xyt 高数讲义参考答案

2024 年 9 月 22 日

目录

第二个等号利用了函数极限换元$y=\frac{1}{x}$。由于$yP_k(y)$是关于y的多项式，其量级是比指数型无穷大量e^{y^2}小的，所以

$$\lim_{y\to\infty}\frac{yP_k(y)}{e^{y^2}}=0. \tag{92}$$

一般地，$f^{(2021)}(0)=0$。 □

2.3 扩展补充题

本次补充题类型较多，根据需求掌握部分即可。前三道题是比较基本的题目，后两道题是很有难度的证明题。

补 1. 计算题

$x^{x^x}(x^x(\ln x)^2+x^x\ln x+x^{x-1})$

1. 设$f(x)=x^{x^x}$，求$f'(x)$。

$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}x^2}{x^4+1}$

2. 设$f(x)=2\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$，求$f'(x)$。

3. 定义$g(x)=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$，其中$f(x)$可导且$f'(x)=\arctan x$，求$g'(x)$。$\frac{2\arctan\frac{x-1}{x+1}}{(x+1)^2}$

4. 设隐函数$y=y(x)$由$x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$，其中$x>0$，求$y'(x)$。

$y^2x^{y^2-1}+(2yx^{y^2}\ln x)\cdot y'+(2y\ln x)y'+\frac{y^2}{x}=0$ $\therefore 2y\ln x(1+x^{y^2})y'=-\frac{y^2}{x}(1+x^{y^2})$ $\therefore y'=\frac{y}{2x\ln x}$

补 2. 设$f(x)$是在$x=0$的某个邻域定义的函数，回答下列问题：

1. 如果$f'(0)$存在，证明$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(0)$。$\to\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+\frac{f(0)-f(-\Delta x)}{\Delta x}\right)$

2. 如果极限$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(-\Delta x)}{2\Delta x}$存在，能否说明$f'(0)$存在？ $=\frac{1}{2}(f'(0)+f'(0))=f'(0)$

→ 不能，如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$处

补 3. 计算n阶导数，其中$n\in\mathbb{N}^*$

☆掌握三倍角公式 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

1. $f(x)=\sin^3 x$。 $\therefore \sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

2. $f(x)=\frac{x^n}{1-x}$。→ 法一：牛-莱公式

法二：$f(x)=-(1+x+\cdots x^{n-1})+\frac{1}{1-x}$

$f^{(n)}(x)=\frac{1}{(1-x)^n}$

3. $f(x)=x^{n-1}\ln x$。

→ 牛-莱公式

→ 见下页

☆**补 4.** 设$f(x)$是在$\mathbb{R}$定义的函数，且$f'(0)$存在，回答下列问题：

1. 如果正序列$\{x_n\}$和负序列$\{y_n\}$均收敛于*0*，证明$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(0)$。

2. 如果两个正序列$\{x_n\}$和$\{z_n\}$均收敛于*0*，问$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=f'(0)$是否总成立？

补 5. 设$f(x)$是在$[-1,1]$定义的函数，且$f'(0)$存在，回答下列问题

1. 证明：$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)\right]=\frac{f'(0)}{2}$.

2. 利用上一问的结论计算极限$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

$\to = e^{\sum_{k=1}^n\ln(1+\frac{k}{n^2})}$

$= e^{n\ln(1+0)+\frac{\frac{d\ln(1+x)}{dx}}{2}\big|_{x=0}}$

$= e^{\frac{1}{2}}$

LHS $=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\left(f(\frac{k}{n^2})-f(0)\right)$

注意到

$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(\frac{k}{n^2})-f(0)}{\frac{k}{n^2}}=f'(0)$

$\therefore f(\frac{k}{n^2})-f(0)=f'(0)\cdot\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

由于$|o(\frac{1}{n^2})|<\frac{1}{n^2}$

$\therefore$ n个$o(\frac{1}{n^2})$相加，绝对值小于 $\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}$，一定无穷小

$\therefore$ LHS $=\lim_{n\to+\infty}f'(0)\cdot\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}+o(1)$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}f'(0)$

$=\frac{f'(0)}{2}$

补 4. 设$f(x)$是在$\mathbb{R}$定义的函数，且$f'(0)$存在，回答下列问题：

1.如果正序列$\{x_n\}$和负序列$\{y_n\}$均收敛于*0*，证明$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(0)$。

2.如果两个正序列$\{x_n\}$和$\{z_n\}$均收敛于*0*，问$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=f'(0)$是否总成立？

年 月 日 第 页

(1) 令 $\eta(x_n)=\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}-f'(0)$

$\eta(y_n)=\frac{f(0)-f(y_n)}{0-y_n}-f'(0)$

原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{x_n}{x_n-y_n}\cdot(\eta(x_n)+f'(0))-\frac{y_n}{x_n-y_n}(\eta(y_n)+f'(0))\right]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f'(0)+\frac{x_n}{x_n-y_n}\eta(x_n)-\frac{y_n\eta(y_n)}{x_n-y_n}\right]$

而 $\frac{x_n}{x_n-y_n}$ · $\frac{y_n}{x_n-y_n}$ 有界 $\lim\limits_{n\to+\infty}\eta(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\eta(y_n)=0$

(2) 错在 $\frac{x_n}{x_n-z_n}$ 可能无界，则

$\frac{x_n}{x_n-z_n}\eta(x_n)-\frac{z_n}{x_n-z_n}\eta(z_n)$ 可以不为0

注意!!!

$\frac{x_n}{x_n-y_n}$ 与 $\frac{y_n}{x_n-y_n}$ 在(0,1)有界

但未必有极限!

所以求极限时不能直接拆分为

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_n-y_n}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}$

错的!

这种时候只能利用有界性来做

(2) 构造 $f(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\end{cases}$

令 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ $z_n=\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$

$f(0)=0$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=-\frac{8n}{(4n+1)\pi}$

$=-\frac{2}{\pi}$

千万注意

$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\cdot g(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}g(a_n)$

前提为 $f(a_n)$ 与 $g(a_n)$ 存在极限

只是有界不行!

2.3 扩展补充题

注意 $f'(2+\cos x)$是将$(2+\cos x)$代入$f'(x)$，而不是令 $g(x)=f(2+\cos x)$再对$g(x)$求导！

补 1. 已知$f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$，求$f(x)$的表达式。

$= \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} + 1-\cos^2 x$

$= \frac{1-\cos^4 x}{\cos^2 x}$

故 $f'(x) = \frac{1-(x-2)^4}{(x-2)^2}$

$f(x) = -\frac{1}{x-2} - \frac{(x-2)^3}{3} + C$

补 2. 计算不定积分$\int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$。

$\int[(1+x)\sqrt{x} - x\sqrt{1+x}]dx = \int \sqrt{x} + x\sqrt{x} - x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$

补 3. 计算不定积分$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$。

令 $t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$

$x = \frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$

$t \cdot \frac{(1+t^3)^2}{16t^6} \cdot -\frac{12t^2}{(1+t^3)^2}$

原式 $= -\int \frac{3}{4}\frac{1}{t^3}dt$

$= \frac{3}{8}t^{-2} + C$

$= \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}} + C$

补 4. 计算不定积分$\int \sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

令 $t = 1+\sin x$ $x = \arcsin(t-1)$

即 $\int \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-(t-1)^2}} = \int\frac{1}{\sqrt{2-t}}dt = -2\sqrt{2-t} + C = -2\sqrt{1-\sin x} + C$

补 5. 计算不定积分$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$。

$\int -\frac{\ln x}{2}\, d\frac{1}{1+x^2} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \int\frac{1}{2x(1+x^2)}dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$

补 6. 计算不定积分$\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$。

设 $I = \int \sin x\, d(x-1)e^x$

$= (x-1)e^x\sin x - \int(x-1)e^x\cos x\,dx$

$= (x-1)e^x\sin x - (x-2)e^x\cos x - \int(x-2)e^x\sin x\,dx$

$\therefore 2I = e^x[(x-1)\sin x - (x-2)\cos x] + 2\int e^x\sin x\,dx$

$= e^x[x\sin x - (x-1)\cos x] + C$

$\therefore I = \frac{e^x}{2}[x\sin x - (x-1)\cos x] + C$

补 7. 计算不定积分$\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$。

$\int \frac{e^x(1+x)}{xe^x(1+xe^x)}dx$

$= \int \frac{d\,xe^x}{xe^x\cdot(1+xe^x)}$

$= \ln\frac{xe^x}{1+xe^x} + C$

补 8. 计算不定积分$\int \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$。

令 $t = \sqrt{\tan x}$

$\int t\, d\arctan t^2$

$= \int\frac{2t^2}{1+t^4}dt$

$= \int\left(\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dt$

$= \frac{1}{4}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}t+1) - \arctan(-\sqrt{2}t+1)\right) + C$

代入t

我们式(117)右侧求和式拆成两部分分别用黎曼和计算极限

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\xi_k)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{n}f(\xi_k)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{(2k-2)\pi}{n}\right)f(\xi_k)\to\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x. \tag{118}$$

同理

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\eta_k)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{(2k-2)\pi}{n}\right)f(\eta_k)\to\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x. \tag{119}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\xi_k)\right]-\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\eta_k)\right]=0. \tag{120}$$

□

题 7. 设$f(x)\in C^1[0,1]$且$f(0)=f(1)=0$，证明：$\int_0^1(f(x))^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x$。

Proof. 利用NL公式和变限积分的性质

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t, \tag{121}$$

在上式两侧平方然后使用柯西-施瓦茨不等式

$$(f(x))^2\le\left(\int_0^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\le\left(\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_0^x(f'(t))^2\mathrm{d}t\right)=x\int_0^x(f'(t))^2\mathrm{d}t. \tag{122}$$

由于被积函数$(f'(t))^2$非负，我们有

$$(f(x))^2\le x\int_0^x(f'(t))^2\mathrm{d}t\le x\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t, \tag{123}$$

注意到式(123)关于一切$x\in[0,1]$成立，所以将式(123)两侧分别在$x\in[0,1]$定积分

$$\int_0^1(f(x))^2\mathrm{d}x\le\left(\int_0^1 x\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t. \tag{124}$$

□

2.3 扩展补充题

补 1. 计算下列定积分

1.$\int_0^\pi\sqrt{\sin x-\sin^3 x}.\mathrm{d}x$

$\int_0^\pi\sqrt{\sin x\cos^2 x}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx$ → 令 $u=\pi-x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\,d(\pi-x)$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx$

$=\frac{4}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$

2.$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^4(-u)}{1+e^{u}}d(-u)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(e^x+1)\sin^4 x}{1+e^x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$

3.$\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x.$

$x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$=\ln(1+\sqrt{2})-(\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1)$

$=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$

4.$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$。

$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$ $\quad t=\sqrt{x}$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$=2\arcsin^2 t\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\therefore$ 原式 $=\arcsin^2 t\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=(\frac{\pi}{2})^2-(\frac{\pi}{6})^2=\frac{8\pi^2}{36}=\frac{2\pi^2}{9}$

补 2. 如果$f(x)\in C[a,b]$单调递增，证明$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

证 $\int_0^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)\,dx\geqslant 0$

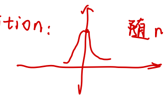
注意两区间上 $x-\frac{a+b}{2}$ 不变号 可用广义中值

$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})f(x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-\frac{a+b}{2})f(x)\,dx$

$=f(x_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})dx+f(x_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-\frac{a+b}{2})dx$

$=(f(x_2)-f(x_1))\cdot\frac{(b-a)^2}{8}$ 其中 $a\le x_1\le\frac{a+b}{2}<x_2\le b$

由 $f(x)$ 单增 得证

Intuition:  随 n 个其形状变窄

证 $\forall \varepsilon>0, \exists N, n>N$

$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx < \varepsilon$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$

并取 N，使 $(1-\delta^2)^N<\frac{\varepsilon}{4}$

$\forall n>N$

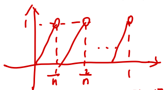
$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^{\delta}(1-x^2)^n dx + 2\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n dx$

