然为其相反数$-\dfrac{\pi^2}{6}$，而该值不为0则表明和函数在$x=0$处导数不存在.

补充习题 4.34. [*] 证明：$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

[Hint] 利用$\dfrac{1}{x^x}=\mathrm{e}^{-x\ln x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$在$[0,1]$上一致收敛.

补充习题 4.35. 计算$f(x)=\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$在$x=0$处的*Taylor*级数展开以及收敛域.

[Hint] 计算导数得到Taylor级数的表达式$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$，其中可仿照习题4.3.14使用Leibniz法则简化计算. 利用幂级数乘法的结论可知级数在$(-1,1)$上收敛，最后得到收敛域为$[-1,1]$.

补充习题 4.36. 计算$f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}$的*Taylor*级数展开前四项.

[Hint] 先对$f'(x)$展开再逐项积分，其中$f'(t)$的展开可应用习题4.3.7的结果. 答案为

$$f(x)=x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}+\cdots.$$

补充习题 4.37. [*] [*] 证明函数项级数

$$x=\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\sin^{2n+1}x$$

在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上一致收敛，并计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，以及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

[Hint] 利用习题4.3.12的结果. 对所得等式两端在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上积分可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$. 最后分奇偶项计算可以得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

5　广义积分与含参变量的积分

5.1　广义积分及其审敛

习题 5.1.1. 设$f(x)$在$[a,b]$上无界, 广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛, 该值是否为Riemann和的极限?

Solution. $f(x)$的Riemann和极限不存在. 否则, 设极限为I, 则对任意$\varepsilon>0$, 均存在$\delta>0$, 使得$[a,b]$的划分$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$满足$|\Delta|<\delta$时, 对任意介值的选取均有

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<I+\varepsilon,$$

但由$f(x)$无界, 其至少在某个区间$[x_{i-1},x_i]$上无界, 取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$使得$f(\xi_i)$充分大, 即有上式不成立, 由此矛盾. □

补充习题 5.1. 设$f(x)$在$(0,1]$上单调, 且在$x=0$处无界. 证明：若广义积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$收敛, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

[Hint] 注意由单调性得到不等式

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中不妨设$f(x)$单调递减, 接着累加并令$n\to\infty$即可.

习题 5.1.2. 设$f(x)$在$[a,+\infty)(a\in\mathbb{R})$上一致连续, 且广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Proof. 否则, 若有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 则存在$\varepsilon_0>0$, 使得对任意$A>a$, 均存在$x_0>A$, 使得$|f(x_0)|>2\varepsilon_0$. 由$f(x)$的一致连续性, 可取$\delta>0$, 使得当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时$|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon_0$, 由此

$$|f(x)|\ge|f(x_0)|-|f(x_0)-f(x)|>\varepsilon_0,$$

且$f(x)$与$f(x_0)$同号. 于是有

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x\right|\ge\varepsilon_0\delta.$$

注意上式右端为取定的正数, 由Cauchy收敛准则即知广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散, 矛盾. □

补充习题 5.2. 设$f(x)$在$x\to+\infty$时有极限, 且广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(a\in\mathbb{R})$收敛, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

习题 5.1.3. 设$f(x)$在$[a,+\infty)(a\in\mathbb{R})$上单调, 且广义积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0.$$

Proof. 不妨设$f(x)$单调递减, 此时欲使广义积分收敛, 则必有$f(x)$非负. 现由Cauchy收敛准则, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$A>a$, 使得当$x>A$时有

$$0\le xf(2x)\le\left|\int_x^{2x}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

这即表明$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$. □

补充习题 5.3. 设$f(x)$在$[a,+\infty)(a\in\mathbb{R})$上单调且非负, 广义积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}x^pf(x)\mathrm{d}x(p\ge0)$收敛, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{p+1}f(x)=0.$$

习题 5.1.4. 判断广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$的敛散性.

Solution. 只需注意对任意$k\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{16},$$

由Cauchy收敛准则即知广义积分发散. □

补充习题 5.4. 判断广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}$的敛散性.

[Hint] 估计

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}\le k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2x}\le\cdots=O^*\left(\frac{1}{k^2}\right),\ k\to\infty,$$

由$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty$即知广义积分收敛.

习题 5.1.5. 讨论广义积分$\displaystyle\int_0^1|\ln x|^\alpha\mathrm{d}x$的敛散性, 其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 当$\alpha=0$时积分自然收敛.

当$\alpha>0$时, 瑕点为$x=0$, 此时由$\displaystyle\lim_{x\to0+0}x^{\frac{1}{2}}|\ln x|^\alpha=0$可知广义积分收敛.

当$\alpha<0$时, 瑕点为$x=1$, 此时由

$$|\ln x|^\alpha=|\ln[1-(1-x)]|^\alpha=O^*((1-x)^\alpha),\ x\to1-0,$$

即知广义积分在$-1<\alpha<0$时收敛, 否则广义积分发散. □

补充习题 5.5. 判断广义积分$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$的敛散性.

[Hint] 注意$x=0$与$x=\pi$均为瑕点, 需要分别估计量级. 广义积分收敛.