$\leq 2\int_0^{\delta} 1\,dx + 2\int_{\delta}^{1}\frac{\varepsilon}{4}dx$

$< 2\cdot\delta + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

补 3. 证明：$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x=0$

补 4. 考虑函数$h_n(x)=\begin{cases} nx & ,0\leq x<\frac{1}{n}, \\ 0 & ,\text{其他情况}, \end{cases}$然后再定义$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}h_n(x-\frac{k}{n})$，求极限$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^x g_n(x)\mathrm{d}x$。

$g_n(x)$ 

x_n 为在 $\frac{k}{n}$ 与 $\frac{k+1}{n}$ 间一个数

$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^x g_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} e^{x_n}\cdot\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} e^{x_n}\cdot\frac{1}{2n}$，当 $n\to+\infty$ 时由黎曼积分定义，即 $\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx=\frac{e-1}{2}$

补 5. 设$f\in C^1[0,1]$满足$f(0)=f(1)=0$且$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=1$，利用柯西-施瓦茨不等式证明下述海森堡不等式$\left(\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1(xf(x))^2\mathrm{d}x\right)\geq\frac{1}{4}$。如果$f(x)$代表量子力学波函数，那么积分$\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x$和$\int_0^1(xf(x))^2\mathrm{d}x$在动量和位置上的偏差，海森堡不等式对应量子力学中的测不准原理。

LHS $\geq \left(\int_0^1 x f(x) f'(x) dx\right)^2$

$= \left(\int_0^1 x\, d\frac{(f(x))^2}{2}\right)^2$

$= \left(x\frac{(f(x))^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{f(x)^2}{2}dx\right)^2$

$= \frac{1}{4}$

x	$(-\infty,\frac{-3-\sqrt{17}}{2})$	$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$	$(\frac{-3-\sqrt{17}}{2},-1)$	-1	$(-1,0)$	0
y'	$+$	0	$-$	无定义	$+$	0
y''	$-$	$-$	$-$	无定义	$-$	$-$
y	$\nearrow,\frown$	极大值点	$\searrow,\frown$	间断点	$\nearrow,\frown$	极小值点
x	$(0,\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5},\frac{-3+\sqrt{17}}{2})$	$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$	$(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},+\infty)$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	$\searrow,\frown$	拐点	$\searrow,\smile$	极小值点	$\nearrow,\smile$	

表 4: 函数$y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$导数信息表。

描点和作图 首先找到函数上几个点，如点$(-2,-12),(0,0),(1,0),(2,\frac{4}{9})$，然后画出渐近线，依照渐近线作图。

$\square$

2.3 扩展补充题

补 1. 计算下列函数的极值和最值

1.$y=2\tan x-\tan^2 x$，定义域$(0,+\infty)$。

2.$y=\left|x(x^2-1)\right|$，定义域$\mathbb{R}$。

高中知识

补 2. 设$n\in\mathbb{N}^*$，证明方程$x^{n+2}-2x^n-1=0$存在唯一的正实根。

补 3. 考虑在$[a,b]$二阶线性常微分方程边值问题：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x),a<x<b,y(a)=A,y(b)=B, \tag{33}$$

其中p,q,r为给定函数，A,B为给定常数，若$q(x)<0$对一切$x\in(a,b)$成立，那么方程至多只有一个解$y(x)$。

补 4. 设a是给定的正实数，如果将a拆分成若干个正实数的和，如何拆分可以使得这些拆分的正实数积最大？

设拆成n个
由均值不等式
最大 $(\frac{a}{n})^n$
令 $f(x)=(\frac{a}{x})^x$
$=e^{x\ln(\frac{a}{x})}$
令 $g(x)=x\ln\frac{a}{x}$
$g'(x)=\ln\frac{a}{x}-1$
$x=\frac{a}{e}$时 最大

应拆成$[\frac{a}{e}]$或$[\frac{a}{e}]+1$项

补3（其实应放到常微分那章）
设 y_1 与 y_2 均为其解
$\therefore y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=r(x)$ ①
$y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=r(x)$ ②
① $-$ ②，令 $g(x)=y_1-y_2$
$\therefore g''+p(x)g'+q(x)g=0$
而 $g(a)=g(b)=0$
首先，$g(x)$ 不是常值函数
（$g(x)$ 不恒等于0，否则 $y_1=y_2$；）
其次，$g(x)$ 有导，故连续
在 $[a,b]$ 上有最大最小
又 $g(x)$ 非常数，必 $\exists\,\varepsilon\in(a,b)$
$g(\varepsilon)$ 最大或最小
不妨设最大，$g(\varepsilon)>0$
则 $g'(\varepsilon)=0$ $g''(\varepsilon)\le 0$
$\therefore g''(\varepsilon)+p(x)g'(\varepsilon)+q(x)g(\varepsilon)$
$=g''(\varepsilon)+q(x)g(\varepsilon)<0$，不成立
最小时，$g(\varepsilon)<0$ $g''(\varepsilon)\ge 0$
同理不成立

Proof. **1.**构造反例

$$f(x)=\begin{cases}1\quad, & x=n+\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N}^*/\{1\},\\ 0 & \text{其他情况}.\end{cases}\tag{55}$$

也就是说f只在形如$x=n+\frac{1}{n}$的点函数值为1，其余大部分点的函数值为0。

对于每一个$a\in\mathbb{R}$，点列$\{n+a\}_{n=1}^{\infty}$至多只包含一个值为1的点，其余点值总为0，所以$\lim_{n\to\infty}f\left(n+a\right)=0$。而序列$\{n+\frac{1}{n}\}$趋于$+\infty$，且$\lim_{n\to+\infty}f\left(n+\frac{1}{n}\right)=1$，根据归结定理函数极限$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$不成立。

2.构造反例

$$f(x)=\begin{cases}1\quad, & x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}},\quad n\in\mathbb{N}^*,\\ 0 & \text{其他情况}.\end{cases}\tag{56}$$

也就是说f只在形如$x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的点函数值取1，其余大部分点的函数值为0。利用相同的方法显然有$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$不成立。但是对于给定a，序列$\{\frac{a}{n}\}_{n=1}^{\infty}$，其中至多只包含一个形如$\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的数使得该点函数值取1，这一结论可以用反证法说明：若不然，存在$\frac{a}{m_1}$和$\frac{a}{m_2}$都可以写成$\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的形式，即：

$$\frac{a}{m_1}=\frac{1}{n_1\sqrt[n_1]{2}},\quad\frac{a}{m_2}=\frac{1}{n_2\sqrt[n_2]{2}},\ m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*,\ n_1\neq n_2,\ m_1\neq m_2.\tag{57}$$

除法得

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}\cdot 2^{\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}}.\tag{58}$$

由于$m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$且$n_1\neq n_2$，因此有$2^{\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}}$是无理数，矛盾。因此序列$\{\frac{a}{n}\}_{n=1}^{\infty}$，其中至多只包含一个形如$x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的数，故$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{a}{n}\right)=0$。 □

2.3 扩展补充题

由 $\sqrt{x+\sqrt{x}}<x\quad(x>2)$

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}<\sqrt{x+x}<\sqrt{2x}$

又 $\because \sqrt{2x}-x\to-\infty$

$\therefore$ 原式 $\to-\infty$

补 1. 计算下列极限

1.$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x\right)$。

2.$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x^3}$。 $\sin x=o(x-\frac{x^3}{6})$ $\therefore$ 原式 $=\frac{2(x-\frac{x^3}{6})-[2x-\frac{(2x)^3}{6}]+o(x^3)}{x^3}$

$=1$

3.$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$。 $\to [1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})]^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))}=e^{x\cdot(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))}=e$

4.$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$。 $=\sqrt[6]{1+x}\to1$

补 2. 设$f(x)$和$g(x)$在$x=a$的一个去心邻域有定义，设$\lim_{x\to a}f(x)=c$且$\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$，其中$0<c<1$。用$\varepsilon-\delta$语言证明$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=0$。证 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$，$|x-a|<\delta$时 $f(x)^{g(x)}<\varepsilon$

设 $(\frac{1+c}{2})^{N_0}<\varepsilon$ 则取 δ 使 $|x-a|<\delta$时

$f(x)<\frac{1+c}{2}$ $g(x)>N_0$ 即可

补 3. 已知$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$，计算参数$a,b$的所有可能取值。

最好方法：先猜后证

$\lim_{x\to+\infty}\left|\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}-(a-1)x-(b+\frac{1}{2})\right|$

$=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^2-x+1-(x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x+1}+(x-\frac{1}{2})}-(a-1)x-(b+\frac{1}{2})\right|$

$=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+(x-\frac{1}{2})}-(a-1)x-(b+\frac{1}{2})\right|=0$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_0$，

$x>X_0$时

$-\varepsilon<\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+(x-\frac{1}{2})}-(a-1)x-(b+\frac{1}{2})<\varepsilon$

显然 $a=1$ $b=-\frac{1}{2}$

本质：单侧与双侧

补 4. 设$f(x)$在$x=0$的邻域里有定义，回答下列问题：

1.证明$\lim_{x\to 0} f(x)$收敛的充分必要条件是$\lim_{x\to 0} f(x^3)$收敛。

2.问$\lim_{x\to 0} f(x)$收敛与$\lim_{x\to 0} f(x^2)$收敛的命题充分必要性如何，说明你的结论。

1. 设 $|f(x)-l|<\varepsilon$ （$|x|<\delta$ 时）

则 $|x|<\sqrt[3]{\delta}$ 时

$|f(x^3)-l|<\varepsilon$

$\lim_{x\to 0} f(x^3)$ 收敛；

充分性同理

(2) 必要不充分

若 $|x|<\delta$ 时

$|f(x)-l|<\varepsilon$

则 $|x|<\sqrt{\delta}$ 时

$|f(x^2)-l|<\varepsilon$

但反之

$|x|<\sqrt{\delta}$ 时

$|f(x^2)-l|<\varepsilon$

不能保证

在 $-\delta<x<0$ 上

$|f(x)-l|<\varepsilon$

种情况：

情况1. $x_0 < c$且$g(x_0) < 0$，亦即$x_0 < f(x_0)$。

情况2. $x_0 > c$且$g(x_0) > 0$，亦即$x_0 > f(x_0)$。

这两种情况的证明方法实际是一致的，我们只考虑**情况1**。由于$f(x_0) > x_0$，我们显然有$x_1 = \frac{f(x_0)+x_0}{2} > x_0$。我们接下来证明$x_1 \le c$。由于$c = f(c)$，根据题目要求有

$$x_0 - c \le c - f(x_0) \le c - x_0. \tag{31}$$

那么移项得

$$c \ge \frac{f(x_0) + x_0}{2} = x_1. \tag{32}$$

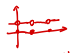
只要说明了$x_1 \le c$，那么必然有$g(x_1) < 0$或$g(x_1) = 0$。如果$g(x_1) = 0$，那么依然得到$\{x_n\}$是常数列；如果$g(x_1) < 0$，那么$f(x_1) \le x_1$，就能进一步再推出$x_2 > x_1$。如果这样的推理成立，我们必然可以推断，当$x_0 < y$时，序列$\{x_n\}$的每一项都是递增的，即$x_0 \le x_1 \le x_2 \cdots \le y$，因此序列$\{x_n\}$单调递增，则收敛。

$\square$

2.3 扩展补充题

补 1. 定义两个函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,x > 0, \\ 0 & ,x = 0, \\ -1 & ,x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = x - [x]. \tag{33}$$



$x=0$ 处 一类　　$x=n\ (n\in\mathbb{Z})$处 一类　　$\rightarrow g(f(x))\equiv 0$ 无

请找出$f(x), g(x), f(g(x)), g(f(x))$所有间断点并判断类型。

$x=n\ (n\in\mathbb{Z})$处 一类

补 2. 设$f(x) \in C(a,b)$并且$\lim_{x\to a+0} f(x)$和$\lim_{x\to b-0} f(x)$收敛，证明$f(x)$在(a,b)为有界函数。

设 $|x-a| \le \delta_1$时 $|f(x) - \lim_{x\to a+0} f(x)| \le 1$
$|x-b| \le \delta_2$时 $|f(x) - \lim_{x\to b-0} f(x)| \le 1$
则 $[a+\delta_1, b-\delta_2]$上 由连续，有界
$(a, a+\delta_1]$ 上与 $[b-\delta_2, b)$上也有界
$\therefore$ (a,b)有界

补 3. 设$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$是多项式函数，证明下列命题：

1.如果n是奇数，那么$P(x)$存在实零点。

$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ $\therefore \exists$ x_1，$x \ge x_1$时$P(x_1) > 0$
同理 $\exists x_2$ $x \le x_2$时 $P(x) < 0$ 在 $[x_2, x_1]$ 由连续，有零点

2.如果n是偶数且$a_0 < 0$，那么$P(x)$至少存在两个实零点。

$\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$ $P(0) < 0$，$(0,+\infty)$与$(-\infty, 0)$各至少一个

补 4. 设函数$f(x)$在邻域$U_r(a)$定义，对一切$0 < \delta < a$，定义$f(x)$在$U_\delta(a)$的振幅

$$\omega(a,\delta) = \max_{x\in U_\delta(a)} f(x) - \min_{x\in U_\delta(a)} f(x). \tag{34}$$

证明$f(x)$在$x = a$连续的充分必要条件是$\lim_{\delta\to 0+0} \omega(a,\delta) = 0$。

用 f_{max}表示 U_δ中最大 f_{min} 同理

必要：令 $|x-a| < \delta$ 时 $f(x) - f(a) < \frac{\varepsilon}{2}$
则 $\omega = f_{max} - f_{min}$
$= f_{max} - f(a) - [f_{min} - f(a)]$
$\le \frac{\varepsilon}{2} - (-\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$
即 $\omega \to 0$

充分：注意到
$\omega \ge f_{max} - f(a)$
且 $\omega \ge f(a) - f_{min}$
$\omega \to 0$
故 $\forall x \in U_\delta$
$|f(x) - f(a)| \le \omega \to 0$

Proof. 定义函数$f(x)=x+x^2+\cdots+x^n$，显然$f(x)$在$(0,1)$单调，并且$f(x_n)=1$。我们对x_n做夹逼估计。

首先证明$x_n>\frac{1}{2}$，这是因为$f(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2^n}<1=f(x_n)$，根据单调性有$x_n>\frac{1}{2}$；接着我们希望寻找$x_n$的上界，我们证明$x_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$，那么

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)^n \\ &> \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1=f(x_n). \end{aligned} \tag{66}$$

由此

$$\frac{1}{2}<x_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}^*. \tag{67}$$

由夹逼原理知$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。 □

题 5. 求证$\mathrm{e}=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k!}$。

分析：关于自然常数e，我们所了解的也只有其定义$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，我们的分析也将围绕着这一极限出发。这一定理的证明有着很强的“数学分析”味道，特别是将“取极限”当成了一种保不等关系的运算。

Proof. 对$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$考做二项式展开并带入组合数的定义得

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{68}$$

如果将(68)右侧的分数$\frac{k}{n}$均放缩到1我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 1+\sum_{k=1}^n\frac{1}{k!}. \tag{69}$$

对于不等式(69)，我们左右两侧取$n\to\infty$，根据序列极限保序性质得到

$$\mathrm{e}\leq 1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k!}. \tag{70}$$

另一方面，我们取某个$m<n$，并在二项式展开(68)的考虑前m项：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-m+1}{n}. \tag{71}$$

考虑m固定，在式(71)两侧取$n\to\infty$，对于给定m有极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n-m+1}{n}=1$

$$\mathrm{e}\geq 1+\sum_{k=1}^m\frac{1}{k!} \quad ,\forall m\in\mathbb{N}^*. \tag{72}$$

对n取极限的式子(72)对一切m均成立，可以再取$m \to \infty$

$$e \geq 1 + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}. \tag{73}$$

结合式(72)和(73)，我们得证本题。 □

利用柯西定理形式

$a_n \to l$ 时 $\frac{\sum a_n}{n} \to l$

2.3 扩展补充题

补 1. 用柯西命题计算或证明

令 $b_n = \begin{cases} a_n - a_{n-1} & (n \geq 2) \\ a_1 & (n=1) \end{cases}$ 则 $a_n = \sum_{i=1}^{n} b_n$

由于 $b_n \to l$ 故 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum b_n}{n} = l$

*1.*设序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = A$，那么$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = A$。

*2.*设正序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$，那么$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$。

法一：取 $b_n = \ln a_n$
则 $\lim_{n\to+\infty}(b_n - b_{n-1}) = \ln A$
由 1 结论
$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} = \ln A$
即 $\ln \sqrt[n]{a_n} \to \ln A$
$\sqrt[n]{a_n} \to A$
（注：法一需用连续函数性质 本节未学）

法二：令 $b_n = \begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} & (n \geq 2) \\ a_1 & (n=1) \end{cases}$
$\therefore a_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$
由于 $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$
只需证 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} \to l$
1° $l \neq 0$
下证 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,
$\left| \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}}{l} - 1 \right| < \varepsilon$
（用比值更轻松）

即证 $(1-\varepsilon)^n < \frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{l^n} < (1+\varepsilon)^n$
则取 N_0，使 $\forall n > N_0$，$|b_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$
由于 $\frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{l^n} = \frac{\prod_{i=1}^{N_0} b_i}{l^{N_0}} \cdot \frac{\prod_{i=N_0+1}^{n} b_i}{l^{n-N_0}}$
固定值 设为A
该式值在 $(1+\frac{\varepsilon}{2})^{n-N_0} \cdot A$ 与 $(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-N_0} \cdot A$ 间
只需证 $A \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{(1+\frac{\varepsilon}{2})^{n-N_0}}$ ①
且 $A \geq \frac{(1-\varepsilon)^n}{(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-N_0}}$ ②
$(A>0$, ① $\to +\infty$, ② $\to 0$,
故 $\exists N_1$，使 $n > N_1$ 时 ①,② 同时满足，
故令 $N = \max\{N_0, N_1\}$，$\forall n > N$ 均满足

2° $l = 0$
同理取 N_0
$\because \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{N_0} b_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=N_0}^{n} b_i}$
$\leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{N_0} b_i} \cdot \sqrt[n]{(\frac{\varepsilon}{2})^{n-N_0}}$
$\leq (\prod_{i=1}^{N_0} b_i)^{\frac{1}{n}} \cdot (\frac{\varepsilon}{2})^{1-\frac{N_0}{n}}$
易知该式 $\to \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
故 $\exists N_1$，$n > N_1$ 时 $|\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}| < \varepsilon$
从而得证

*3.*求极限$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$。

补 2. 计算下列极限

1.$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$。

思路：联系 $\sin^2 n\pi$
$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi)$
$= \sin^2(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\pi) = \sin^2(\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}})$
$\to \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$

2.$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n+1}$。

$(\frac{n-1}{n-2})^{-(2n+1)} = (1+\frac{1}{n-2})^{-(2n+1)}$
$= \frac{1}{(1+\frac{1}{n-2})^{2n+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-2})^{2(n-2)+5}} = \frac{1}{e^2}$

3.$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$。

考虑到 $(n+1) - n = (\sqrt[3]{n+1})^3 - (\sqrt[3]{n})^3$
$= (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})((n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}})$
$\therefore \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}}(n+1)^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + (n+1)^{\frac{2}{3}}/n^{\frac{1}{3}}} \to 0$

4.$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$。

令 $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e}$ 故 $\exists N$，$n > N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2}{3}$
$\therefore a_n = \prod \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{N_0} \frac{a_n}{a_{n-1}} (\frac{2}{3})^{n-N_0} \to 0$ 故 $a_n \to 0$

补 3. *2021*秋季期中考试. 设$x_1 > 0$，且对一切$n \in \mathbb{N}^*$有$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$，求证$\lim_{n\to\infty} x_n$存在并求极限的值。

这类题用不动点先猜后证
取 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$
得不动点为1
证 $x_n \to 1$

首先，$\forall x_1 > 0$，
有 $x_2 \geq 1$ 从x_2开始

由于当 $x_n \geq 1$ 时
可推出 $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$
因而 x_n 递减且始终
$x_n \geq 1$ $(n \geq 2)$

$\therefore$ 一定有极限，
下证为1
$\therefore (x_{n+1} - 1) = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) - 1$
$= \frac{1}{2}(x_n - 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x_n}{x_n}$
$= (x_n - 1) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2x_n})$
$= (x_n - 1) \cdot \frac{x_n - 1}{2x_n}$
$< (x_n - 1) \cdot \frac{1}{2}$

故 $|x_{n+1} - 1| < |x_2 - 1| \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} \to 0$
$\therefore x_n \to 1$

补 4. 考虑序列$\{a_n\}$，定义$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，回答下列问题

*1.*如果S_n收敛，证明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

$S_n \to l$ 时
设 $\exists N$，$|S_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $(n > N)$
则 $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| \leq \varepsilon$ $(n > N)$
三角不等式

*2.*如果$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，是否一定有$\lim_{n\to\infty} S_n$收敛？

否，取 $a_n = \frac{1}{n}$

补 5. 定义*Fibonacci*数列$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$对一切$n \in \mathbb{N}^*$成立，且$F_0 = F_1 = 1$，设$x_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$，问序列$\{x_n\}$是否收敛，如收敛请计算极限，如发散说明理由。

注意 $F_n = \left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]\frac{1}{\sqrt{5}}$

由于二阶导连续，同时$a < a + \xi(h)h < a + h$，使用

$$\lim_{h\to 0} f''(a + \xi(h)) = f''(a). \tag{112}$$

结合式(111)得

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}. \tag{113}$$

□

2.3 扩展补充题

补 1. 计算下列极限

1.$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

$e^{\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\tan x}{x})} = e^{\frac{1}{x^2}\ln[\frac{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x}]} = e^{\frac{1}{x^2}\ln[1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)]}$

$= e^{\frac{1}{x^2}(\frac{x^2}{3}+o(x^2))} = e^{\frac{1}{3}}$

2.$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$。$\to$ $e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n} = e^{n^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-n} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

3.$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$。$\to$ $\frac{\cos(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)) - [1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]}{x^4} = \frac{1-\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{x^4}{24}-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})+o(x^4)}{x^4}$

$= \frac{1}{6}$

$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$

补 2. 写出下述函数的马克劳林公式，然后计算$y^{(n)}(0)$：

1.2021年高等数学B期末考试题. $y = \frac{1-2x+5x^2}{(1-2x)(1+x^2)}$。 $\frac{1}{1-2x} - \frac{2x}{1+x^2} \to \ln(1+x^2)$求导

$= [1+2x+(2x)^2+\cdots+(2x)^n+\cdots] - [2x+\cdots+(-1)^{k+1}\cdot 2x^{2k-1}+\cdots]$

2.$y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$。

注：这时要用y n阶导说明
但大一下学了级数可两边
积分，因为绝对收敛

$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}}{n!}x^{2n}$

$\therefore y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}}{n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$

$y^{(n)}(0) = \begin{cases} n!\,(2^n - (-1)^{\frac{n+3}{2}}\cdot 2) & (n为奇) \\ n!\cdot 2^n & (n为偶) \end{cases}$

补 3. 设函数f在邻域$(x_0 - r, x_0 + r)$有定义，在$x = x_0$处n阶可导，$P_n^T(x)$是$f(x)$在$x = x_0$处的n次泰勒多项式。任取另一个n次多项式$P_n(x)$，证明存在依赖$P_n(x)$选取的数$\delta \in (0, r)$，使得$|f(x) - P_n^T(x)| \leq |f(x) - P_n(x)|$对一切$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$成立。

$\exists m$, $|f(x) - P_n^T(x)| = |m\cdot(x-x_0)^{n+1}|$ RHS $= |f(x) - P_n^T(x) + P_n^T(x) - P_n(x)|$
$= |m(x-x_0)^{n+1} + t_1(x-x_0)^{a_1} + t_2(x-x_0)^{a_2} + \cdots + t_k(x-x_0)^{a_k}|$ (设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$) 则右式为 $O((x-x_0)^{a_1}) \geq O((x-x_0)^{n+1})$ 量级

补 4. 设函数$f(x)$在$[a, +\infty)$可导，且存在有限极限$\lim_{x\to\infty} f(x)$，回答下列问题

*1.*举反例说明$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$不一定总成立。 $\frac{1}{x}\sin(x^3)$