习题 5.1.6. 讨论广义积分$\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^{\alpha}\ln\frac{2+x}{1+x}\mathrm{d}x$的敛散性, 其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 只需注意

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^{\alpha}\ln\frac{2+x}{1+x}=O^*\left(\frac{1}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}\right),\ x\to+\infty,$$

即知广义积分在$\alpha>0$时收敛, 否则广义积分发散. □

习题 5.1.7. 讨论广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$的敛散性, 其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 考虑

$$\ln\cos\frac{1}{x}=\ln\left(1-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),\ x\to+\infty$$

由此可知

$$\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^{\alpha}}=O^*\left(\frac{1}{x^{2+\alpha}}\right),\ x\to+\infty,$$

故广义积分在$\alpha>-1$时收敛, 否则广义积分发散. □

补充习题 5.6. 判断广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$的敛散性.

[Hint] 广义积分收敛.

习题 5.1.8. 讨论广义积分$\displaystyle\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x$的敛散性, 其中$p,q\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. $x=0$与$x=1$均为瑕点, 为此拆分

$$\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x=:I_1+I_2.$$

对I_2, 由$x^p\ln^q\dfrac{1}{x}=O^*((1-x)^q)(x\to1-0)$即知其在$q>-1$时收敛, 否则$I_2$发散.

下设$q>-1$, 对I_1如下讨论：当$p<0$, 或$p=0$而$q>0$时, $x=0$为瑕点. 在$p>-1$时, 任取$\mu>0$充分小, 使得$p-\mu>-1$, 由

$$\lim_{x\to0+0}\left(x^p\ln^q\frac{1}{x}\right)\Big/\left(\frac{x^p}{x^{\mu}}\right)=0$$

即知I_1收敛, 特别地其在$p>-1$时均收敛. 当$p\le-1$时, 考虑

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x\ge\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-1}\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty,$$

即知积分发散.

综上所述, 广义积分在$p,q>-1$时收敛, 否则广义积分发散. □

习题 5.1.9. 讨论广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 当$\alpha\le 0$时，对任意$k\in\mathbb{N}_+$，均有

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x\ge(2k\pi)^{-\alpha}\cdot 2\ge 2,$$

故由Cauchy收敛准则即知广义积分发散.

当$0<\alpha\le 1$时，$x=0$不为瑕点，此时注意$\left|\displaystyle\int_0^A\sin x\mathrm{d}x\right|\le 2$对任意$A>0$成立，$\dfrac{1}{x^\alpha}$在$[0,+\infty)$上单调递减趋于0，由Dirichlet判别法即知广义积分收敛. 接着考虑

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x\ge\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x,$$

其中第一项发散，第二项收敛（类似使用Dirichlet判别法），由此可知原广义积分条件收敛.

当$\alpha>1$时，$x=0$为瑕点，为此拆分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x=:I_1+I_2.$$

其中对I_1，由$\dfrac{\sin x}{x^\alpha}=O^*(x^{1-\alpha})$可知其在$1<\alpha<2$时（绝对）收敛，否则$I_1$发散. 对$I_2$，注意$\left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right|\le\dfrac{1}{x^\alpha}$即知其绝对收敛.

综上所述，原广义积分在$0<\alpha\le 1$时条件收敛，在$1<\alpha<2$时绝对收敛，否则广义积分发散. □

补充习题 5.7. 讨论广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

[Hint] 作代换$t=x^2$后应用习题5.1.9的结果. 广义积分在$1<\alpha<3$时绝对收敛，在$-1<\alpha\le 1$时条件收敛，否则广义积分发散.

习题 5.1.10. 讨论广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha\in\mathbb{R}$为参数.

Solution. 当$\alpha\le 0$时，对任意$k\in\mathbb{N}_+$，均有

$$\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\mathrm{d}x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{16},$$

由Cauchy收敛准则即知广义积分发散.

当$\alpha>0$时，考虑

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}=\frac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{1+\frac{\sin x}{x^\alpha}}&=\frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)\\&=\frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{1}{2x^{2\alpha}}+\frac{\cos(2x)}{2x^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right),\ x\to+\infty,\end{aligned}$$

对各项分别分析，结合习题5.1.9的结果即知广义积分在$\dfrac{1}{2}<\alpha\le 1$时条件收敛，在$\alpha>1$时绝对收敛，否则广义积分发散. □

习题 5.1.11. 计算广义积分$\int_0^1 \ln^n x\mathrm{d}x$, 其中$n \in \mathbb{N}_+$为常数.

Solution. 由习题5.1.5可知该广义积分收敛. 记题述积分为I_n, 则有

$$I_n = x\ln^n x\Big|_{0+0}^1 - \int_0^1 n\ln^{n-1} x\mathrm{d}x = -nI_{n-1},$$

于是归纳即知$I_n = (-1)^n n!$. □

补充习题 5.8. 计算广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n+1} x}$, 其中$n \in \mathbb{N}_+$为常数.

[Hint] 记题述积分为I_n, 通过分部积分可以得到递推公式

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

也即$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 答案为$\frac{(n-1)!!}{n!!}I$, 其中$n$为偶数时$I = \frac{\pi}{2}$, n为奇数时$I = 1$.