*2.*若$f(x)$二阶可导，且$f''(x)$在$[a, +\infty)$有界，求证：$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$。

设$f(x) \to l$ $\Rightarrow \forall \delta > 0$

$\exists N$ $x_1, x_2 > N$时 $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta$

则令 $\delta = \frac{d\varepsilon}{2}$

取 $\varepsilon > 0$. 下证 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0$ $|f'(x) - 0| < \varepsilon$ 对

$\forall x > N_0$成立

设 $|f''(x)| < M$, 再取 $d = \frac{\varepsilon}{M}$

$f(x+d) = f(x) + d f'(x) + \frac{d^2}{2} f''(\varepsilon)$

$\therefore |f'(x)| = |\frac{1}{d}(f(x+d) - f(x)) - \frac{d}{2} f''(\varepsilon)|$

$\leq |\frac{1}{d}(f(x+d) - f(x))| + \frac{d}{2}|f''(\varepsilon)|$

$\leq \frac{1}{d}\cdot\delta + \frac{d}{2}\cdot M = \varepsilon$

$\therefore \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

2.3 精选补充题

$y' = (x+2)(y+3)$

令 $u = x+2$ $\quad v = y+3$

$\therefore \ v' = y' = uv$

$v = C\cdot e^{\frac{u^2}{2}} \ (C\in R)$

即 $y = C\cdot e^{\frac{(x+2)^2}{2}} - 3 \ (C\in R)$

补 1. ***2021*春季期中考试题.** 求常微分方程特解$y' = xy + 3x + 2y + 6$。

补 2. 求解常微分方程$y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$，注意本题存在无法归类到通解的特解。

① $y \equiv \pm 1$ ② $y \neq \pm 1$，这时两边可除$\sqrt{1-y^2}$ $\quad \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\therefore$ $\arcsin y = \arcsin x + C$

补 3. 设$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$是齐次方程，证明：函数$\mu(x,y) = \frac{1}{xP+yQ}$是方程的一个积分因子。

补 4. 考虑一阶线性方程$y' + p(x)y = 0$，如果$p(x)$是在$\mathbb{R}$上定义的以$T > 0$为周期的周期函数证明：方程的任意解都是以T为周期的周期函数的充分必要条件是$\int_0^T p(s)\mathrm{d}s = 0$。

补 5. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的有界函数，求方程$y' + y = f(x)$在$\mathbb{R}$上所有的有界函数解。

齐次方程特点

由于 $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y)$

对 λ 求微分

$\therefore x\frac{\partial P}{\partial(\lambda x)} + y\frac{\partial P}{\partial(\lambda y)} = n\lambda^{n-1}P(x,y)$

令 $\lambda = 1$

$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = nP(x,y)$ 牢记

下证 对 $\frac{Pdx+Qdy}{xP+yQ} = 0$

有 $\frac{\partial \frac{Q}{xP+yQ}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{P}{xP+yQ}}{\partial y}$

$\because \frac{\partial \frac{Q}{xP+yQ}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(xP+yQ) - Q(P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial x})}{(xP+yQ)^2} = \frac{xP\frac{\partial Q}{\partial x} - xQ\frac{\partial P}{\partial x} - PQ}{(xP+yQ)^2}$

$\frac{\partial \frac{P}{xP+yQ}}{\partial y} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}(xP+yQ) - P(x\frac{\partial P}{\partial y} + Q + y\frac{\partial Q}{\partial y})}{(xP+yQ)^2} = \frac{yQ\frac{\partial P}{\partial y} - yP\frac{\partial Q}{\partial y} - PQ}{(xP+yQ)^2}$

只需证 $x(P\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial x}) = y(Q\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial Q}{\partial y})$

即证 $P(x\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) = Q(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y})$

即 $nPQ = nPQ$

$\therefore$ 得证

补4 $\because y = C\cdot e^{\int_0^x -p(t)dt}$

$\therefore y(x+T) = y(x)$

$\Leftrightarrow C\cdot e^{\int_0^{x+T} -p(t)dt} = C\cdot e^{\int_0^x -p(t)dt}$

对 $\forall C$ 成立

取 $C \neq 0$

上式 $\Leftrightarrow e^{\int_x^{x+T} -p(t)dt} = 1$

而 $\int_x^{x+T} -p(t)dt = \int_0^T -p(t)dt$

$\therefore$ 充要：$\int_0^T p(t)dt = 0$

$e^x(y'+y) = e^x f(x)$

$\therefore e^x y = \int_{-\infty}^x e^t f(t)dt + C$ 注意，其实这个下限可写成任意值

即 $y = e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)dt + C\cdot e^{-x}$ 因为C是任意的

但要证明无穷积分收敛

要用后面知识

首先，$\forall x\in R$，设 $a \le f(x) \le b$（有界）

$a\cdot e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t dt \le e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)dt \le b\cdot e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t dt$ （这里可利用 $f(x)$ 有界放缩来逼证明）

即 $a \le e^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)dt \le b$

说明 $e^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)dt$ 有界

而 $\forall C \neq 0$，$C\cdot e^{-x}$ 无界

$\therefore C = 0$

只有一个有界解 $e^{-x}\int_{-\infty}^x e^t f(t)dt$

□

由于$D(x)$是不恒为0的函数，那么$D(x)$在(a,b)存在正的最大值，设$D(x)$在点x_0取正最大值$D(x_0)=M$，根据极值点原理有$D'(x_0)=0$和$D''(x_0)\leq 0$，因此

$$D''(x)+p(x)D'(x)+q(x)D(x)\leq q(x)D(x)<0. \tag{66}$$

这与$D(x)$所满足的二阶线性方程矛盾。因此边值问题(64)不存在两个不同的解$y_1(x)$和$y_2(x)$

题 4. 通过常微分方程理论可以刻画化学反应中反应物浓度的变化。考虑双向化学反应$A\rightleftharpoons B$，我们用函数$A_1(t)$和$A_2(t)$表示反应物浓度随时间的变化。如果双向的反应常数为正数k_1,k_2，那么反应物浓度满足下述方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A=-k_1A+k_2B, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B=k_1A-k_2B. \end{cases} \tag{67}$$

假定反应物的初始浓度为$A(0)=A_0>0$和$B(0)=B_0>0$，回答下列问题

1.计算反应物浓度$A(t)$和$B(t)$。

2.化学反应中的熵函数定义为$G(t)=-A\left(1+\ln(k_1A)\right)-B\left(1+\ln(k_2B)\right)$，证明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G\geq 0$。

学过线代的可用矩阵算

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$(\lambda+k_1)(\lambda+k_2)-k_1k_2=0$

$\therefore\ \lambda[\lambda+(k_1+k_2)]=0$

$\lambda=0\ /\ -(k_1+k_2)$

由于 $\begin{bmatrix} \frac{k_1}{k_1+k_2} & \frac{-k_2}{k_1+k_2} \\ \frac{1}{k_1+k_2} & \frac{1}{k_1+k_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k_2 \\ -1 & k_1 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

记 $Y=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix} 1 & k_2 \\ -1 & k_1 \end{bmatrix}$ $z=P^{-1}Y=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

而由 $Y'=\begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}Y=P\begin{bmatrix} -k_1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}Y$

$\therefore\ (P^{-1}Y)'=\begin{bmatrix} -k_1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}Y$

即 $z'=\begin{bmatrix} -k_1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}z$

$\therefore\ z_1=C_1e^{-(k_1+k_2)x}$

$z_2=C_2$

由 $z=P^{-1}Y$

$Y=Pz$

$=\begin{bmatrix} C_1e^{-(k_1+k_2)x}+k_2C_2 \\ -C_1e^{-(k_1+k_2)x}+C_2k_1 \end{bmatrix}$

$\frac{dG}{dt}=-\frac{dA}{dt}[2+\ln(k_1A)]-\frac{dB}{dt}[2+\ln(k_2B)]$

$=-2\underbrace{\left(\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}\right)}_{0}-\left(\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{代入-\frac{dB}{dt}}\ln(k_1A)+\frac{dB}{dt}\ln(k_2B)\right)$

$=\frac{dB}{dt}\cdot\ln\frac{k_1A}{k_2B}$

若 $\frac{dB}{dt}>0$ 则 $k_1A>k_2B$

$\frac{dG}{dt}>0$

若 $\frac{dB}{dt}<0$ 则 $k_1A<k_2B$

$\frac{dG}{dt}>0$

当且仅当 $k_1A=k_2B$

$\frac{dG}{dt}=0$

$\therefore\frac{dG}{dt}\geq 0$

根据极坐标的定义有

$$\partial_r g(r,\theta) = \frac{x}{r}\partial_x f(x,y) + \frac{y}{r}\partial_y f(x,y) = 0,\ r \in (0,+\infty), \tag{87}$$

固定θ将$g(r,\theta)$看作只以r为自变量的一元函数，结合$\partial_r g(r,\theta)=0$可知$g(r,\theta)=C(\theta)$对一切$r\in[0,+\infty)$成立，命题得证。

$\square$

2.2 扩展补充题

补 1. 计算下列函数偏导数

1.$f(x,y) = x^{x^y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^{x^y}(y x^{y-1}\ln x + x^{y-1})$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{x^y}\cdot x^y\cdot(\ln x)^2$

2.$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)|y|}$

补 2. ***2021高等数学B期末考试题.*** 证明$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & x^2+y^2+z^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2+z^2 = 0 \end{cases}$在点$(0,0,0)$不可微。

注：求原点处偏导时只能用定义！因为在(0,0,0)函数定义为0

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)} = \frac{\frac{\Delta x\cdot 0\cdot 0}{\Delta x^2+0^2+0^2} - 0}{\Delta x - 0} = 0$

同理 $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)} = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)} = 0$

由 $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to 0}\frac{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to 0}\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

取 $y=z=x$ 时 为 $\frac{x^3}{3\sqrt{3}x^3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \neq 0$ ∴ 不可微

补 3. ***2021高等数学B期末考试题.*** 设f,g都具有连续的二阶偏导数，当$x\neq 0$时定义$h(x,y) = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$，计算$x^2\partial_{xx}h(x,y) + 2xy\partial_{xy}h(x,y) + y^2\partial_{yy}h(x,y)$。

补 4. 考虑$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，回答下列问题：

1.证明$f(x,y)$在$(0,0)$存在偏导数但是不可微。

2.令$x=y=t$则$g(t) = f(t,t) = \frac{t}{2}$，此时$g'(t) \neq f'_x(t) + f'_y(t)$链式法则失效，说明这一错误出现的理由。

补 4 (1)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^2\cdot 0}{\Delta x^2+0^2} - 0}{\Delta x} = 0$

∴ $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = 0$

同理

$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0$

而 $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 取 $y=x$ 不为0

∴ 不可微

(2) $g(t)$ 暗含了 $x=y$，是在一个方向上求导

$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}g\left(\frac{y}{x}\right)$

$\partial_{xx}h(x,y) = \frac{y^2}{x^3}f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3}g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}g\left(\frac{y}{x}\right)$

$\partial_{xy}h(x,y) = -\frac{y}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g\left(\frac{y}{x}\right)$

$\partial_y h(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}g\left(\frac{y}{x}\right)$

$\partial_{yy}h(x,y) = \frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g\left(\frac{y}{x}\right)$

原式 $= \frac{y^2}{x}f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x}g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y^2}{x}f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y}{x}g\left(\frac{y}{x}\right)$
$- \frac{2y^2}{x^2}g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x}f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}g\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

补充说明：

例 2. 证明下列二元极限发散：

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$。

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$。

这类题可以从次数直观判断

$\frac{x^m+y^n+x^{t_1}y^{t_2}}{x^{2k}+y^{2k}}$ → 奇次可能未必

$x^{2k}+y^{2k}$ → 偶次保证大于0

$m>2k$ 且 $n>2k$ 且 $t_1+t_2>2k$ 有极限 反之无

如 $\frac{x^3y}{x^3+y^3}$ 在 $(0,0)$ 无极限

令 $y=x$ 与 $y^3=-x^3+x^4$ 方法：利用高阶无穷小

利用对勾函数$f(x)=x+x^{-1}$的性质得到

$$\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}+\left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\right)^{-1}\le\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}. \tag{69}$$

代入式(67)

$$I\le\frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}+\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\right)\mathrm{d}x\right]^2\le\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2=\frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{70}$$

□

2.2 精选补充题

补 1. 计算定积分$\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$。（提示：考虑二重积分$\iint_D x^y\mathrm{d}\sigma$，其中$D=[0,1]\times[0,1]$）

补 2. 求$I=\iint_D|xy-1|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是正方形$[0,1]\times[0,1]$。

补 3. 求$I=\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$ 是$y^2=2x$，$x+y=4$和$x+y=12$围成区域。

补 4. 设f是$[-1,1]$上的连续函数，求证：$\iint_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(z)\mathrm{d}z$。

补 5. ***Schwarz*不等式.** 设f和g是$[a,b]$上的可积函数，求证：$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$。（提示：在$D=[a,b]\times[a,b]$考虑二重积分$\iint_D(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\mathrm{d}\sigma$）

补 6. 已知$f(x)$是$[0,1]$上单调递减的正连续函数，求证：$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$。（提示：在$D=[0,1]\times[0,1]$考虑二重积分$I=\iint_D f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma$并证明$I\ge 0$。）

1. $\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_0^1 x^y\,dy$

$=\int_0^1 dy\int_0^1 x^y\,dx$

$=\int_0^1\frac{1}{y+1}dy$

$=\ln 2$

2. $\int_0^1 dx\int_0^1(1-xy)\,dy$

$=\int_0^1(1-\frac{x}{2})dx$

$=\frac{3}{4}$

补 3. 求$I=\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$ 是$y^2=2x$，$x+y=4$和$x+y=12$围成区域。

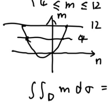
补 4. 设f是$[-1,1]$上的连续函数，求证：$\iint_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(z)\mathrm{d}z$。

3. $m=x+y\quad n=y\quad |J|=1$

$\therefore 2(m-n)\geqslant n^2$

$4\leqslant m\leqslant 12$

即 $\begin{cases}m\geqslant\frac{n^2}{2}+n\\4\leqslant m\leqslant 12\end{cases}$



联立 $(-4,4)\ (2,4)$

$(-6,12)\ (4,12)$

$\iint_D m\,d\sigma=\int_{-4}^{2}dn\int_4^{12}m\,dm+\int_{-6}^{-4}dn\int_{\frac{n^2+2n}{2}}^{12}m\,dm+\int_2^4 dn\int_{\frac{n^2+2n}{2}}^{12}m\,dm$

$=\cdots$

4. $-1\le x+y\le 1\quad -1\le x-y\le 1$

令 $m=x+y\quad n=x-y$

原式$=\int_{-1}^1 dn\int_{-1}^1 f(m)\cdot\frac{1}{2}\,dm$

$=\int_{-1}^1 1\,dn\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^1 f(m)\,dm$

$=\int_{-1}^1 f(m)\,dm=\int_{-1}^1 f(z)\,dz$

题 6. 设$f(x)$是$[0,1]$上正值连续函数，设$f(x)$在$[0,1]$的最小值是m，最大值M，求证：

$$1\leqslant\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{59}$$

法一：左侧即柯西 $\geqslant\left(\int_0^1\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\cdot\sqrt{f(x)}\,dx\right)^2=1$

右侧：由 $(m-f(x))(M-f(x))\leqslant 0$ 这类放缩方法牢记

$f(x)>0,M>0$ 同除 $M\cdot f(x)$

$\left(\frac{m}{f(x)}-1\right)\left(1-\frac{f(x)}{M}\right)\leqslant 0$

$\therefore\frac{m}{f(x)}+\frac{f(x)}{M}\leqslant 1+\frac{m}{M}$

由于 $\int_0^1\frac{m\,dx}{f(x)}\cdot\int_0^1\frac{f(x)}{M}dx$

$\leqslant\frac{1}{4}\left(\int_0^1\left(\frac{m}{f(x)}+\frac{f(x)}{M}\right)dx\right)^2$

$\leqslant\frac{1}{4}\left(1+\frac{m}{M}\right)^2$

$\therefore\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\cdot\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{M}{m}\cdot\frac{(m+M)^2}{M^2}$

$=\frac{(m+M)^2}{4mM}$

或：$\int_0^1\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}dx\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}dx$

$\leqslant\frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)}+\frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\right)dx\right]^2$

由对勾函数性质

$\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2$

$=\frac{(m+M)^2}{4Mm}$

法二：二重积分

$=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}d\sigma=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}d\sigma$

与名称无关

$\therefore=\iint_D\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)d\sigma$

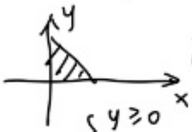
用双勾

换元：

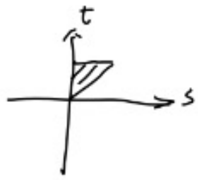
题 5. 求$I=\iint_D e^{\frac{x}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是$y=1-x$，$y=0$和$x=0$围成区域。

分析：本题虽然积分区域很简单，但是被积函数却很复杂，因为直接用累次积分，被积函数$e^{\frac{x}{x+y}}$以自变量x和y做积分都算不出来，因为$e^{\frac{x}{x+y}}$的原函数总不是简单函数。因此我们选择使用一般的换元法，以化简被积函数为第一目的。

$s=x \quad t=x+y$



区域变为：



$$\begin{cases} y\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+y\leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t\geq s \\ s\geq 0 \\ t\leq 1 \end{cases}$$

而 $\begin{cases} x=s \\ y=t-s \end{cases}$ $\therefore |J|=1$

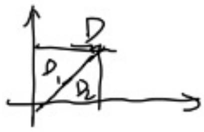
$$\iint_{D'} e^{\frac{s}{t}}\,d\sigma = \int_0^1 dt\int_0^t e^{\frac{s}{t}}ds$$

$$=\int_0^1 t(e-1)\,dt = \underline{\frac{e-1}{2}}$$

补 6. 已知$f(x)$是$[0,1]$上单调递减的正连续函数，求证：$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$。（提示：在$D=[0,1]\times[0,1]$考虑二重积分$I=\iint_D f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma$并证明$I\geq 0$。）

证 $I\geq 0$ 时：换元

令 $h(x,y)=f(x)f(y)y(f(x)-f(y))$



取 D_1：$\begin{cases} y\leq 1 \\ x\geq 0 \\ y>x \end{cases}$

D_2：$\begin{cases} y\geq 0 \\ x\leq 1 \\ y<x \end{cases}$

而 $h(x,y)+h(y,x)$ 在 D_1 内

$=\underbrace{(y-x)}_{>0}f(x)f(y)\underbrace{(f(x)-f(y))}_{>0}$

$\therefore$ 得证

由于 $y=x$ 时 $h(x,y)=0$

原式 $=\iint_{D_1}h(x,y)\,d\sigma+\iint_{D_2}h(x,y)\,d\sigma$

对 $\iint_{D_2}h(x,y)\,d\sigma$：

令 $\begin{cases} m=y \\ n=x \end{cases}$ 则 D_3：$\begin{cases} m\geq 0 \\ n\leq 1 \\ m<n \end{cases}$，$|J|=1$

即 $\iint_{D_3}h(n,m)\,d\sigma$ 再令 $\begin{cases} m=x \\ n=y \end{cases}$

$\therefore D_3$：$\begin{cases} y\leq 1 \\ x\geq 0 \\ y>x \end{cases}$ 即 D_1

$\therefore$ 为 $\iint_{D_1}h(y,x)\,d\sigma$

即 $\iint_{D_1}(h(x,y)+h(y,x))\,d\sigma$

另一方面，我们假定$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$在$y\in(0,+\infty)$一致收敛，想要证明$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。一个自然的想法是，如果可以证明

$$\lim_{y\to 0+0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{y\to 0+0}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, \tag{100}$$

就自然$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。这一方法的难点在于$I(y)$仅在$y\in(0,+\infty)$一致收敛，我们无法将连续性传递到$y=0$处，自然也不可以讨论$\lim_{y\to 0+0}I(y)$的情形。为了避免这一问题，我们考虑将含参变量无穷积分转化为含参变量正常积分讨论，因为含参变量正常积分连续性的讨论不依赖一致收敛的性质。

我们用反证法，如果$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$不收敛，那么根据柯西准则，存在$X_2>X_1>0$和$\varepsilon>0$使得

$$\left|\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{d}x\right|>\varepsilon. \tag{101}$$

令$g(x,y)=f(x)\mathrm{e}^{-xy}$，那么$g(x,y)$在$(x,y)\in[X_1,X_2]\times[0,+\infty)$连续。利用含参变量正常积分的结论，可以将积分号和极限号换序

$$\lim_{y\to 0+0}\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x=\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{d}x. \tag{102}$$

利用极限的性质，存在足够小的$y_0>0$使得

$$\left|\int_{X_1}^{X_2}f(x)\mathrm{e}^{-xy_0}\mathrm{d}x\right|>\frac{\varepsilon}{2}, \tag{103}$$

根据含参变量无穷积分的柯西准则，式(102)说明含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$在$y\in(0,+\infty)$不一致收敛。 □

2.3 精选补充习题

$\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$在$[0,1]\times[0,+\infty)$连续

$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{x}{1+\alpha x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}dx=\frac{\pi\alpha}{4(1+\alpha^2)}+\frac{\ln 2}{2(1+\alpha^2)}-\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}$

这里要代$\alpha=0$证明无常数项

$\therefore I(\alpha)=\frac{\pi\ln(1+\alpha^2)}{8}+\frac{\ln 2}{2}\arctan\alpha-\int_0^\alpha\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$

无初等原函数

补 1. 计算含参变量积分$\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，其中参数$\alpha\geq 0$。由此可以计算定积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，此前我们曾通过对称的方法证明这一定积分的值是$\frac{\pi\ln 2}{8}$。

补 2. 计算无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x$。$=\int_0^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x}dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

补 3. 设参数$A>0$，考虑含参变量无穷积分$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$，证明：

1. $I(y)$在$y\in[A,+\infty)$一致收敛。 $\forall y\in[A,+\infty)$ $\int_0^x\sin xy\,dx\leq\frac{2}{y}\leq\frac{2}{A}$ 一致有界

$\frac{1}{x}$ 一致单调敛于0

2. $I(y)$在$y\in[0,+\infty)$不一致收敛。 取$y=\frac{1}{n}$ 对$\int_0^n\frac{\sin xy}{x}dx$ 令$t=xy$

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\frac{\sin xy}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt\neq 0$

补 4. 证明： $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{2+x^y}\mathrm{d}x$在$y\in(2,+\infty)$连续。

$x\in[0,1]$ $\frac{x}{2+x^y}$连续 $\int_0^1\frac{x}{2+x^y}dx$存在

任取$b>2$

下证 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{2+x^y}dx$ 对$y\in[b,+\infty)$一致敛

在$x\geq 1$时 $\frac{x}{2+x^y}=\frac{1}{\frac{2}{x}+x^{y-1}}\leq\frac{1}{x^{y-1}}\leq\frac{1}{x^{b-1}}$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{b-1}}dx$收敛

$\therefore$ 一致敛

而b任取 $\therefore$ $(2,+\infty)$连续

点一共三股势力。我们用定义证明$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$。对$\forall\varepsilon>0$，我们证明存在$N\in\mathbb{N}^*$使得$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$对一切$n>N$和$x\in[a,b]$成立。

根据$f_n(x)$在(a,b)的一致收敛性，存在N_1，对一切$n>N_1$有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in(a,b), \tag{55}$$

根据$S(x)$在a,b两点的收敛性，存在N_2,N_3满足

$$|f_n(a)-f(a)|<\varepsilon,\quad \forall n>N_2, \tag{56}$$

和

$$|f_n(b)-f(b)|<\varepsilon,\quad \forall n>N_3. \tag{57}$$

考虑$N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，那么当$n>N$时上述三个不等估计都成立，即

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b], \tag{58}$$

因此$f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$。 □

2.2 精选补充题

等比数列　　$S(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ 1 & (x\neq 0)\end{cases}$　$S(x)$不连续

补 1. 求证：函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,\infty)$不一致收敛。（提示：借助连续性的传递，用反证法）