习题 5.1.12 (Euler积分). 计算广义积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x$.

Solution. 易见广义积分收敛. 记题述积分值为I, 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin x + \ln\cos x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\ln\sin(2x) - \ln 2]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I - \frac{\pi\ln 2}{4}, \end{aligned}$$

由此即知$I = -\frac{\pi\ln 2}{2}$. □

补充习题 5.9. 计算广义积分$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$, 其中$a, b \in \mathbb{R}(a > 0)$为常数.

[Hint] 答案为$\frac{a}{a^2+b^2}$.

习题 5.1.13 (Froullani积分). [∗] 设$f(x)$在$[0, +\infty)$上连续, $f(0) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$, 对$0 < a < b$, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\mathrm{d}x.$$

Solution. 取定$0 < r < R$, 考虑

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= f(\xi_r)\ln\frac{b}{a} - f(\xi_R)\ln\frac{b}{a}, \end{aligned}$$

其中$\xi_r \in (ar, br)$与$\xi_R \in (aR, bR)$由积分第一中值定理得到, 现在, 令$r \to 0+0$及$R \to +\infty$, 即有所求积分值为$(A - B)\ln\frac{b}{a}$. □

5.2 含参变量的广义积分及其审敛

习题 5.2.1. 设$f(x)\in C[0,1]$, 讨论函数$F(t)=\displaystyle\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x$在$t\in\mathbb{R}$上的连续性.

Solution. 容易看到$\dfrac{tf(x)}{x^2+t^2}$在任意$t\neq 0, x\in[0,1]$处连续, 故$F(t)$在$t\neq 0$处连续.

在$t=0$处, 考虑

$$\int_0^{t^{\frac{1}{3}}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x = f(\xi)\arctan\frac{t^{\frac{1}{3}}}{t} \to \frac{\pi f(0)}{2},\ t\to 0+0,$$

其中$\xi\in(0,t^{\frac{1}{3}})$由积分第一中值定理得到, 同时有

$$\left|\int_{t^{\frac{1}{3}}}^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\right| \leq \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|\frac{t}{t^{\frac{2}{3}}+t^2}\to 0,\ t\to 0+0.$$

于是$\displaystyle\lim_{t\to 0+0}F(t)=\frac{\pi f(0)}{2}$, 类似有$\displaystyle\lim_{t\to 0-0}F(t)=-\frac{\pi f(0)}{2}$. 由此可知$F(t)$在$t=0$处连续, 当且仅当$f(0)=0$. □

补充习题 5.10. 计算极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

[Hint] 将$\dfrac{1}{n}$连续化为参变量计算. 答案为$\ln\dfrac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.

习题 5.2.2 (Poisson积分). [*] 计算$\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x$, 其中$a\geq 0$为参数.

Solution. 记所求积分值为$I(a)$, 自然$I(0)=0$. 在$0<a<1$时, 求导得到

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x+a^2}\\
&= \frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2}}=0.
\end{aligned}$$

由此$I(a)=0, a\in[0,1)$. 在$a=1$处, 计算有

$$\int_0^{\pi}\ln(2-2\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(2\ln 2+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln 2-2\pi\ln 2=0,$$

其中利用Euler积分的结果（习题5.1.12）. 在$a>1$时, 考虑

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x\\
&= 2\pi\ln a+\int_0^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln a+I\left(\frac{1}{a}\right),
\end{aligned}$$

即知$I(a)=2\pi\ln a, a\in[1,+\infty)$. □

[Remark] 注意上题中$a=1$时积分为广义积分, 不能直接交换积分与求导.

补充习题 5.11. 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin^2\theta + x^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$, 其中$x > 0$为参数.

[Hint] 考虑对x在积分号内求导计算后再积分. 答案为$\pi\ln\dfrac{1+x}{2}$.

习题 5.2.3. 计算$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Solution. 引入参变量$a \in [0,1]$, 构造

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

自然$I(0) = 0$. 求导得到

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ax)}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a^2}\left[\frac{a\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(1+a)\right].$$

由此有

$$\begin{aligned} I(1) = I(0) + \int_0^1 I'(a)\mathrm{d}a &= \int_0^1 \frac{1}{1+a^2}\left[\frac{a\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln(1+a)\right]\mathrm{d}a \\ &= \frac{\pi\ln 2}{4} - I(1), \end{aligned}$$

从而所求值为$I(1) = \dfrac{\pi\ln 2}{8}$. □

习题 5.2.4. 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos x}\ln\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\mathrm{d}x$, 其中$|\alpha| < 1$为参数.

Solution. 记所求积分值为$I(a)$, 考虑

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x} = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x} \\ &= \int_{-a}^{a}\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^a \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \arctan\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)\mathrm{d}y \\ &= \pi\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \pi\arcsin a. \end{aligned}$$

即$I(a) = \pi\arcsin a$. □

补充习题 5.12. 计算$\int_0^1 \dfrac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$, 其中$a, b > 0$为参数.