补 2. 证明：函数项级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$在$(0,+\infty)$不一致收敛，但是在$[a,+\infty)$一致收敛，其中$a>0$。

$\forall\ x\geq a$　$\frac{1}{1+nx}\leq\frac{1}{1+na}$

$\frac{1}{1+nx}$ 在 $n\geq 1$　$x\geq a$

一致对n单减且一致敛于0

$(-1)^n$ 一致有界

补 3. 计算下述极限

1. $\lim_{x\to 3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^n$

在 $x\in[\frac{14}{5},4]$

一致敛，连续，极限求和可换序

$\sum(-\frac{1}{2})^n=-\frac{1}{3}$

2. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x.$

$\int_0^1(1+\frac{x}{n})^n dx=\frac{n}{n+1}(1+\frac{x}{n})^{n+1}\Big|_0^1$　$n\to+\infty$ 得 $e-1$

补 4. 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，且$f(1)=0$，请用一致收敛的定义证明$f_n(x)=x^nf(x)$一致收敛。

设$f_n(x)\rightrightarrows g(x)$（极限函数），$|f(x)|\leq M$（有界）

易知 $g(x)\equiv 0$

下证 $\forall\ \varepsilon>0$，$\forall\ x\in[0,1]$，$\exists N>0$，$\forall n\geq N$

$|g(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon$

取 $\delta>0$，由$f(x)$连续

可使 $\forall x\in(1-\delta,1)$ $f(x)\leq\varepsilon$

则在 $(1-\delta,1)$

$|g(x)-f_n(x)|\leq f(x)\leq\varepsilon$

在 $(0,1-\delta)$ 取 N 使 $(1-\delta)^N\leq\frac{\varepsilon}{M}$

$\forall x\in(0,1-\delta)$

$|f_n(x)-0|\leq\frac{\varepsilon}{M}\cdot f(x)\leq\varepsilon$

$\therefore\ \forall x\in[0,1]$，$|f_n(x)-0|\leq\varepsilon$

，一致

$\square$

$\frac{1}{2}(\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2))$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^{2k}}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-x^2)^k}{k}\right]$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[1+(-1)^{k+1}]x^{2k}}{k} = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{4t+2}}{2t+1}$

2.2 精选补充题

补 1. ***2021*春季期末考试题．** 求函数$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$的*Maclaurin*级数。

补 2. 求幂级数$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$的极限函数$S(x)$的显式表达式。

→ 收敛域 $[-1,1]$

$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \frac{2}{1+x^2}$

$\therefore S'(x) = 2\arctan x + C$

但 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，代入$x=0$得0 $\therefore C=0$

$S'(x) = 2\arctan x$

$\therefore S(x) = 2x\arctan x - \ln(1+x^2) + C$

又代入$x=0$ $C=0$

$\therefore S(x) = 2x\arctan x - \ln(1+x^2)$

补 3. 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径是$R$，那么逐项求导幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$的在$(-R,R)$内闭一致收敛。

$\forall b \in (0,R)$ 取 $d \in (b,R)$ 当 $x\in[-b,b]$ $|na_nx^{n-1}| \le |n \cdot a_n \cdot (\frac{x}{d})^n \cdot d^n| = |n\cdot(\frac{x}{d})^n \cdot \underline{a_n \cdot d^n}|$

$|a_n|d^n$ 收敛（d在收敛域内） 而 $n\cdot(\frac{x}{d})^n$ 对 $\forall x\in[-b,b]$ 一致收敛于0，且在某项后对n单减

补 4. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径是正实数，求证：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$的收敛半径是$+\infty$。

→ 初学者很容易误用 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a_n}{n!}}$ 判断，但是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 未必存在！

如 $a_n = \begin{cases}\frac{1}{2} & (n为奇数) \\ 1 & (n为偶数)\end{cases}$ 或 $a_n = \begin{cases}\frac{1}{n} & (n为奇数) \\ \frac{1}{n^2} & (n为偶数)\end{cases}$

所以不能认为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{l}$！

下证 $\forall x\in R$，$\sum\frac{a_n}{n!}x^n$ 收敛

设 $\sum a_n x^n$ 收敛半径为l

任取 $t\in(0,l)$

$\sum\frac{a_n}{n!}\cdot x^n = \sum(a_n\cdot t^n)\cdot\frac{1}{n!}(\frac{x}{t})^n$

$a_n\cdot t^n$ 收敛

而 $\frac{1}{n!}(\frac{x}{t})^n$ 对 $\forall x\in R$ 极限为0且n从某值开始单调

$\therefore$ 收敛

以及

$$\begin{pmatrix} \partial_\theta x \\ \partial_\theta y \\ \partial_\theta z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \partial_\theta u \\ \partial_\theta \left(\sqrt{1-u^2}\cos\theta\right) \\ \partial_\theta \left(\sqrt{1-u^2}\sin\theta\right) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{1-u^2}\sin\theta \\ \sqrt{1-u^2}\cos\theta \end{pmatrix} \tag{100}$$

计算参数E, F, G可得（利用正交矩阵性质$AA^T = I$）

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ \partial_u z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-u\cos\theta}{\sqrt{1-u^2}} & \frac{-u\sin\theta}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix} A^{-T}A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-u\cos\theta}{\sqrt{1-u^2}} \\ \frac{-u\sin\theta}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-u^2}. \end{aligned} \tag{101}$$

同理用矩阵运算计算出参数$G = 1-u^2$和$F = 0$。然后代入第一型曲面积分的计算公式

$$\begin{aligned} \iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S &= \iint_{D'} f(u)\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta = \iint_{D'} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\theta\right) = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{102}$$

□

2.2 精选补充题

不封闭，所以要补出顶部

$I + \iint_D \underbrace{x\,dydz + y\,dzdx}_{为0} + z\,dxdy$

$= \iiint 3\,dV$

$\therefore I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 3r\,dz - \iint_D 4\,dxdy = 2\pi\int_0^2 3r(4-r^2)dr - 4\cdot\pi\cdot 2^2$

$= 8\pi$

补 1. ***2021春季期中考试题.*** 计算曲面积分$I = \iint x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是抛物面$z = x^2+y^2$被平面$z = 4$截出的有限部分，积分方向为外侧。

补 2. 计算曲面积分$I = \iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是单位球在第一~~象~~卦限的部分，取外侧。

由于 $dxdy$ 是有向面积 在 z负半轴 z^3与$dxdy$均取负 得正值

$\therefore$ 由对称性 上半球面积分 等于下半面 故补出整个球面

$I = \frac{1}{8}\iint_{x^2+y^2+z^2=1} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \frac{3\pi}{10}$

$= \frac{1}{8}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}(3x^2+3y^2+3z^2)dV$

$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 3r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$

补 3. 计算曲面积分$I = \iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是空间区域$\Omega : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} \le z \le 1$的边界，取外侧。

令 $u = x-1 \quad v = y-1$

$I = \iint_S (u+1)^2\frac{D(y,z)}{D(v,z)}dvdz + (v+1)^2\frac{D(z,x)}{D(z,u)}dzdu + (u+1)(v+1)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv$ （$\to 1$）

$= \iiint 2(u+1)+2(v+1)\,d\sigma$ （代表体积） $- \iint_{z=1,\ \frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{9}\le 1}(u+1)(v+1)dudv$

$= \iiint 4\,d\sigma - \iint 1\,dudv$ （此处用对称性化简） 面积，$\pi\cdot 2\cdot 3 = 6\pi$

令 $\begin{cases} u = 2r\cos\theta \\ v = 3r\sin\theta \\ z不变 \end{cases}$ $|J| = 6r$

$= \int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_{r^2}^1 24r\,dz - 6\pi = 12\pi - 6\pi$

$= 6\pi$

补 4. 计算曲线积分$I = \oint_{\Gamma_h} (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中$\Gamma_h$是平面$x+y+z = h$与单位球相交的曲线，去从$z$轴逆方向向正方向看的曲线逆时针方向，参数$h \in (-1, 1)$。

$\iint_{x+y+z=h\ (与球相交部分)} (-2y-2z)dydz + (-2z-2x)dzdx + (-2x-2y)dxdy = \iint \frac{\sqrt{3}}{3}(-4x-4y-4z)\,dS$

$= -\frac{4\sqrt{3}}{3}h\cdot\iint 1\,dS = -\frac{4\sqrt{3}}{3}h\cdot\pi(1-\frac{h^2}{3})$

补 5. 设S是一光滑闭曲面，围成区域Ω，设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在$\Omega \cup S$有连续的二阶偏导数，证明下述等式

1.设n_1为单位法向量$\mathbf{n}(x,y,z)$的第一分量，那么$\iiint_\Omega u'_x v\mathrm{d}V = -\iiint_\Omega uv'_x\mathrm{d}V + \iint_S uvn_1\mathrm{d}S$。

2.用Δu表示u作用*Laplace*算子得到的函数，用∇u表示u的梯度，用$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$表示$u$在边界$S$上的外侧法向量的方向导数，那么$\iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}V = -\int_\Omega u\Delta v + \iint_S u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S$。

补 5. 设S是一光滑闭曲面，围成区域Ω，设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在$\Omega\cup S$有连续的二阶偏导数，证明下述等式

1. 设n_1为单位法向量$\mathbf{n}(x,y,z)$的第一分量，那么$\iiint_\Omega u'_x v \mathrm{d}V = -\iiint_\Omega uv'_x \mathrm{d}V + \iint_S uvn_1 \mathrm{d}S$.

2. 用Δu表示u作用$Laplace$算子得到的函数，用∇u表示u的梯度，用$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$表示$u$在边界$S$上的外侧法向量的方向导数，那么$\iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v \mathrm{d}V = -\int_\Omega u\Delta v + \iint_S u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S$。

1. 即 $\iiint_\Omega \frac{\partial uv}{\partial x} dv = \iint_S uv\, n_1 ds$

对 RHS，$n_1 = \cos\alpha$

故 RHS $= \iint_S uv\, dy\, dz$

$= \iiint_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x} dv$

2. 由 1. 知

$\iint_S u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha \cdot ds = \iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} dv + \iiint_\Omega u\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV$

同理写出 y. z，三式相加

$\iint_S u\cdot\frac{\partial v}{\partial n} dS = \iiint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dV + \iiint_\Omega u\cdot\Delta v\, dV$

我们之前的分析告诉我们二重积分$\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}(-2e^y\cos x)dxdy$的值是不依赖半径$r$的，且数值与本题所求的积分$I$相等。结合$\frac{1}{r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}(-2e^y\cos x)dxdy$在$r\to 0+0$时的极限，我们就可以得到$I=-2\pi$。 $\square$

2.2 精选补充题

补 1. ***2021春季期中考试题.*** 设L为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的逆时针方向，计算曲线积分$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$。

挖去原点

由于 $\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$

$I=\oint_{x^2+y^2=1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ → 代入等于1，让定义域包含原点。

$=\oint_{x^2+y^2=1}xdy-ydx=\iint_{x^2+y^2\leq1}2\,d\sigma=2\cdot(\pi\cdot1^2)=2\pi$

补 2. 计算曲线积分$I=\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y}{3(x^2+y^2)}$，其中$L$是曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$的在$x$轴以上部分的逆时针方向。

说明：ds相当于曲线长度微元

取小段曲线 有 $ds\cdot\cos\theta=dx$，$ds\cdot\sin\theta=dy$ （θ为切线与x轴夹角）

单位圆切线（逆时针）方向单位向量为 $(-y,x)$

故 $\begin{cases}\cos\theta=-y\\ \sin\theta=x\end{cases}$

补 3. 计算曲线积分$\iint_L\left(x^3y^2+x^2y^3\right)\mathrm{d}s$，其中$L$是单位圆。（提示：尝试将第一型曲线积分化成第二型曲线积分，然后利用Green公式）

$\int_L -x^3y\cdot(-y\,ds)+xy^3\cdot(x\,ds)=\int_L -x^3y\,dx+xy^3\,dy$

$=\iint_{x^2+y^2\leq1}y^3+x^3\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r[r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)]dr$

$=\frac{1}{5}\cdot2\cdot4\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta$

补 4. 解答下列问题

1.设曲线C的弧长为L，求证：

$$\left|\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant ML, \tag{88}$$

设θ为切线方向角

$\left|\int_C(P(x,y)\cos\theta+Q(x,y)\sin\theta)ds\right|\leq\int_C\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\cdot\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,ds$

其中$M=\max_{(x,y)\in C}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$。

$=\int_C\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\,ds\leq\int_C M\,ds=ML$

2.利用上一问结论，证明$\lim_{R\to+\infty}\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$。

$\left|\oint_{x^2+y^2=R^2}\cdots\right|\leq2\pi R\cdot\max\sqrt{\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2+xy)^4}}$

$=2\pi R^2\cdot\max\left[\frac{1}{(R^2+xy)^2}\right]$

$=2\pi R^2\cdot\frac{1}{(R^2-\frac{1}{2}R^2)^2}$

$=\frac{2\pi(3+2\sqrt2)}{R^2}\to0$

补 5. 设平面矩形区域$D=[0,\pi]\times[0,\pi]$，记L是D的正向边界，求证

1.$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$。

2.$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant2\pi^2$。（提示：结合重积分对称性）

补 6. 设D是有界平面区域，其边界L分段光滑，定点$P_0(x_0,y_0)$不在L上。设$P(x,y)$是L上的动点，向量$\mathbf{n}$表示P处曲线L的外侧单位法向量，向量$\mathbf{r}$是以P_0为起点，以P为终点的向量，定义以点P坐标为自变量的函数$f(x,y)=\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|}$，计算曲线积分$I=\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$。（提示：转化为第二型曲线积分，然后分$P_0$是否在$D$内部使用挖洞法）

补 2. 计算曲线积分$I=\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y}{3(x^2+y^2)}$，其中$L$是曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$的在$x$轴以上部分的逆时针方向。

首先，$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$，难以格林

故用参数方程，$x=\cos^3\theta$ $y=\sin^3\theta$

$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta\cos^4\theta-\sin^5\theta\cos\theta-\sin\theta\cos^5\theta-\sin^4\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdots d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdots d\theta$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^4\theta-\sin^4\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}d\theta$

$=2\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^4\theta}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}d\theta\right]$

$=2\cdot\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^2t\sin^4t}{\sin^6t+\cos^6t}d(\frac{\pi}{2}-t)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}d\theta\right]$

$=0$

补 5. 设平面矩形区域$D=[0,\pi]\times[0,\pi]$，记L是D的正向边界，求证

1. $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$。

2. $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2$。（提示：结合重积分对称性）

1. 证 $\iint_D e^{\sin y}+e^{-\sin x}d\sigma = \iint_D e^{-\sin y}+e^{\sin x}d\sigma$

令 $f(x,y)=e^{\sin y}+e^{-\sin x}$

$g(x,y)=e^{-\sin y}+e^{\sin x}$

$\therefore$ $f(y,x)=g(x,y)$

即 f 与 g 关于 $y=x$ 对称

将 D 关于 $y=x$ 划为 D_1（左上三角）、

D_2（右下三角

$\text{LHS} = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$

$= \iint_{D_2} f(y,x)d\sigma + \iint_{D_1} f(y,x)d\sigma$

$= \iint_{D_2} g(x,y)d\sigma + \iint_{D_1} g(x,y)d\sigma$ ？求证

$= \iint_D g(x,y)d\sigma = \text{RHS}$

2. $\text{LHS} = \iint_D f(x,y)d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D f(x,y)+g(x,y)\,d\sigma$

$= \frac{1}{2}\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x}+e^{\sin y}+e^{-\sin y})\,d\sigma$

$= \frac{1}{2}\left(\iint_D e^{\sin x}+e^{-\sin x}d\sigma + \iint_D e^{\sin y}+e^{-\sin y}d\sigma\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot[\pi\int_0^\pi e^{\sin x}+e^{-\sin x}dx + \pi\int_0^\pi e^{\sin y}+e^{-\sin y}dy]$

$= \pi\int_0^\pi e^{\sin x}+e^{-\sin x}dx$

$\geq \pi\cdot\int_0^\pi 2\,dx = 2\pi^2$

补 6. 设D是有界平面区域，其边界L分段光滑，定点$P_0(x_0,y_0)$不在L上。设$P(x,y)$是L上的动点，向量$\mathbf{n}$表示P处曲线L的外侧单位法向量，向量$\mathbf{r}$是以P_0为起点，以P为终点的向量，定义以点P坐标为自变量的函数$f(x,y)=\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|}$，计算曲线积分$I=\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$。（提示：转化为第二型曲线积分，然后分$P_0$是否在$D$内部使用挖洞法）

$f(x,y)=\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|^2}$ 由于 $\vec{n}=(-\sin\alpha,\cos\alpha)$

（设切向量为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$）

$\oint_L f(x,y)ds = \oint_L \frac{(y-y_0)dx-(x-x_0)dy}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

1° P在其外，$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\neq 0$

上式 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，为0

2° P在其内，由格林，取

圆 $\Gamma\begin{cases}x=x_0+\varepsilon\cos\alpha\\ y=y_0+\varepsilon\sin\alpha\end{cases}$ （ε极小，使圆在L内）

即 $\oint_\Gamma \frac{(y-y_0)dx-(x-x_0)dy}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_\Gamma (y-y_0)dx-(x-x_0)dy$

$= -\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq\varepsilon^2} d\alpha = -2\pi$

如果P在L上…

（不用讨论）

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

我们接下来利用正交变换(70)来证明例题。首先是Jacobi行列式的计算

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \det\left(A^{-1}\right) = 1, \tag{72}$$

这里需要注意正交矩阵的性质$\det(A) = \det(A^{-1}) = 1$。由于正交矩阵的几何意义是欧式空间中的旋转，所以得到新的积分区域Ω'仍是单位球$u^2+v^2+w^2 \leq 1$，新的三重积分是

$$\iiint_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega'} f(hu)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{73}$$

对于新的积分，我们使用“先二后一”的积分顺序，固定u对(v,w)二重积分：对于给定u，自变量(v,w)的取值范围是圆心为原点的圆$v^2+w^2 \leq 1-u^2$记作$D^u_{(v,w)}$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega'} f(hu)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w &= \int_{-1}^{1} f(hu)\left(\int_{D^u_{(v,w)}} 1\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}u \\ &= \pi\int_{-1}^{1} f(hu)(1-u^2)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{74}$$

□

2.2 精选补充题

补 1. ***2021春季期中考试题.*** 求$I = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$代表区域$0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 1$。

柱坐标换元 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{r^2}(r^2\sin^2\theta+z^2)\mathrm{d}z$

注意

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^5\sin^2\theta+\frac{r^7}{3})\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi}(\frac{1}{24}+\frac{\sin^2\theta}{6})\mathrm{d}\theta$

$= \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$

补 2. 求$\iiint_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是球体$x^2+y^2+z^2 \leq 2z$。

球坐标 $r^2 \leq 2r\cos\varphi$

范围 $r \leq 2\cos\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$

$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^5\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32\cos^7\varphi\sin\varphi}{3}\mathrm{d}\varphi = \frac{8\pi}{3}$

补 3. 设$N \in \mathbb{N}^*$，记n维空间单位球$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 1$的体积为$\alpha(n)$，计算$\alpha(4)$，并写出序列$\alpha(n)$的递推表达式。

补 4. 设$\Omega = \{(x,y,z)\,|0 \leqslant x+y-z \leqslant 1, 0 \leqslant y+z-x \leqslant 1, 0 \leqslant x+z-y \leqslant 1\}$是六个平面相交形成的区域，求重积分$I = \iiint_{\Omega}(x+y-z)(y+z-x)(x+z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

补 5. 设参数$a,b,c > 0$，求曲面$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$围成空间图形的体积。（提示：模仿椭球坐标换元法设计合适的换元方式）

错题，这是椭圆柱面
不封闭

补 6. 求$I = \iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是$x^2+y^2 \leq 2z$和$x^2+y^2+z^2 \leq 3$相交部分。（提示：拆分被积函数并利用对称性）

设 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

注：未学线代时可直接算雅各比

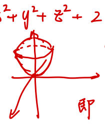
记为 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = |A^{-1}| = \frac{1}{4}$

$\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1\frac{uvw}{4}\mathrm{d}w$

$= \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{32}$

$\iiint x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$



由对称性

xy yz zx 三项积分为0

即 $\iiint x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

柱坐标

$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

$= 2\pi\int_0^1 r^3(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2})+\frac{r}{3}\left[(3-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^6}{8}\right]\mathrm{d}r$

$= 2\pi\int_0^1(\frac{2}{3}r^3+r)\sqrt{3-r^2}-\frac{r^5}{2}-\frac{r^9}{24}\mathrm{d}r$

$= 2\pi\int_0^1(\frac{2}{3}r^3+r)\sqrt{3-r^2}\,\mathrm{d}r-\frac{7\pi}{40}$

令 $r = \sqrt{3}\sin\theta$

$2\pi\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}}(2\sqrt{3}\sin^3\theta+\sqrt{3}\sin\theta)3\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{7\pi}{40}$

$= 6\pi\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}} 2\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{7}{40}\pi$

$= 6\pi\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^3\theta+\frac{2\sqrt{3}}{5}\cos^5\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}}-\frac{7\pi}{40}$

$= 6\pi\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot(\frac{\sqrt{6}}{3})^3+\frac{2\sqrt{3}}{5}\cdot(\frac{\sqrt{6}}{3})^5-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(\frac{\sqrt{6}}{3})^3\right]-\frac{7}{40}\pi$

$= -\frac{44\pi}{15}-\frac{7}{40}\pi$ （结果有点抽象不知算对没有）

补 3. 设$N \in \mathbb{N}^*$，记n维空间单位球$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \le 1$的体积为$\alpha(n)$，计算$\alpha(4)$，并写出序列$\alpha(n)$的递推表达式。

对 n维

$$\int_{-1}^{1} \left(\int \cdots \int_{\Omega} 1 \quad dV \right)^{n-1} dx_n$$

其中 Ω 为 $x_1^2 + \cdots x_{n-1}^2 \le 1 - x_n^2$

体积为 $\underbrace{\left(\frac{\sqrt{1-x_n^2}}{1}\right)^{n-1} \cdot \alpha(n-1)}$ → 但很不严谨

故 $\alpha(n) = \int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \alpha(n-1) \, dx_n$

$$= \alpha(n-1) \int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n$$

$$= \alpha(n-1) \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

$$= \alpha(n-1) \cdot 2 \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n\text{为奇}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n\text{为偶}) \end{cases}$$

注意到级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$是收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$的重排级数，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$也收敛，根据之前的分析，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$也收敛。由于$\{b_n\}$是从小到大的重排，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}. \tag{67}$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$收敛。 □

2.2 精选补充题

$\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}\ln(1+\frac{2}{n-1}) \sim \frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}$

故收敛

补 1. 设参数p为正实数，判断正项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n+1}{n-1}$。

补 2. 判断正项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$。（提示：使用*Cauchy*判别法，得到的极限借助泰勒公式计算）

$\lim \sqrt[n]{(n^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim(n^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^n = \lim e^{n\ln(n^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})}$

$e^{\frac{\ln n}{n}} = 1+\frac{\ln n}{n}+o(\frac{1}{n})$

$= \lim e^{n(n^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1)} = \lim e^{\ln n-1}$

$=+\infty$，故发散

补 3. 判断一般项级数收敛性$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n}{n}$。

补 4. 设$\{a_n\}$是单调递增的有界序列，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$是收敛的。

补 5. 在讲义的例*4*中，请举例说明，如果$l=1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$可能发散也可能收敛。

补 6. 我们知道*1*级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，现在我们在*1*级数的基础上，去掉所有分母包含*9*的项，例如$\frac{1}{9},\frac{1}{19},\frac{1}{91}$等，得到一个新级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$，证明这个新级数收敛。

补3：首先$\left|\frac{\sin n}{n}\right|$发散

$(1+\cdots+\frac{1}{n})>1$ ∴不绝对收敛；

由$\sum_{n=1}^{m}\sin n$有界

下证$(1+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{n}$单减趋于0

$\because (1+\cdots+\frac{1}{n+1})\frac{1}{n+1}-(1+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{n}$