[Hint] 考虑$\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\mathrm{d}y$, 由此利用交换积分次序来计算. 也可作代换$t = \ln x$, 并利用Froullani积分（习题5.1.13）的结果计算. 答案为$\ln\dfrac{b+1}{a+1}$.

习题 5.2.5. 判断含参广义积分$\int_1^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2\right)\mathrm{d}x$在$y\in(0,1)$上的一致收敛性.

Solution. 对任意$\varepsilon>0$, 往证存在$M>1$, 使得$\int_M^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2\right)\mathrm{d}x<\varepsilon$对任意$y\in(0,1)$均成立: 为此考虑代换$x-\frac{1}{y}=t$, 则有

$$\int_M^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2\right)\mathrm{d}x=\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{y^2}\right)\mathrm{d}t.$$

当y充分小时, 估计有

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{y^2}\right)\mathrm{d}t=y\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{y^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)\leq y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=y\sqrt{\pi}<\varepsilon,$$

也即只需$0<y<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$. 而在$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leq y<1$时, 取$M>M_0+\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}$（待定$M_0$）, 则有

$$\int_{M-\frac{1}{y}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{y^2}\right)\mathrm{d}t\leq\int_{M_0}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{y^2}\right)\mathrm{d}t\leq y\int_{M_0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u<\varepsilon,$$

其中取M_0充分大即可. 综上即知原广义积分一致收敛. □

[Remark] 此题给出一例, 说明一致收敛的含参广义积分不一定可以由Weierstrass判别法审敛.

习题 5.2.6. 判断含参广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x$在$a\in[b_0,b]$与$(0,b]$上的一致收敛性, 其中$0<b_0<b$.

Solution. 在$[b_0,b]$上, $\frac{1}{x}\to0(x\to+\infty)$与$a$无关, 且对任意$M>0$有

$$\left|\int_1^M\sin(ax)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{a}|\cos a-\cos(aM)|\leq\frac{2}{a},$$

由Dirichlet判别法即知广义积分一致收敛.

在$(0,b]$上, 若广义积分一致收敛, 则对任意$\varepsilon>0$, 应存在$M>0$, 使得$\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\ a\in(0,b]$, 但考虑

$$\lim_{a\to0}\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x\right|=\lim_{a\to0}\left|\int_{Ma}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|=\frac{\pi}{2},$$

这表明广义积分不一致收敛. □

[Remark] 注意其中Dirichlet积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

补充习题 5.13. 判断含参广义积分$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\mathrm{d}x$在$p\in[p_0,+\infty)(p_0>0)$与$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

[Hint] 在$[p_0,+\infty)$上由Weierstrass判别法即知广义积分一致收敛. 在$(0,+\infty)$上, 估计$x=0$附近的积分值可得广义积分不一致收敛.

补充习题 5.14. 判断含参广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$在$\alpha\in[\alpha_0,+\infty)(\alpha_0>0)$与$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

[Hint] 在$[\alpha_0,+\infty)$上利用Dirichlet判别法即知广义积分一致收敛. 而在$(0,+\infty)$上, 注意$\alpha=0$时广义积分发散即知其不一致收敛.

[Remark] 回忆习题4.2.9.

习题 5.2.7. 判断含参广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$在$t\in(0,+\infty)$上的一致收敛性, 其中$a>0$为参数.

Solution. 往证广义积分不一致收敛：否则, 考虑

$$\frac{\sin tx}{x}=\frac{x\sin(tx)}{a^2+x^2}\cdot\frac{a^2+x^2}{x^2},$$

注意$\left|\dfrac{a^2+x^2}{x^2}\right|\leq 1+a^2$, 且$\dfrac{a^2+x^2}{x^2}$关于$x$单调, 由Abel判别法可知$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$在$t\in(0,+\infty)$上一致收敛, 这与习题5.2.6的结果矛盾. □

习题 5.2.8. 讨论函数$F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$在$(2,+\infty)$上的连续性.

Solution. 任取$\delta>0$, 考虑$\alpha\in(2+\delta,+\infty)$时有

$$\left|\frac{x}{2+x^\alpha}\right|\leq\frac{1}{x^{1+\varepsilon}},\ x\in[1,+\infty),$$

由Weierstrass判别法可知$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$在$\alpha\in(2+\delta,+\infty)$上一致收敛, 由此相应在$(0,+\infty)$上的广义积分亦一致收敛, 于是$F(\alpha)$在$[2+\varepsilon,+\infty)$上连续, 进而在$(2,+\infty)$上连续. □

[Remark] 回忆习题4.2.12.

补充习题 5.15. 讨论函数$F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x$在$(0,2)$上的连续性.

[Hint] 首先对函数进行处理,

$$F(\alpha)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x=2\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x+2\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\mathrm{d}x,$$

其中仅有第一项可能为广义积分. 利用Weierstrass判别法可知其内闭一致收敛, 进而即知$F(\alpha)$在$(0,2)$上连续.

补充习题 5.16. 讨论函数$F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\mathrm{d}x$在$(0,1)$上的连续性.

[Hint] 注意广义积分有无穷个瑕点, 为此, 首先对函数进行处理,

$$F(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x,$$

而后应用Weierstrass判别法可知其内闭一致收敛. $F(\alpha)$在$(0,1)$上连续.

习题 5.2.9. 证明：函数$F(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x$在$\mathbb{R}\setminus\{0\}$上可微，但不能在积分号内求导计算.

Solution. 直接计算得到$F(a)=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a$，自然其在$\mathbb{R}\setminus\{0\}$上可微.

而如果在积分号内求导，可见$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos(ax)\mathrm{d}x$发散. □

习题 5.2.10. 证明函数

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{t}\cos(bt)\mathrm{d}t$$

在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$上可微，并计算$F(a)$，其中$b\neq 0$为参数.

Solution. 首先注意

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{t}\cos(bt)=a,$$

故$t=0$不为瑕点，被积函数在连续延拓的意义下为$[0,+\infty)^2$上的连续函数.

考虑$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(bt)}{t}\mathrm{d}t$收敛（应用Dirichlet判别法）且与$a$无关，同时$|1-\mathrm{e}^{-at}|\le 2$且$1-\mathrm{e}^{-at}$关于$t$单调，故由Abel判别法即知$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{t}\cos(bt)\mathrm{d}t$在$a\in[0,+\infty)$上一致收敛，进而连续. 而$\displaystyle\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{t}\cos(bt)\mathrm{d}t$为常义积分，易见其关于$a$连续. 于是$F(a)$在$[0,+\infty)$上连续.

接着被积函数对a求导得到$\mathrm{e}^{-at}\cos(bt)$，任取$\delta>0$，注意

$$|\mathrm{e}^{-at}\cos(bt)|\le\mathrm{e}^{-\delta t},\ t\in(0,+\infty),$$

由Weierstrass判别法可知$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos(bt)\mathrm{d}t$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛，进而即知$F(a)$在$(0,+\infty)$上可微.

现在，计算有

$$F'(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos(bt)\mathrm{d}t=\frac{a}{a^2+b^2},$$

同时可见$F(0)=0$，即得$F(a)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a^2+b^2}{b^2}$. □

习题 5.2.11. 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\mathrm{d}x$，其中$a\ge 0,b>0$为参数.

Solution. 当$a=0$时，计算有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{b}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(bt)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{2\ln b}{b}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+\frac{2}{b}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln b}{b},\end{aligned}$$

其中注意由对称性得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t=0.$$

当$a>0$时, 记所求积分值为$I(a)$, 被积函数对a求导得到$\dfrac{2a}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}$, 利用Weierstrass判别法可以证明$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2a\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}$在$a\in(0,+\infty)$上内闭一致收敛, 由此在积分号内求导计算有

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{2a\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}=\frac{\pi}{b(a+b)},$$

于是$I(a)=\dfrac{\pi}{b}\ln(a+b)+C(b)$, 其中$C(b)$为与$b$相关的常数. 特别计算有

$$I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(b^2+x^2)}{b^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(b^2\sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{b}\ln(2b),$$

故$C(b)=0$. 从而所求积分值为$I(a)=\dfrac{\pi}{b}\ln(a+b)$, $a=0$时也成立. □

补充习题 5.17. 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)\mathrm{d}x$, 其中$a>0,b\in\mathbb{R}$为参数.

[Hint] 将积分值看作参数b的函数$I(b)$. 利用Gauss积分（习题1.1.9）计算$I(0)$的值. 一般情况对b在积分号内求导得到$I(b)$满足的微分方程, 连同$I(0)$的值给出初值问题, 求解即得. 答案为$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}$.

习题 5.2.12 (Laplace积分). [*] [*] 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 其中$a>0$为参数.

Solution. 考虑广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{e}^{-\delta(1+x^2)}\mathrm{d}x$, 原积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛（应用Dirichlet判别法）且与$\delta$无关, 而$\mathrm{e}^{-\delta(1+x^2)}$关于$x$单调有界, 于是前述广义积分在$\delta\in[0,+\infty)$上一致收敛. 于是考虑

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{\delta\to0+0}\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{e}^{-\delta(1+x^2)}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{\delta\to0+0}\int_0^{+\infty}\cos ax\left(\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\right)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{\delta\to0+0}\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\cos(ax)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4y}}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}\exp\left(-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi\mathrm{e}^{-a}}{2},
\end{aligned}$$

其中应用补充习题5.17以及补充习题5.30的结果, 另外积分可交换次序验证如下：

由Weierstrass判别法可知广义积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\cos(ax)\mathrm{d}x,\quad\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\cos(ax)\mathrm{d}y$$

分别关于$y\in[\delta,+\infty)$及$x\in[0,+\infty)$一致收敛, 而

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\delta^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\cos(ax)\right|\mathrm{d}y\le\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

上式右端收敛. □

习题 5.2.13 (Bohr-Mollerup定理). [*] 设定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：

1. $f(x)>0(x>0)$, 且$f(1)=1$,
2. $f(x+1)=xf(x)(x>0)$,
3. $\ln f(x)$为$(0,+\infty)$上的下凸函数.

证明：$f(x)\equiv\Gamma(x)$, 即以上三条性质完全刻画*Gamma*函数.