$=(1+\cdots+\frac{1}{n})[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}]+\frac{1}{(n+1)^2}$

$=\frac{1}{(n+1)}[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}(1+\cdots+\frac{1}{n})]$

$<\frac{1}{n+1}[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}]<0$

∴单减

又$\because (1+\cdots+\frac{1}{n})\frac{1}{n}<\frac{1}{n}(\int_1^n\frac{1}{x}dx+1)$

$=\frac{1}{n}(1+\ln n)\to 0$

∴趋于0

∴条件收敛

补五

注：令 $l=1$

无法判别

$(a_n=\frac{1}{n(\ln n)^p}$

$n\cdot\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$

$=n\ln(\frac{n+1}{n}(\frac{\ln(n+1)}{\ln n})^p)$

$=n\ln(1+\frac{1}{n})+np\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$

$=1+np\ln(\frac{\ln(n+1)}{\ln n})$

对 $f=x\ln(\frac{\ln(x+1)}{\ln x})$

令 $x=e^t$

$\lim_{t\to+\infty}f(t)=e^t\ln(\frac{\ln(1+e^t)}{t})$

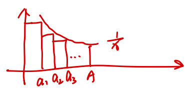
$\sim e^t(\frac{\ln(1+e^t)}{t}-1)$

$=e^t\frac{\ln(e^{-t}+1)}{t}\sim\frac{1}{t}\to 0$

∴ $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 对$\forall p$满足

但未必敛

补4. 法一：积分　设 $a_n\to A$



$\sum(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})=\sum\frac{1}{a_{n+1}}\cdot(a_{n+1}-a_n)$

$\leq\int_{a_1}^{A}\frac{1}{x}dx$ 收敛

法二：$\sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$

其中 $\frac{1}{a_{n+1}}$ 单减有界 $(\frac{1}{A},\frac{1}{a_1}]$

而$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛

（等于 $A-1$）

∴由Abel，原级数收敛

补6 分组的应用

按p_n在 $1\sim9$　$10\sim99$

$100\sim999$ … $10^k\sim10^{k+1}-1$分组

对 $10^k\leq p_n\leq10^{k+1}-1$组

p_n取值有 $8\times9^{k-1}$种（首位不取0,9

其余位不取9）

故每组之和 $=\sum\frac{1}{p_n}$

$\leq\frac{8\times9^{k-1}}{10^k}=\frac{8}{9}\times(\frac{9}{10})^k$

∴ $\sum\frac{1}{p_n}<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{9}\times(\frac{9}{10})^k$

收敛

题 4. 设$f \in D^2[a,b]$且$f(a)=f(b)=0$，证明：对于任意$x\in(a,b)$，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$。

Proof. 由于x,a,b都是确定的数，我们的目标是找到一个$\xi\in(a,b)$使得使得

$$f''(\xi)=\lambda=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}. \tag{33}$$

令$g(y)=f''(y)=\lambda$，我们想将g写成某函数的原函数。由此取

$$G(y)=f(y)-\frac{\lambda}{2}(y-a)(y-b)=f(y)-f(x)\frac{(y-a)(y-b)}{(x-a)(x-b)}. \tag{34}$$

那么显然有$G''(y)=g(y)$和$G(a)=G(b)=G(x)=0$。所以存在$p\in(a,x)$和$q\in(x,b)$使得$G'(p)=G'(q)$，然后存在$\xi\in(p,q)$满足$g(\xi)=0$。 □

2.3 扩展补充题

补 1. ***2021*高数*B*期末考试题.** 证明：存在定义域是是全体实数且取值于$(0,1)$的函数$\theta(x)$使得$\arctan x=\frac{x}{1+(x\theta(x))^2}$对一切$x$成立。

$\forall x\neq 0$ $\arctan x-\arctan 0=\frac{1}{1+x_1^2}$ $(0<x_1<x)$

取 $\theta(x)=\frac{x_1}{x}$

当 $x=0$ 时 定义 $\theta(x)=1$

则存在

补 2. 设n是任意自然数，讨论下述函数的零点数

***1.*勒让德多项式** $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)}$在$(-1,1)$有$n$个不同零点。

$(x+1)^n(x-1)^n$ 直接用2.2扩展习题题1的结论

***2.*拉盖尔多项式** $L_n(x)=\mathrm{e}^x\left[x^n\mathrm{e}^{-x}\right]^{(n)}$.在$\mathbb{R}$有$n$个不同零点。

补 3. 设$f(x)\in D^1(a,b)$，使用达布定理证明：如果$f'(x)$存在间断点，那么间断点必须是第二类间断点。

补 4. 证明下列问题

1.f在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(1)=0$，求证：存在$\xi\in(0,1)$使得 $f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$。

令 $g(x)=xe^{-x}f(x)$

则 $g(0)=g(1)=0$

$\therefore\ \exists\ \xi\in(0,1)$

$g'(\xi)=e^{-\xi}((1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi))=0$

由 $\xi\neq 0$

$\therefore\ f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

2.f在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，求证对于任意实数λ，均存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$。

→ 观察：$f'(\xi)-1$ 是 $f(\xi)-\xi$ 导数

令 $g(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$

$\forall\lambda$，$g(0)=0$

$g(\frac{1}{2})>0$

$g(1)<0$

$\therefore\ \exists\ a\in(\frac{1}{2},1)$

$g(a)=0$；

$\exists\ t\in(0,a)$

$g'(t)=0$

即 $e^{-\lambda t}[f'(t)-1-\lambda(f(t)-t)]=0$

补三

先证明导函数 $f'(x)$ 在区间 (A,B) 内没有第一类间断点

设$f'(x)$ 在 $x_0\in(A,B)$处的左右极限都存在。设 $\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=X$，$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=Y$

若 $\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=Y\neq f'(x_0)$，设 $f'(x_0)>Y$，令 $\varepsilon=f'(x_0)-Y>0$.

由于 $\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=Y$，则 $\exists\delta>0,\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，

恒有 $|f'(x)-Y|<\frac{\varepsilon}{2}=\frac{f'(x_0)-Y}{2}$，即 $f'(x)<\frac{f'(x_0)+Y}{2}$

在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内取一点 α，必然有 $f'(\alpha)<\frac{f'(x_0)+Y}{2}<f'(x_0)$

在 $[x_0,\alpha]$ 区间上应用达布定理，对于 $\frac{f'(x_0)+Y}{2}$，$\exists\xi\in(x_0,\alpha)\subseteq(x_0,x_0+\delta)$，

使$f'(\xi)=\frac{f'(x_0)+Y}{2}$，但与 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)<\frac{f'(x_0)+Y}{2}$ 相矛盾。

因此$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=Y$ 只能等于 $f'(x_0)$。同理可证 $\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=X=f'(x_0)$。

因此若$f'(x)$在 $x_0\in(A,B)$处的左右极限都存在，

则$f'(x)$在 x_0 处连续，故不存在第一类间断点。

事实上，导函数也不会有无穷间断点（定义域内）

也可用达布定理证明

设 $f'(a)=Y$ $\lim_{x\to a^+}f'(x)=+\infty$

取$f'(a+\delta)>|Y|+1$

在 $(a,a+\delta)$ 内用达布

而 $(a,a+\delta)$ 内 $f'(x)>|Y|+1$，矛盾

2. 拉盖尔多项式 $L_n(x)=e^x\left[x^ne^{-x}\right]^{(n)}$.在$\mathbb{R}$有$n$个不同零点。

取 $g_n(x)=\frac{L_n(x)}{e^x}$

下证当 $g(\varepsilon)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ 时

存在 $t\in(\varepsilon,+\infty)$ $g'(t)=0$

由 $g(x)$ 连续 取 $\lambda>\varepsilon$ 易知

能使 $g(\lambda)\neq0$，不妨令 $g(\lambda)>0$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

可取 $|g(\varepsilon')|<\frac{g(\lambda)}{2}<g(\lambda)$ 故 $g(\varepsilon')<\frac{g(\lambda)}{2}<g(\lambda)$

在 $[\lambda,\varepsilon']$ 用介值定理

有 $g(\varepsilon'')=\frac{g(\lambda)}{2}$

同理，$[\varepsilon,\lambda]$ 间 有 $g(\varepsilon''')=\frac{g(\lambda)}{2}$

$\therefore g(\varepsilon''')=g(\varepsilon'')$

由罗尔中值定理，$\exists x_0$ $g'(x_0)=0$

则 $g_1(x)$ 有 $g_1(0)=0$ 、$g_1(x_1)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g_1(x)=0$

在 $[0,x_1]$ 和 $(x_1,+\infty)$ 上 由上述 ($g_1(x)$ 连续可导)

$g_2(0)=0$ 且 $\exists x_{21},x_{22}$ $g_2(x_{21},x_{22})=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g_2(x)=0$

依此类推

$g_{n-1}(x)=\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k x^{n(k)}\cdot e^{-x(n-1-k)}\right]$

仍有 $g_{n-1}(0)=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}g_{n-1}=0$

而 $g_n(0)\neq0$

故 $g_n(x)$ 至少有 x_{n1}, x_{n2} $\cdots$ x_{nn} 这 n 个零点

$g_n(x)$ 与 $L_n(x)$ 零点相同

而 $g_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k[x^n]^{(k)}\cdot[e^{-x}]^{(n-k)}$

故而 $g_n(x)=e^{-x}\cdot P_n(x)$

最多 n 个零点，故而 $L_n(x)$ 恰有 n 个实根

其中$\xi_1 \in (ar, br)$，以及

$$\int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = f(\xi_2) \int_{aR}^{bR} \frac{\mathrm{d}x}{x} = f(\xi_2) \ln \frac{b}{a}, \tag{77}$$

其中$\xi_2 \in (aR, bR)$。代入得到

$$\int_r^R \frac{f(ax)}{x} \mathrm{d}x - \int_r^R \frac{f(bx)}{x} = \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a} \left(f(\xi_1) - f(\xi_2) \right). \tag{78}$$

然后取$r \to 0+0$和$R \to +\infty$，此时根据ξ_1和ξ_2的选取可知$\xi_1 \to 0$和$\xi_2 \to +\infty$，就能得到需要的结论。 □

先证其收敛再算！

2.2 精选补充题

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$

令 $x = \frac{1}{t}$

$= \int_1^{+\infty} \frac{-\ln t}{1+t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$

补 1. 计算无穷瑕积分$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} \mathrm{d}x$。（提示：模仿例题*6*）

补 2. 设参数$\alpha > 2$，函数$f(x)$在$[0, +\infty)$可导，且满足极限条件$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$和$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f'(x) = -1$，求证：无穷积分$\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$收敛。（提示：用比较判别法）

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{(1-\alpha)x^{-\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1} < 1$

$[0,1]$上$f(x)$连续

而 $\int_1^{+\infty} x^{1-\alpha} dx$ 收敛　∴ $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛

补 3. 判断无穷积分$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} \mathrm{d}x$的收敛性和绝对收敛性。（提示：模仿*Dirichlet*积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$收敛性判别）

$\frac{|\sin x|}{x \ln x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x \ln x} = \frac{1-\cos 2x}{2x\ln x} = \frac{1}{2x\ln x} - \frac{\cos x}{2x\ln x}$　不绝收

散　敛

对 $\frac{\sin x}{x\ln x}$　$\int_2^{+\infty} \sin x\, dx$ 有界　$\frac{1}{x\ln x}$ 单减 ⇒ 条收

补 4. 设$f(x)$是$[1, +\infty)$单调连续函数，如果无穷积分$\int_1^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$收敛，证明$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$。（提示：根据函数极限定义应用反证法）

不妨假设$f(x)$单减

1° $f(x)$无界，则$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$　显然不成立

2° $f(x)$有界，则由单调

$f(x)$有极限　设为a

若　$a \neq 0$

$\exists\, x_1$，$\forall x > x_1$，

$|x| > \frac{|a|}{2}$

则　取 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$

$\forall\, x_0 > 0$，

总可取 x_2, x_3 使

$x_3 = x_2 + 1$ 且 $x_2 > \max\{x_0, x_1\}$

此时 $\left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| > \frac{|a|}{2} = \varepsilon$

∴ 不满足