Proof. $\Gamma(x)$自然满足三条性质，往证三条性质确定的函数唯一，特别由第二条性质，只需证明$x\in(0,1)$上函数唯一：令$\varphi(x)=\ln f(x)$, 则有

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\ln x,\ x>0,$$

且$\varphi(1)=0$, $\varphi(x)$下凸. 现考虑$x\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}\ln n=\varphi(n+1)-\varphi(n)&\le\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}\\&\le\varphi(n+2)-\varphi(n+1)=\ln(n+1).\end{aligned}$$

将$\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\ln[x(x+1)\cdots(x+n)]$代入上式得到

$$0\le\varphi(x)-\ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)\le x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

令$n\to\infty$, 即得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

此即$\Gamma(x)$的Gauss无穷乘积展开. □

[Remark] 上述Gamma函数的Gauss无穷乘积展开可如下证明：考虑代换$t=\ln\dfrac{1}{s}$有

$$\begin{aligned}\Gamma(x)&=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{x-1}\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\left[\lim_{n\to\infty}n\left(1-s^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{x-1}\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[n\left(1-s^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{x-1}\mathrm{d}s\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1[n(1-u)]^{x-1}nu^{n-1}\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

之后反复应用分部积分即可.

补充习题 5.18 (Legendre加倍公式). [*] 证明：$\Gamma(2x)=\dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, $x>0$.

[Hint] 考虑令

$$f(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right),$$

验证$f(x)$满足Bohr-Mollerup定理（习题5.2.13）的三条性质, 则有$f(x)=\Gamma(x)$, 再将x换为$2x$即可.

习题 5.2.14. 讨论含参广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$的敛散性，并应用*Euler*积分计算其值.

Solution. 记积分为I. 作代换$x^n=t$得到

$$I=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

估计被积函数在瑕点$x=0$及$x\to+\infty$的渐近性态即知广义积分在$0<m<n$时收敛. 接着有

$$I=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(1-\frac{m}{n},\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

其中利用Dirichlet公式以及余元公式. □

补充习题 5.19. [∗] 讨论含参广义积分$\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\mathrm{d}t(0<a<b,c>0)$的敛散性，并应用*Euler*积分计算其值，其中$m,n\in\mathbb{N}$为参数.

[Hint] 广义积分在$m,n>-1$时收敛. 而后变量代换计算得到

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{b-a}\int_0^1\frac{t^m(1-t)^n}{(t+\lambda)^{m+n+2}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{b-a}\int_0^1\left(\frac{\tau}{1+\lambda}\right)^m\left(\frac{1-\tau}{\lambda}\right)^n\frac{\mathrm{d}\tau}{\lambda(1+\lambda)}\\
&=\frac{1}{(b-a)(1+\lambda)^{m+1}\lambda^{n+1}}\mathrm{B}(m+1,n+1)\\
&=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}\cdot\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.
\end{aligned}$$

其中$\lambda=\frac{a+c}{b-a}$.

习题 5.2.15. 证明：*Riemann zeta*函数可表示为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x,\ s>1.$$

Proof. 考虑$\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}(x>0)$, 则对任意$A>0$有

$$\int_0^A\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^A x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x.$$

对给定的$s>1$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-nx}$在$x\in[0,+\infty)$上一致收敛, 于是有

$$\int_0^A\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^A x^{s-1}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{nA}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

该级数对$A\in[0,+\infty)$一致收敛, 于是令$A\to+\infty$即得命题成立. □

补充习题

补充习题 5.20. 设$f(x)$在$[a,+\infty)(a>1)$上非负，广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，证明：广义积分

$$\int_a^{\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{x^p}\mathrm{d}x$$

亦收敛，其中$p>\frac{1}{2}$为常数.

[Hint] 利用Cauchy-Schwarz不等式直接估计广义积分值为有限量.

补充习题 5.21. 判断广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^2}}$的敛散性.

[Hint] 注意$x=0$与$x=1$均为瑕点，需要分段讨论. 广义积分收敛.

补充习题 5.22. 判断广义积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\mathrm{d}x$的收敛性.

[Hint] 作代换$t=\sec x$，则广义积分化为

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t,$$

注意$t=1$为瑕点，需要分段讨论. 广义积分绝对收敛.

补充习题 5.23. 讨论广义积分$\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin(x^\beta)\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha,\beta\in\mathbb{R}(\beta\neq 0)$为参数.

[Hint] $\beta=1$的情形直接应用习题5.1.9的结果，对一般情况，可作代换$t=x^\beta$将其归结到$\beta=1$的情形. 广义积分在$-1<\frac{\alpha+1}{\beta}<0$时绝对收敛，在$0\leq\frac{\alpha+1}{\beta}<1$时条件收敛，否则广义积分发散.

补充习题 5.24. 讨论广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$a,\alpha\in\mathbb{R}(\alpha\geq 0)$为参数.

[Hint] $a=0$时，广义积分在$n>1$时（绝对）收敛，否则广义积分发散. $a\neq 0$时，广义积分在$n>1$时绝对收敛，在$0<n\leq 1$时条件收敛，否则广义积分发散.

补充习题 5.25. 计算广义积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)\mathrm{d}x$.

[Hint] 可作代换$t=\sqrt{\tan x}$进行计算. 答案为$\sqrt{2}\pi$.

补充习题 5.26. 证明：

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)\mathrm{d}x,$$

其中$a,b>0$为常数，且设等式两侧广义积分收敛.

[Hint] 作代换$t=ax-\frac{b}{x}$即可.

补充习题 5.27. [*] 设$f(x) \in C[a,b]$, 令

$$F(x) = \int_a^b f(y)|x-y|\mathrm{d}y,$$

计算$F''(x)$.

[Hint] 首先计算一阶导数得到

$$F'(x) = \begin{cases} -\int_a^b f(y)\mathrm{d}y, & x \le a, \\ \int_a^x f(y)\mathrm{d}y - \int_x^b f(y)\mathrm{d}y, & a < x < b, \\ \int_a^b f(y)\mathrm{d}y, & x \ge b, \end{cases}$$

由此$x \le a$或$x \ge b$时$F''(x) = 0$, $a < x < b$时$F''(x) = 2f(x)$.

补充习题 5.28. [*] [*] 考虑椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi,$$

证明：$E(k)$满足微分方程

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{1}{1-k^2}E(k) = 0.$$

补充习题 5.29. [*] [*] 考虑*Bessel*函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

其中$n \in \mathbb{N}_+$, $x \in \mathbb{R}$为参数, 证明：$J_n(x)$满足*Bessel*方程

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

补充习题 5.30. 计算$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x$, 其中$a > 0$为参数.

[Hint] 可以对a在积分号内求导计算, 也可以应用补充习题5.26的结果. 答案为$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}$.

补充习题 5.31. [*] 计算$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$, 其中$a, b > 0$为参数.

[Hint] 将积分值看作a的函数$I(a)$, 在积分号下求导并利用Froullani积分的结果（习题5.1.13）得到$I'(a)$, 并计算$I(b)$的值即得. 答案为$2a\ln\frac{2a}{a+b} + 2b\ln\frac{2b}{a+b}$.

补充习题 5.32. [*] [*] 设函数$f(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, 证明：

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right)\mathrm{d}\xi$$

满足热方程

$$u_t' - a^2u_{xx}'' = 0$$

以及初始条件$\lim\limits_{t\to 0+0} u(x,t) = f(x)$.

补充习题 5.33. [*] 设$\mathbb{R}^3$中的平面$\pi: x+y+z=1$与三个坐标面围成四面体区域D, 证明:

$$\iiint_D x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\mathrm{d}v = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{(a+b+c)\Gamma(a+b+c)},$$

其中$a,b,c>0$为常数.

补充习题 5.34. [*] 设$D\subset\mathbb{R}^3$为柱面$S: x^2+y^2=ay$与球面$\mathbb{S}^2(a)(a>0)$所围区域, 用Euler积分表示

$$\iiint_D \left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^p \mathrm{d}v,$$

其中$p\geq 0$为常数.

[Hint] 答案为$\dfrac{2a^{p+3}}{p+3}\left(\pi - \mathrm{B}\left(2+\dfrac{p}{2},\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

补充习题 5.35. 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x$.

[Hint] 首先考虑$I(m)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^3}\mathrm{d}x$, 由习题5.2.14可知其在$-1<m<2$时收敛, 且

$$I(m) = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi(m+1)}{3}}.$$

接着证明$I(m)$可在积分号内对m求导（应用Weierstrass判别法）, 题目所求即$I'(1)$. 答案为$\dfrac{2\pi^2}{27}$.

补充习题 5.36 (Raabe积分). [*] [*] 计算$\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$.

[Hint] 对余元公式两端取对数并在$[0,1]$上积分可得

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin(\pi x)\mathrm{d}x,$$

其中由变量代换可知左端两项相等, 而右端第二项可由Euler积分（习题5.1.12）计算. 答案为$\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

6 Fourier分析

6.1 Fourier级数一般理论

习题 6.1.1. 设以2π为周期的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上除了有限个点外均有直到k阶导数，$f^{(k-1)}(x)$在$[-\pi,\pi]$上处处连续，$f^{(k)}(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，记$f(x)$相应有Fourier系数$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，证明：

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right),\ b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right),\ n\to\infty.$$

Proof. 对$k=1$的情形，记$f'(x)$的Fourier系数为$\{a_n'\}$，$\{b_n'\}$，分部积分可见

$$a_0' = 0,\ a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

由Parseval等式可知$a_n' = o(1)$，$b_n' = o(1)(n\to\infty)$，则有$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$，$b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)(n\to\infty)$. 归纳即知原命题对任意$k\in\mathbb{N}_+$成立. □

[Remark] 也可以应用Riemann-Lebesgue引理.

补充习题 6.1. [*] 设以2π为周期的函数$f(x)$满足Hölder条件，即存在常数$\alpha\in(0,1]$与$L>0$，使得

$$|f(x)-f(x')|\le L|x-x'|^\alpha,\ \forall x,x'\in\mathbb{R},$$

记$f(x)$相应有Fourier系数$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，证明：

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\ b_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\ n\to\infty.$$

[Hint] 考虑$a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\cos(nx)\mathrm{d}x$，于是有估计

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot|\cos(nx)|\mathrm{d}x\le L\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha,$$

对b_n同理估计.

习题 6.1.2. 设以2π为周期的连续函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上除了有限个点外均可微，且$f'(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，证明：$f(x)$的Fourier级数绝对一致收敛到$f(x)$.

Proof. 自然$f(x)$的Fourier级数收敛到$f(x)$，下面证明收敛的绝对一致性，为此考虑Weierstrass判别法，只需证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，其中$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为$f(x)$的Fourier系数.

与习题6.1.1同理可知，$f'(x)$的Fourier系数$\{a_n'\}$，$\{b_n'\}$满足$a_n' = nb_n$，$b_n' = -na_n$，则估计有

$$|a_n| = \left|\frac{b_n'}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left(b_n'^2+\frac{1}{n^2}\right),\ n\in\mathbb{N}_+,$$

其中由$f'(x)$相应的Parseval等式可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n'^2$收敛，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，同理可以得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛. □

6.2 周期函数的Fourier级数展开及应用

习题 6.2.1. 计算$f(x) = \cos(ax)$在$[-\pi, \pi]$上的*Fourier*级数展开, 并证明

$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2},$$

其中$a \in (0, 1)$为常数.

Solution. 直接计算得到

$$\cos(ax) \sim \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a(-1)^n}{a^2 - n^2}\cos(nx)\right],$$

由$f(x) \in C^\infty[-\pi, \pi]$可知其Fourier级数收敛到自身, 特别取$x = 0$即得命题成立. □

习题 6.2.2. 计算函数$f(x) = x^2$在$[-\pi, \pi]$上的*Fourier*级数展开, 并以此计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Solution. 首先计算x的Fourier级数展开得到

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx),$$

接着利用$(x^2)' = 2x$与习题6.1.1中的结果即得

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$

其中常数项由直接计算得到.

由$f(x) \in C^\infty[-\pi, \pi]$, 故其Fourier级数收敛到自身, 特别取$x = \pi$即得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

最后, 考虑Parseval等式有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4},$$

即得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. □

补充习题 6.2. 计算函数$f(x) = x^3$在$[-\pi, \pi]$上的*Fourier*级数展开, 并以此计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

[Hint] 注意x^3本身无法延拓为$\mathbb{R}$上的连续函数, 为此需要考虑$x^3 = (x^3 - \pi^2 x) + \pi^2 x$, 第一项可以连续延拓, 进而可利用与习题6.2.2类似的方法通过导数计算Fourier级数展开, 第二项的展开是熟知的. 级数展开为

$$x^3 \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi^2(-1)^{n-1}}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3}\right]\sin(nx).$$

之后应用Parseval等式以及习题6.2.2中的结果即得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

补充习题

补充习题 6.3. [*] 设数列$\{b_n\}$单调收敛于0, 且设函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)\in R[-\pi,\pi],$$

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$即是$f(x)$的Fourier级数.

[Hint] 只需计算Fourier系数$\{b_n\}$, 注意考虑$x=0$为瑕点的情况, 此时相应积分为广义积分, 积分与求和的交换性依赖于一致收敛性.

补充习题 6.4. 计算下列函数的Fourier级数展开：

1. $f(x)=\sec x,\ x\in[-\pi,\pi]$.
2. $f(x)=|\sin x|,\ x\in[-\pi,\pi]$.
3. $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in[-\pi,\pi]$.

[Hint] 答案如下：

1. $\sec x\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{(2n-1)\pi}\sin[(2n-1)x]$.
2. $|\sin x|\sim\dfrac{2}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{(1-4n^2)\pi}\cos(2nx)$.
3. $\mathrm{e}^x\sim\dfrac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{1+n^2}(\cos(nx)-n\sin(nx))\right]$.

补充习题 6.5. [*] [*] 证明：

$$\pi=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}x,$$

进而得到$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi$.

[Hint] 对$x\in(0,\pi)$, 令$a=\dfrac{x}{\pi}$代入习题6.2.1的结果可以得到

$$1=\frac{\sin x}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2},$$

检查一致收敛性后对上式在$[0,\pi]$上积分即得. 为计算$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 只需按长为$\pi$的区间逐段划分$\mathbb{R}$, 再由换元将积分区域一律调整到$[0,\pi]$上即得.

参考文献

[1] Demidovich, B. P. (2010). 李荣涑 & 李植 译. 数学分析习题集. 高等教育出版社.

[2] 丁同仁 & 李承治 (2019). 常微分方程教程（第二版）. 高等教育出版社.

[3] 方企勤 & 林源渠 (2003). 数学分析解题指南. 北京大学出版社.

[4] 李勇 & 伍卓群 (2003). 常微分方程. 高等教育出版社.

[5] 李忠 & 周建莹 (2009). 高等数学（第二版）. 北京大学出版社.

[6] 钱定边, 谢惠民, 恽自求, & 易法槐 (2018). 数学分析习题课讲义（第2版）. 高等教育出版社.

[7] 周蜀林 (2005). 偏微分方程. 北京大学出版社.